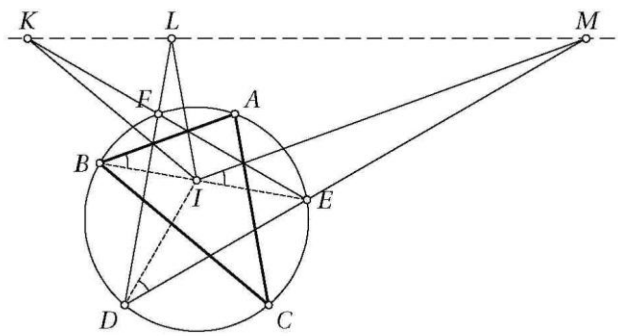
БМО 2015

1. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека
$$a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3).$$
Решение. Со смената $x=ab^2$, $y=bc^2$ и $z=ca^2$ бараното неравенство се сведува на неравенството на Шур
$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x.$$

2. Даден е разностран триаголник ABC, со опишана околу него кружница ω со центар I. Правите AI, BI и CI ја сечат соодветно ω во точките D, E и F, различни од A, B и C. Правите низ точката I паралелни со правите BC, CA и AB соодветно ги сечат правите EF, FD и DE во точките K, L и M. Докажи, дека точките K, L и M се колинеарни.
Решение. *Прв начин*. Ако го разгледаме распоредот $D-E-M$ забележуваме дека $\measuredangle EIM=\measuredangle EBA=\measuredangle EDI$, па затоа правата IM е тангента на кружницата DEI и $\overline{MI}^2=\overline{MD}\cdot\overline{ME}$. Тоа значи дека точката M припаѓа на радикалната оска s на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и дегенираната кружница $(I,0)$. Аналогно и точките K и L припаѓаат на s, т.е. точките K, L и M се колинеарни



Втор начин. Од теоремата на Дезарг следува дека точките $K'=BC\cap EF$, $L'=CA\cap FD$ и $M'=AB\cap DE$ се колинеарни. Последното запишано со ориентирани отсечки значи дека
$$\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{K'F}}\cdot\frac{\overrightarrow{FL'}}{\overrightarrow{L'D}}\cdot\frac{\overrightarrow{DM'}}{\overrightarrow{M'E}}=-1.$$
Но,
$$\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{K'F}}=\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}}\cdot\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{EK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KF}}{\overrightarrow{K'F}}=\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{IE}}\cdot\frac{\overrightarrow{IF}}{\overrightarrow{CF}},$$
со замена на оваа и аналогните релации добиваме
$$\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{LD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{ME}}=-1,$$

па од теоремата на Менелај заклучуваме дека точките K, L и M се колинеарни.

Забелешка. Во ниту едно од понудените два начини на решавање не се користи дека I е центар на впишаната кружница, што значи дека задачата е предефинирана.

3. Комисија составена од 3366 филмски критичари гласа за Оскар. Секој критичар гласа за еден глумец и една глумица. По гласањето се констатирало дека за секој природен број n помал или еднаков на 100 постои глумец или глумица кој добил/ла точно n гласови. Докажи, дека постојат двајца критичари кои гласале за ист глумец или глумица.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. За секој $i = 1, 2, ..., 100$ да фиксираме еден кандидат A_i кој добил i гласови.

Бројот на критичарите кои двата пати гласале за некој од кандидатите од множеството од множеството $A = \{A_{34}, A_{35}, ..., A_{100}\}$ е помал или еднаков на бројот парови глумец-глумица меѓу овие кандидати, а овој број е помал или еднаков на $33 \cdot 34 = 1122$.

Од друга страна, вкупно има $2 \cdot 3366 = 6732$ гласови кои критичарите ги доделиле. Од овие гласови кандидатите од множеството A добиле

$$34 + 35 + ... + 100 = 4489$$

гласови. Затоа има најмногу $6732 - 4489 = 2243$ критичари кои двата пати не гласале за кандидатите од множеството A.

Според тоа, вкупниот број критичари е помал или еднаков на

$$1122 + 2243 = 3365,$$

што е противречност.

4. Докажи, дека меѓу произволни 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \tfrac{5}{2}$$

важи за секој природен број n. (Со $\{x\}$ е означена функцијата дробен дел од x.)

Решение. Бидејќи за $m = [n\sqrt{d}]$ важи

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} = n\sqrt{d}(n\sqrt{d} - m) = n\sqrt{d}\,\tfrac{dn^2 - m^2}{n\sqrt{d} + m}$$
$$> n\sqrt{d}\,\tfrac{dn^2 - m^2}{2n\sqrt{d}} = \tfrac{dn^2 - m^2}{2},$$

доволно е да се избере d таков што за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи $dn^2 - m^2 \notin \{1, 2, 3, 4\}$, (од горното неравенство е јасно дека $dn^2 - m^2 > 0$). Последното може да се постигне ако земеме

$$d = 20k + 15 = 5(4k + 3)\text{, за } k \in \mathbb{N}_0 .$$

Навистина, тогаш $m^2 + 2$ и $m \ + 3$ не се деливи со 5, додека $m^2 + 1$ и $m^2 + 4$ немаат делители од облик $4k + 3$, па затоа ниту еден од броевите $m^2 + 1$, $m^2 + 2$, $m^2 + 3$ и $m^2 + 4$ не може да е делив со d .