

Регионален натпревар 2006

I година

1. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот НЗС и НЗД е 15.

Решение. Нека x и y е парот природни броеви за кои разликата меѓу нивниот НЗС и НЗД е 15. Нека $d = \text{NZD}(x, y)$ и $s = \text{NZS}(x, y)$. Тогаш, постојат природни броеви a и b така што $x = da$, $y = db$, $\text{NZD}(a, b) = 1$ и $s = dab$. Од условот на задачата имаме дека $s - d = 15$, каде ако замениме $s = dab$ се добива

$$dab - d = 15 \Rightarrow d(ab - 1) = 15 \Rightarrow d \in \{1, 3, 5, 15\}.$$

1) За $d = 1$, имаме

$$ab - 1 = 15 \Rightarrow ab = 16 \Rightarrow a = 1, b = 16 \Rightarrow x = 1, y = 16,$$

2) За $d = 3$, имаме

$$ab - 1 = 5 \Rightarrow ab = 6 \Rightarrow a = 1, b = 6 \text{ или } a = 2, b = 3 \Rightarrow x = 3, y = 18 \text{ или } x = 6, y = 9,$$

3) За $d = 5$, имаме

$$ab - 1 = 3 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow x = 5, y = 20,$$

4) За $d = 15$, имаме

$$ab - 1 = 1 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow x = 15, y = 30.$$

Значи, бараните парови природни броеви се: 1 и 16, 3 и 18, 6 и 9, 5 и 20, 15 и 30.

2А. Нека a, b, c и x, y, z се дадени реални броеви такви што $abc \neq 0$, $xyz \neq 0$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ и } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \text{ Докажи дека } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Ако воведеме смени $\frac{x}{a} = u$, $\frac{y}{b} = v$, $\frac{z}{c} = w$, тогаш точни се равенствата $u + v + w = 1$ и $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$. Од второто равенство $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$, добиваме дека $\frac{vw + uw + uv}{uvw} = 0$, од каде имаме $uv + vw + wu = 0$. Ако равенството $u + v + w = 1$ го квадрираме, добиваме $(u + v + w)^2 = 1^2$, т.е.

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + 2uw = 1.$$

Ако го искористиме условот $uv + vw + wu = 0$, добиваме

$$u^2 + v^2 + w^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + uw) = 1.$$

т.е. $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Ако се вратиме на старите променливи, ја добиваме точноста на бараното равенство

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2Б. Секое од темињата на една коцка нумерирано е со еден од броевите -1 и 1 , а на секој сид е запишан производот на броевите со кои се означени темињата на тој сид. Дали збирот на така добиените 14 броеви може да биде еднаков на

- а) 7, б) 0 ?

Решение. Ако сите темиња на коцката се нумерирани со единици, тогаш вкупниот збир е $14 \cdot 1 = 14$. Ако се смени еден број на некое теме од коцката, тогаш се менуваат и производите запишани на сидовите на коцката, а вкупниот збир се менува за $+8, +4, 0, -4$, или -8 . Следува дека вкупниот збир е секогаш од облик $4n+2, n \in \mathbb{Z}$.

- а) Вкупниот збир не може да биде 7, бидејќи $7 = 4 \cdot 1 + 3$.
 б) Вкупниот збир не може да биде 0, бидејќи $0 = 4 \cdot 0$.

3. Меѓу 9 златници се наоѓа еден неисправен златник кој има помала тежина од останатите златници. Како со помош на две мерења на вага без тегови ќе го издвоиме неисправниот златник?

Решение. I мерење: Прво 9-те златници ги делиме на три групи од по три златници (по случаен избор). Избираме било кои две од трите групи и по една група ставаме на секоја страна на вагата. Ако тежините се исти во овие две групи, тогаш бараниот златник се наоѓа во третата група. Ако пак, едната страна на вагата е полесна од другата, тогаш во полесната група се наоѓа бараниот златник.

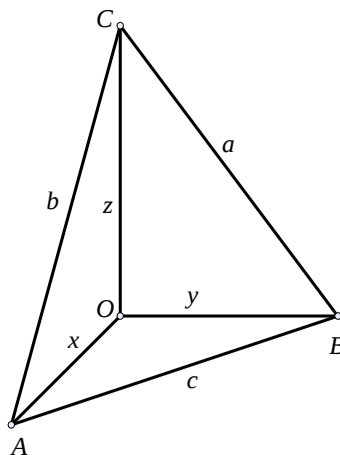
II мерење: Од групата со три златници во која се наоѓа полесниот златник, избираме по случаен избор два и по еден од нив ставаме на секоја страна од вагата. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш бараниот златник е оној што останал. Ако пак, вагата покаже дека едната страна е полесна, тогаш златникот на полесната страна е бараниот златник.

4А. Нека OA, OB, OC се три заемно нормални отсечки. Дали може да се изберат должини за отсечките OA, OB, OC , за да страните на триаголникот ABC се однесуваат како $3:4:6$?

Решение. Нека $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$, $\overline{OC} = z$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $-1 - \sqrt{5}$ (цртеж десно). Нека $-1 + \sqrt{5}$, значи постои $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ така да $c = 3k$, $a = 4k$, $b = 6k$. Триаголниците AOB , BOC и AOC се правоаголници, од каде се добива дека

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9k^2 \\ y^2 + z^2 = 16k^2 \\ x^2 + z^2 = 36k^2 \end{cases}$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и од



тој збир ја одземеме третата равенка ќе добиеме

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) - (x^2 + z^2) &= 9k^2 + 16k^2 - 36k^2 \\ 2y^2 &= -11k^2 \\ y^2 &= -\frac{11}{2}k^2\end{aligned},$$

што не е можно.

Заради добиената контрадикција, заклучуваме дека не може да се изберат должини за отсечките OA , OB , OC на тој начин, за да односот на страните на триаголникот ABC биде $3:4:6$.

4Б. Основата на права призма е правоаголен триаголник, со катети кои се однесуваат како $24:7$, хипотенузата на основата се однесува кон висината на призмата како $5:2$, а бочната површина на призмата е $140m^2$. Најди го волуменот на призмата.

Решение. Од $a:b=24:7$ и $c:H=5:2$ имаме дека $b=\frac{7}{24}a$ и $c=\frac{5}{2}H$. Од Питагоровата теорема за правоаголен триаголник имаме

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \Rightarrow a^2 + \frac{49}{576}a^2 = \frac{25}{4}H^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{625}{576}a^2 &= \frac{25}{4}H^2 \Rightarrow a^2 = \frac{144}{25}H^2 \Rightarrow a = \frac{12}{5}H\end{aligned}$$

Со замена во $b=\frac{7}{24}a$, добиваме

$$b = \frac{7}{24} \cdot \frac{12}{5}H = \frac{7}{10}H.$$

Имаме дека $M=140m^2$, а од друга страна

$$M = (a + b + c) \cdot H,$$

значи

$$\begin{aligned}140m^2 &= (a + b + c) \cdot H = \left(\frac{12}{5}H + \frac{7}{10}H + \frac{5}{2}H\right) \cdot H = \frac{56}{10}H^2 \\ H^2 &= 140 \cdot \frac{10}{56}m^2 = 25m^2.\end{aligned}$$

Значи $H=5m$, од каде се добива дека

$$a = \frac{12}{5}H = 12m \text{ и } b = \frac{7}{10}H = 3,5m.$$

Тогаш, за волуменот на призмата имаме

$$V = B \cdot H = \frac{a \cdot b}{2} \cdot H = \frac{12 \cdot 3,5}{2} \cdot 5 = 105m^3.$$

II година

1. а) За кои вредности на m и n изразот

$$\frac{1}{4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1}$$

има најголема вредност?

б) Нацртај го графикот на функцијата

$$y = (4m + 6n - 2)|x| + 2m + 3n$$

за сите вредности на m и n за кои изразот $\frac{1}{4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1}$ има најголема вредност.

Решение. а) Изразот

$$\frac{1}{4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1}$$

има најголема вредност ако

$$4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1$$

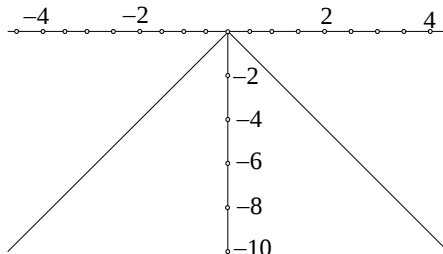
има најмала вредност.

Бидејќи

$$4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1 = (2m + 3n)^2 + 1 \geq 1,$$

најмалата вредност на $4m^2 + 12mn + 9n^2 + 1$ се добива ако $2m + 3n = 0$.

б) Бидејќи $2m + 3n = 0$ добиваме дека функцијата е $y = -2|x|$ а нејзиниот график е прикажан на горниот цртеж.



2А. За комплексниот број $z \neq -3 + 2i$ важи $\left| \frac{z-2+3i}{z+3-2i} \right| = 1$. Докажи дека

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z).$$

Решение. Прв начин. Од $\left| \frac{z-2+3i}{z+3-2i} \right| = 1$, имаме

$$(z - 2 + 3i)(\bar{z} - 2 - 3i) = (z + 3 - 2i)(\bar{z} + 3 + 2i).$$

Последното равенство е еквивалентно со $(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 0$. Бидејќи

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \text{ и } z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z),$$

добиваме $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = 0$, т.е. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

Второ начин. Ако $z = a + bi$ тогаш од условот во задачата добиваме

$$|(a-2) + (b+3)i| = |(a+3) + (b-2)i|,$$

а оттука

$$(a-2)^2 + (b+3)^2 = (a+3)^2 + (b-2)^2.$$

Од последното равенство имаме $10a - 10b = 0$ па $\operatorname{Re}(z) = a = b = \operatorname{Im}(z)$.

2Б. Докажи дека корените на равенката $x^2 - (m^2 + 1)x + m^2 = 0$ се позитивни реални броеви за секој $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

б) За кои вредности на параметарот m , корените x_1 и x_2 на дадената равенката ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$?

Решение. а) Дискриминантата на равенката е

$$D = (m^2 + 1)^2 - 4m^2 = (m^2 - 2m + 1)(m^2 + 2m + 1) = (m-1)^2(m+1)^2 \geq 0.$$

Затоа равенката има реални корени. Корените се $x_1 = m^2$ и $x_2 = 1$ и бидејќи $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ тие се позитивни.

б) Ако $x_1 = m^2$ и $x_2 = 1$ ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$, добиваме $|m| + 1 = 3$ од каде што следува дека $m = \pm 2$.

3А. За $x \neq 1$ и $x \geq 0$, докажи дека вредноста на изразот

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$$

не зависи од x .

Решение. Изразот е дефиниран за $x \geq 0$, $x \neq 1$. За $x \geq 0$, $x \neq 1$ важи

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8} &= \sqrt[3]{(\sqrt{x})^3 - 3(\sqrt{x})^2 \cdot 2 + 3(\sqrt{x}) \cdot 2^2 - 2^3} = \sqrt{x} - 2 \quad \text{и} \\ \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}.\end{aligned}$$

Користејќи и дека $3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$ имаме:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = 1.$$

3Б. Ако m, n, p, a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи

$$m : a = n : b = p : c$$

тогаш

$$\sqrt{ma} + \sqrt{nb} + \sqrt{pc} = \sqrt{(m+n+p)(a+b+c)}.$$

Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt{ma} + \sqrt{nb} + \sqrt{pc} &= \sqrt{\frac{m}{a}} \cdot a + \sqrt{\frac{n}{b}} \cdot b + \sqrt{\frac{p}{c}} \cdot c = \sqrt{\frac{m}{a}} \cdot (a+b+c) \\ &= \sqrt{\frac{m}{a}} \cdot \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{a+b+c} = \sqrt{m + \frac{m}{a}b + \frac{m}{a}c} \cdot \sqrt{a+b+c} \\ &= \sqrt{m + \frac{n}{b}b + \frac{p}{c}c} \cdot \sqrt{a+b+c} = \sqrt{m+n+p} \cdot \sqrt{a+b+c} \\ &= \sqrt{(m+n+p)(a+b+c)}\end{aligned}$$

4. Нека a, b, c се должини на страните на триаголник, при што a е најдолгата.

Докажи дека триаголникот е правоаголен ако и само ако важи

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = \sqrt{2}(a+b+c).$$

Решение. Даденото равенство ќе го quadriраме и го добиваме равенството

$$2(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - c^2}) = (a + b + c)^2. \quad (1)$$

Поради позитивноста на левата и десната страна на равенството двете равенства се еквивалентни. Нека триаголникот е правоаголен. Бидејќи a е најдолгата страна важи $a^2 = b^2 + c^2$. Тогаш

$$\begin{aligned} 2(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - c^2}) &= 2(a + c)(a + b) \\ &= 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

односно важи даденото равенство.

Обратно, нека е исполнето равенството (1) и нека $a^2 > b^2 + c^2$. Тогаш важи

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= 2(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - c^2}) \\ &> 2(a + c)(a + b) = 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \\ &> a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + ac + bc = (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

што не е можно.

Слично, добиваме контрадикција ако претпоставиме дека $a^2 < b^2 + c^2$. Значи важи $a^2 = b^2 + c^2$ па триаголникот е правоаголен.

III година

1. Докажи дека

$$\frac{1}{\log_x a \cdot \log_x a^2} + \frac{1}{\log_x a^2 \cdot \log_x a^3} + \dots + \frac{1}{\log_x a^{n-1} \cdot \log_x a^n} = \frac{n-1}{n} \log_a^2 x.$$

Решение. Од $\log_x a^k = k \log_x a$ следува

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_x a \cdot \log_x a^2} + \frac{1}{\log_x a^2 \cdot \log_x a^3} + \dots + \frac{1}{\log_x a^{n-1} \cdot \log_x a^n} &= \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \log_x^2 a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \log_x^2 a} + \dots + \frac{1}{n(n-1) \log_x^2 a} \\ &= \frac{1}{\log_x^2 a} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{\log_x^2 a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{\log_x^2 a} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\log_x^2 a} = \frac{n-1}{n} \log_a^2 x. \end{aligned}$$

2. Реши ја равенката $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1, \text{ или } (2 \cos x) \cdot (2 \cos 2x) \cdot (2 \cos 4x) \cdot (2 \cos 8x) = 1.$$

Ако последната равенка ја помножиме со $\sin x$, добиваме

$$(2 \cos x \sin x)(2 \cos 2x)(2 \cos 4x)(2 \cos 8x) = \sin x,$$

и ако го искористиме идентитетот $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, добиваме

$$(2 \sin 2x \cos 2x)(2 \cos 4x)(2 \cos 8x) = \sin x,$$

$$(2 \sin 4x \cos 4x)(2 \cos 8x) = \sin x,$$

$$2 \sin 8x \cos 8x = \sin x,$$

$$\sin 16x = \sin x.$$

Ако го искористиме идентитетот $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, за равенката

$$\sin 16x - \sin x = 0, \text{ добиваме } 2 \sin \frac{15x}{2} \cos \frac{17x}{2} = 0. \text{ Равенката } \sin \frac{15x}{2} = 0 \text{ има}$$

решенија $\frac{15x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x = \frac{2k\pi}{15}, k \in \mathbb{Z}$. Равенката $\cos \frac{17x}{2} = 0$ има решенија

$$\frac{17x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } x = \frac{\pi + 2k\pi}{17}, k \in \mathbb{Z}.$$

Решенија на равенката се $x = \frac{2k\pi}{15}, k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi + 2k\pi}{17}, k \in \mathbb{Z}$, каде $k \neq 15s$ и $2k + 1 \neq 17s, s \in \mathbb{Z}$.

3A. Многуаголник, опишан околу кружница со радиус r , е разбиен на произволен начин на триаголници. Докажи дека збирот на радиусите на впишаните кружници во тие триаголници е поголем од r .

Решение. Да ги означиме радиусите на впишаните кружници во триаголниците со $r_1, r_2, \dots, r_n$, периметрите на триаголниците со $L_1, L_2, \dots, L_n$, а нивните плоштини со $P_1, P_2, \dots, P_n$ соодветно. Нека плоштината и периметарот на многуаголникот се означени со P и L соодветно.

За плоштината на секој од триаголниците важи $P_k = r_k s_k$, каде s_k е полузбирот од страните на триаголникот, односно $s_k = \frac{L_k}{2}$. Тогаш $P_k = \frac{r_k L_k}{2}$, од каде $r_k = \frac{2P_k}{L_k}$. Од друга страна периметарот на секој триаголник е помал од периметарот на многуаголникот, односно $L_k < L$ или уште повеќе $\frac{1}{L} < \frac{1}{L_k}$. Сега за збирот на радиусите на впишаните кружници важи

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = \frac{2P_1}{L_1} + \frac{2P_2}{L_2} + \dots + \frac{2P_n}{L_n} > \frac{2}{L} (P_1 + P_2 + \dots + P_n)$$

Да забележиме дека плоштината на многуаголникот претставува збир од плоштините на триаголниците на кои е разбиен, односно $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Уште повеќе, плоштината на многуаголникот се пресметува и како $P = \frac{Lr}{2}$. Тогаш имаме

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n > \frac{2}{L} (P_1 + \dots + P_n) = \frac{2}{L} P = \frac{2}{L} \cdot \frac{Lr}{2} = r.$$

Со тоа покажавме дека навистина $r_1 + r_2 + \dots + r_n > r$.

3Б. Даден е триаголникот ABC со страни $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ и висината спуштена од темето C , $\overline{CD} = h$. Одреди точка M на висината таква што збирот

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$$

е најмал.

Решение. Нека $\overline{MD} = x$. Тогаш $\overline{CM} = h - x$, т.е. $\overline{CM}^2 = (h - x)^2$. Користејќи ја Питагорова теорема можеме да ги изведеме и следниве релации:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + x^2 = b^2 - h^2 + x^2$$

и

$$\overline{BM}^2 = \overline{BD}^2 + x^2 = a^2 - h^2 + x^2.$$

Со замена за збирот добиваме

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = b^2 - h^2 + x^2 + a^2 - h^2 + x^2 + (h - x)^2,$$

односно

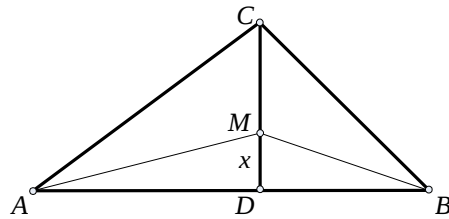
$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2.$$

Јасно, збирот ќе биде минимален во точката во која квадратната функција

$$f(x) = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2$$

достигнува свој минимум, односно во темето на параболата. Темето на параболата е во точката $(\frac{h}{3}, a^2 + b^2 - \frac{4}{3}h^2)$ од каде заклучуваме дека точката M е определена

со растојанието $\overline{MD} = \frac{h}{3}$



4А. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$. Одреди го аголот помеѓу дијагоналите на четириаголникот, ако е познато дека

$$\angle SAB = \angle SBC = 30^\circ \text{ и } \angle SCD = \angle SDA = 45^\circ.$$

Решение. Од синусната теорема применета на секој од триаголниците ACD , ABC и ABD дадени на цртежот, ги добиваме следниве равенства

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\sin(180^\circ - x)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin x}{\sin 45^\circ},$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin(180^\circ - x)} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin x} \text{ и}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(150^\circ - x)}.$$

Со замена во равенството

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

го добиваме равенството

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin(150^\circ - x)} = \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 45^\circ},$$

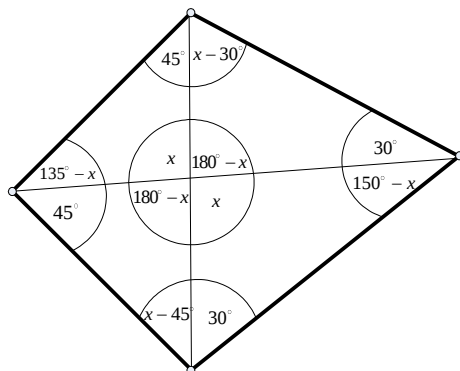
еквивалентно со

$$\sin^2 45^\circ = \sin(150^\circ - x) \sin(x - 30^\circ),$$

односно со равенството

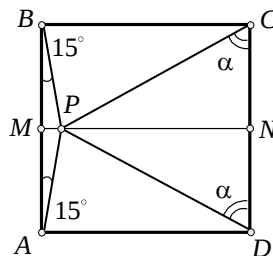
$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos(180^\circ - 2x)).$$

Последната равенка се сведува на $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, чии решенија се $x = 60^\circ$ или $x = 120^\circ$. Значи помалиот агол помеѓу дијагоналите изнесува $x = 60^\circ$.



4Б. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка P така што $\angle PAB = \angle PBA = 15^\circ$. Докажи дека триаголникот PCD е рамнострани.

Решение. Триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа неговото теме P припаѓа на симетралата MN на страните AB и CD на квадратот (цртеж). Според тоа, триаголникот DCP е рамнокрак, $\overline{PC} = \overline{PD}$. Нека $\angle PCD = \angle PDC = \alpha$. Ако должината на страната на триаголникот е a , тогаш $\overline{MP} + \overline{PN} = a$. Од правоаголниот триаголник PMB имаме $\overline{MP} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 15^\circ$, а од правоаголниот триаголник PNC имаме $\overline{PN} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Ако замениме во равенството $\overline{MP} + \overline{PN} = a$, добиваме $\frac{a}{2} \operatorname{tg} 15^\circ + \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = a$, т. е.



$$\operatorname{tg} \alpha = 2 - \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = 2 - \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3}.$$

Јасно е дека $\alpha = 60^\circ$ и триаголникот PCD е рамнострани.

IV година

1А. Дадена е низата со позитивни членови

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{(n-1)^2 a_n + 2a_{n+1}} \quad (1)$$

Докажи дека

$$a_n \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}. \quad (2)$$

Решение. Равенството (1) се доведува во обликот

$$(a_{n+1} - na_n)((2-n)a_n - a_{n+1}) = 0.$$

Неравенството (2) ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

За $n = 1$ неравенството (2) е задоволено. Нека (2) важи за $k \leq n$.

За $k = n + 1$ можни се два случаи:

1) $a_{n+1} = na_n$. Со помош на неравенството на Бернули добиваме

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n^2} \quad n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{т.е.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

што е пак еквивалентно со

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Добиваме дека низата $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ е растечка и за сите $n \geq 2$ важи $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ што е пак еквивалентно со неравенството

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

односно со

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1},$$

од каде поради индуктивната претпоставка следува дека

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \geq na_n \geq a_{n+1}.$$

2) $a_{n+1} = (2-n)a_n$. Во овој случај, за $n \geq 2$ добиваме дека $a_{n+1} \leq 0$ што не е возможно бидејќи низата се состои од позитивни членови ($a_n > 0$). Значи a_{n+1} мора да е од обликот разгледан претходно во случајот 1), за кој веќе го докажавме неравенството (2).

2. Колку рационални членови има во развојот на биномот $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^{100}$?

Решение. Општиот член во развојот на биномот е $T_{k+1} = \binom{100}{k} 3^{\frac{100-k}{2}} 2^{\frac{k}{3}}$,

$k \in \{0, 1, \dots, 100\}$. За да биде членот рационален треба $\frac{100-k}{2}$ и $\frac{k}{3}$ да се цели броеви.

Бидејќи $\frac{100-k}{2}$ е цел број ако 2 е делител на k , а $\frac{k}{3}$ е цел број ако 3 е делител на k добиваме дека k треба да е цел број делив со 6. Значи рационални членови има колку што има цели броеви деливи со 6 од 0 до 100, а нив ги има вкупно $\left[\frac{100}{6}\right] + 1 = 17$.

3. Најди ги сите функции $f: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ за кои

$$f(n+m) + f(n-m) = f(3n), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, n \geq m.$$

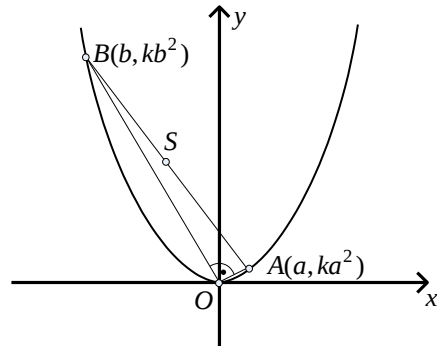
Решение. Ако во равенството ставиме $m=0$, добиваме $2f(n) = f(3n)$, за секој $n \in \mathbb{Z}^+$. За $n=m=0$ добиваме $f(0)=0$. Понатаму, ако ставиме $m=n$, добиваме $f(2n) + f(0) = f(3n)$ односно $f(2n) = f(3n)$. Значи, од една страна, за секое $m \in \mathbb{Z}^+$ важи $f(4m) = f(6m) = f(9m)$, а од друга страна, ако ставиме $n=3m$ во равенството, добиваме $f(4m) + f(2m) = f(9m)$, што е возможно ако и само ако $f(2m)=0$. Следствено, за произволен $n \in \mathbb{Z}^+$ имаме

$$f(n) = \frac{1}{2} f(3n) = \frac{1}{2} f(2n) = 0,$$

односно единствена функција што го задоволува равенството е $f(n)=0$, за секој $n \in \mathbb{Z}^+$.

4А. Докажи дека центрите на опишана кружница околу правоаголен триаголник, чии темиња лежат на дадена парабола, и темето каде што е правиот агол се совпаѓа со темето на параболата, лежат исто така на парабола.

Решение. Нека темињата на правоаголниот триаголник AOB со прав агол кај темето $O(0,0)$ лежат на параболата $y=kx^2$ (јасно $O(0,0)$ е теме на параболата). Тогаш координатите на темето A се (a, ka^2) а на B се (b, kb^2) каде што $a, b \neq 0$. Равенката на правата низ O и A е $y=kax$ а низ O и B е $y=kbx$. Бидејќи OA и OB се заемно нормални прави следува дека $b = -\frac{1}{k^2 a}$. Значи те-



мето B има координати $(-\frac{1}{k^2 a}, \frac{1}{k^3 a^2})$. Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш S е средина на $\overline{AB}$ па има координати

$$S(\frac{1}{2}(a - \frac{1}{k^2 a}), \frac{1}{2}(ka^2 + \frac{1}{k^3 a^2})).$$

Нека $x = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{k^2 a})$, $y = \frac{1}{2}(ka^2 + \frac{1}{k^3 a^2})$. Тогаш

$$y = \frac{1}{2}(ka^2 + \frac{1}{k^3 a^2}) = \frac{1}{2}k((a - \frac{1}{k^2 a})^2 + \frac{2}{k^2}) = \frac{1}{2}k((2x)^2 + \frac{2}{k^2}) = 2kx^2 + \frac{1}{k}.$$

1Б. Нека A е збирот на членовите на една конечна геометричка прогресија (членовите се позитивни) и B е збирот на нивните реципрочни вредности. Најди го производот на членовите на прогресијата.

Решение. Нека членовите на геометричката прогресија се $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ако со q го означиме количникот на прогресијата тогаш

$$P = a_1 a_2 \dots a_n = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

Од друга страна важи

$$a_i a_{n+1-i} = a_1 q^{i-1} a_1 q^{n-i} = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1 a_n,$$

за секој $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогаш

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 a_n}{a_n} + \frac{a_2 a_{n-1}}{a_{n-1}} + \dots + \frac{a_n a_1}{a_1} = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_1} \right) = a_1 a_n B$$

Значи $a_1 a_n = \frac{A}{B}$, а оттука $P = \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{n}{2}}$.

4Б. На река широка $30m$ треба да се изгради параболичен мост со столбови на растојание $5m$. Висината на средниот столб е $7,5m$.

Колкави се висините на другите столбови?

Решение. Мостот го поставуваме во координатен систем како на цртежот. Тогаш равенката на параболата

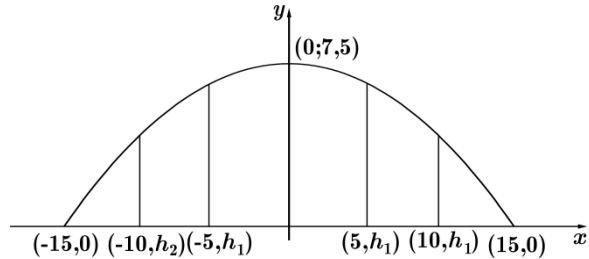
е $y = ax^2 + b$ а бидејќи таа

минува низ точките $(0; 7,5)$ и

$(15, 0)$ добиваме $b = 7,5$ и

$a = -\frac{1}{30}$. Висините на други-

те столбови се



$$h_1 = -\frac{1}{30} 5^2 + 7,5 = \frac{20}{3} \text{ и } h_2 = -\frac{1}{30} 10^2 + 7,5 = \frac{25}{6}.$$