OSJEČKI MATEMATIČKI LIST 15 (2015), 51-59

Jedna zanimljiva primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

Šefket Arslanagić*

Sažetak

U radu su dani dokazi niza zanimljivih nejednakosti. Dokazi su provedeni korištenjem poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih realnih brojeva.

Ključne riječi: *aritmetička sredina, geometrijska sredina, primjena*

An interesting application of the geometric-arithmetic means inequality

Abstract

This article presents proofs of some interesting inequalities. The proofs are performed by means of the geometric-arithmetic means inequality.

Keywords: *arithmetic mean, geometric mean, inequality*

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Sarajevo, BiH, asefket@pmf.unsa.ba

1 Primjena nejednakosti

Dokazivanje nejednakosti u matematici predstavlja izuzetno zanimljiv i važan čin za buduće mlade (nadarene) matematičare i nastavnike koji rade s njima. Nejednakosti između brojnih sredina su temelj u tom poslu, osobito nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine koja glasi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \quad a_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (ubuduće ćemo ovu nejednakost označavati kao AmGm nejednakost). Recimo i to da se u odgovarajućoj matematičkoj literaturi o nejednakostima nalazi veliki broj raznih dokaza ove nejednakosti, npr. u [1] se nalaze tri razna dokaza.

U ovom radu ćemo pokazati kako se razne algebarske nejednakosti mogu uspješno dokazati primjenom nejednakosti (1) za $n = 2$ ili $n = 3$ ukoliko se stvore odgovarajući uvjeti za tu primjenu. To ćemo demonstrirati na više primjera.

Primjer 1. Dokazati da za $a, b, c > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \tag{2}$$

Rješenje. Direktnom primjenom AmGm nejednakosti (1) za $n = 3$ imamo:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^2}{a}}$$
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Ali iz (1) slijedi $3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c$, pa ovakav dokaz ne dolazi u obzir. Što sada? Primjenom AmGm nejednakosti (1) za $n = 2$ dobivamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right) \geq \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b}$$
$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a \tag{3}$$

te analogno

$$\frac{b^2}{c} + c \geq 2b \tag{4}$$
$$\frac{c^2}{a} + a \geq 2c \tag{5}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (3), (4) i (5), dobivamo nejednakost (2). Dokaz smo proveli zahvaljujući nejednakosti AmGm za $n = 3$ i $n = 2$. Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. ◀

Napomena 1.1. U [2] se može naći i jedan kraći dokaz ove nejednakosti bez korištenja nejednakosti AmGm (1).

Primjer 2. Dokazati da za $a, b, c > 0$ vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \tag{6}$$

Rješenje. Ne bi se puno usrećili ako bismo koristili AmGm nejednakost (1) za $n = 3$:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \sqrt[3]{a^4 b^4 c^4}$$
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 3abc\sqrt[3]{abc}.$$

Nakon dijeljenja dane nejednakosti (6) sa $abc > 0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \tag{7}$$

Sada ćemo dokazati nejednakost (7). Koristeći nejednakost (1) za $n = 3$, dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{bc} + b + c\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c}$$
$$\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3a \tag{8}$$

te analogno

$$\frac{b^3}{ac} + a + c \geq 3b \tag{9}$$
$$\frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3c \tag{10}$$

gdje nakon zbrajanja nejednakosti (8), (9) i (10) slijedi

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c \tag{11}$$

Kako zbog AmGm nejednakosti (1) za $n = 2$, slijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

te analogno,

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$
$$c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

odakle nakon zbrajanja posljednje tri nejednakosti dobivamo

$$a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \tag{12}$$

Sada iz nejednakosti (11) i (12) slijedi nejednakost (7), odnosno (6). Jednakost u (6) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. ◀

Sada ćemo prijeći na dokaze nešto složenijih nejednakosti pomoću AmGm nejednakosti (1) za $n = 2$ i $n = 3$.

Primjer 3. Dokazati da za $a, b, c, d \geq 0$, od kojih je suma svaka dva broja različita od nule, takve da je $a + b + c + d = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2} \tag{13}$$

Rješenje. Na osnovu nejednakosti (1) za $n = 2$, dobivamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4}\right) \geq \sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}}$$
$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq a$$

te analogno,

$$\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq b$$
$$\frac{c^2}{c+d} + \frac{c+d}{4} \geq c$$
$$\frac{d^2}{d+a} + \frac{d+a}{4} \geq d$$

Nakon zbrajanja posljednje četiri nejednakosti, imamo:

$$\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} + \frac{1}{2}(a+b+c+d) \geq a+b+c+d$$

a odavde, zbog $a+b+c+d=1$, slijedi

$$\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d=\frac{1}{4}$. ◀

Primjer 4. Dokazati da za $a,b,c,d \geq 0$ (tri od ovih veličina nisu istovremeno jednake nuli) takve da je $ab+bc+cd+da=1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3} \tag{14}$$

Rješenje. Napišimo da je

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{b+c+d} = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{b+a+d} + \frac{d^3}{b+c+a}$$

Koristeći AмGм nejednakost (1) za $n=3$, dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c+d} \cdot \frac{b+c+d}{18} \cdot \frac{1}{12}}$$

odakle slijedi

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12} \geq \frac{a}{2}$$

i analogno

$$\frac{b^3}{a+c+d} + \frac{a+c+d}{18} + \frac{1}{12} \geq \frac{b}{2}$$
$$\frac{c^3}{b+a+d} + \frac{b+a+d}{18} + \frac{1}{12} \geq \frac{c}{2}$$
$$\frac{d^3}{b+c+a} + \frac{b+c+a}{18} + \frac{1}{12} \geq \frac{d}{2}.$$

Nakon zbrajanja četiri posljednje nejednakosti, dobivamo

$$\sum_{\text{ciklično}} \Big(\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12}\Big) \geq \frac{a+b+c+d}{2}$$

što dalje daje

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3}(a+b+c+d-1). \tag{15}$$

Primjenjujući AmGm nejednakosti (1) za $n=2$ dobivamo

$$\frac{a+c+b+d}{2} \geq \sqrt{(a+c)(b+d)}$$

što je ekvivalentno nejednakosti $(a+b+c+d)^2 \geq 4(ab+bc+cd+da)$ odnosno zbog danog uvjeta $ab+bc+cd+da=1$ imamo

$$a+b+c+d \geq 2 \tag{16}$$

Sada iz nejednakosti (15) i (16) dobivamo nejednakost (14). Jednakost u (14) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d=\frac{1}{2}$. ◀

Primjer 5. Dokazati da za $a,b,c>0$ takve da je $a+b+c=2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} > 2 \tag{17}$$

Rješenje. Koristeći AmGm nejednakost (1) za $n=3$ imamo:

$$\frac{a}{b(a+b)} + (a+b)a + ab \geq 3a \tag{18}$$

$$\frac{b}{c(b+c)} + (b+c)b + cb \geq 3b \tag{19}$$

$$\frac{c}{a(a+c)} + (a+c)c + ac \geq 3c \tag{20}$$

a odavde nakon zbrajanja nejednakosti (18), (19) i (20):

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} \geq 3(a+b+c) - (a+b+c)^2$$

odnosno zbog uvjeta $a+b+c=2$:

$$\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(a+c)}\geq 2.$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer npr. u nejednakosti (18) vrijedi jednakost ako je

$$(a+b)a=ab\left(=\frac{a}{b(a+b)}\right)\Rightarrow a=0$$

što ne može biti zbog uvjeta da su $a,b,c>0$.

Primjer 6. Dokazati da za $a,b,c>0$ takve da je $abc=1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}\tag{21}$$

Rješenje. Na osnovu AmGm nejednakosti (1) za $n=3$, imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}&\geq\frac{3a}{4},\\
\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+c}{8}&\geq\frac{3b}{4},\\
\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}&\geq\frac{3c}{4},
\end{aligned}$$

a odavde nakon zbrajanja gornjih nejednakosti

$$\sum_{\text{ciklično}}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{3+a+b+c}{4}\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

odnosno,

$$\sum_{\text{ciklično}}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}\tag{22}$$

Kako je na osnovu AmGm nejednakosti za $n=2$ i danog uvjeta $abc=1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},\text{ tj.}\\
&a+b+c\geq 3
\end{aligned}\tag{23}$$

to dobivamo iz nejednakosti (22) i (23):

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{4}.$$

Vrijedi jednakost u (21) ako i samo ako je $a = b = c = 1$. ◀

Primjer 7. Dokazati da za $a, b \geq 0$ tako da je $a + b = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \geq \frac{1}{3} \tag{24}$$

Rješenje. Na osnovu AmGm nejednakosti za $n = 2$, imamo:

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b+1}{9} \geq \frac{2a}{3}$$
$$\frac{b^2}{a+1} + \frac{a+1}{9} \geq \frac{2b}{3}$$

gdje nakon zbrajanja gornjih nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} + \frac{a+b+2}{9} \geq \frac{2}{3}(a+b)$$

Odnosno, zbog uvjeta $a + b = 1$, slijedi

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} + \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}, \text{tj.}$$
$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq \frac{1}{3}$$

Vrijedi jednakost u (24) ako i samo ako je $a = b = \frac{1}{2}$.

2 Zaključak

Sve dokazane nejednakosti se mogu dokazati i na neki drugi način. Preporučio bih budućim čitateljima ovog rada da pokušaju provesti te dokaze. No, siguran sam da će ti dokazi biti teži i složeniji nego dokazi navedeni u ovom radu. Ovim želim istaknuti značenje navedene metode pomoću nejednakosti koju smo koristili u ovom radu.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Z. Cvetkovski, *Inequalities – Theorems Techniques and Selected Problems*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 2012.