Сојузен натпревар 1977

I година

1. Определи ги целобројните решенија на равенката $p(x+y)=xy$, каде p е даден прост број.

Решение. Да забележиме дека парот $(0,0)$ решение на задачата и дека парот (x,y) во кој точно еден од броевите е еднаков на 0 не е решение на задачата. Нека $p(x+y)=xy\neq 0$. Тогаш $p\,|\,xy$, па како p е прост број, важи $p\,|\,x$ или $p\,|\,y$. Нека, на пример, $x=mp$, каде m е цел број и $m\neq 0$. Лесно се гледа дека тогаш не може да е $m=1$. Понатаму, $p(mp+y)=mpy$, па затоа $y=\frac{mp}{m-1}$.

1) Ако $m-1=1$, тогаш $x=2p, y=2p$ е решение на дадената равенка.

2) Ако $m-1=-1$, тогаш $m=0$, што противречи на претпоставката.

3) Ако $m-1=p$, тогаш $x=p(p+1), y=p+1$ е решение на дадената равенка.

4) Ако $m-1=-p$, тогаш $x=p(1-p), y=p-1$ е решение на дадената равенка.

5) Ако $m-1\notin\{-1,1,-p,p\}$, тогаш $y=\frac{mp}{m-1}$ не е цел број.

Аналогно се разгледува случајот кога y е делив со p и во тој случај добиваме уште две решенија $x=p+1, y=p(p+1)$ и $x=p-1, y=p(1-p)$.

2. Нека a,b,c се природни броеви и $a^2+b^2=c^2$. Докажи дека бројот abc е делив со 60.

Решение. Бидејќи $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, доволно е да се докаже дека барем еден од броевите a,b,c е делив со 4 или два се деливи со 2, дека барем еден е делив со 3 и барем еден е делив со 5.

а) Да забележиме дека броевите a и b не може и двата да се непарни, бидејќи во тој случај ќе важи $a^2+b^2\equiv 2(\text{mod}\,4)$ и како квадрат на цел број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, добиваме дека a^2+b^2 не може да биде еднаков на квадрат на цел број c. Ако двата броја a и b се парни, тогаш $4\,|\,abc$. Ако точно еден од броевите a и b е парен, тогаш c е непарен број. Нека, на пример, $a=2k$, $b=2n+1, c=2m+1$. Тогаш од $a^2+b^2=c^2$ следува $k^2=m(m+1)-n(n+1)$, па како $2\,|\,m(m+1)-n(n+1)$, добиваме $2\,|\,k^2$, т.е. $2\,|\,k$. Но, $a=2k$, па затоа $4\,|\,abc$.

б) Квадрат на цел број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Ако ниту еден од броевите a и b не е делив со 3, тогаш

$$a^2+b^2\equiv 2(\text{mod}\,3) \text{ и } c^2\equiv 0 \text{ или } 1(\text{mod}\,3),$$

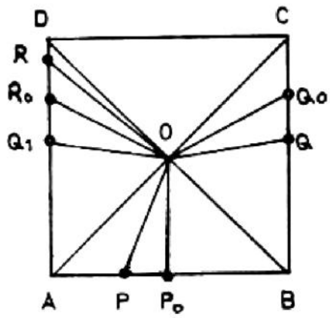
што противречи на $a^2+b^2=c^2$. Значи, барем еден од броевите a и b е делив со 3.

в) Квадрат на цел број при делење со 5 дава остаток 0, 1 или 4. Ако ниту еден од броевите a,b,c не е делив со 5, тогаш

$$a^2+b^2 \equiv 0,2 \text{ или } 3 \pmod 5 \text{ и } c^2 \equiv 1 \text{ или } 4 \pmod 5,$$

што противречи на $a^2+b^2=c^2$. Значи, барем еден од броевите a,b,c е делив со 5.

3. На страните на квадратот $ABCD$ се наоѓаат точките P,Q и R кои неговиот периметар го делат на три еднакви дела. Нека O е центарот на квадратот. Докажи дека збирот $PO+QO+RO$ е најмал можен ако една од точките P,Q и R е средина на страната на која се наоѓа.



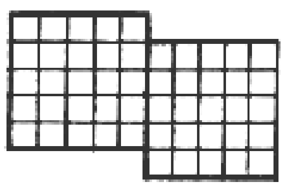
Решение. Нека точките P,Q,R го делат периметарот на квадратот $ABCD$ на три еднакви дела. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека ниру една од точките P,Q,R не е внатрешна точка на отсечката CD и дека на пример, $P \in AP_0$, $Q \in BC$ и $R \in AD$, каде P_0 е средина на отсечката AB. Понатаму, нека $Q_0 \in BC$ и $R_0 \in AD$ се точки кои заедно со точката P_0 го делат периметарот на квадратот три еднакви дела, а Q_1 е точка симетрична на точката Q во однос на правата OP_0, види цртеж. Тогаш

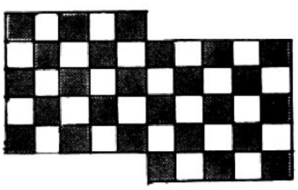
$$PP_0 = QQ_0 = RR_0,\ OQ = OQ_1,\ Q_1R_0 = QQ_0 = RR_0,\ OP_0 \leq OP \text{ и } 2OR_0 \leq OR + OQ_1,$$

бидејќи OR_0 е тежишна линија на триаголникот ORQ_1, при што запишаните неравенства се строги ако $P \neq P_0$. Значи, за $P \neq P_0$ добиваме

$$OP_0 + OQ_0 + OR_0 = OP_0 + 2OR_0 < OP + OR + OQ_1 = OP + OQ + OR.$$

4. Дали две табли 5×5 залепени една до до друга како на цртежот десно може да се покријат со домина 2×1 (едно домино покрива две соседни полиња)?





Решение. Да ја обоиме фигурата шаховски како што е прикажано на цртежот лево. Тогаш вкупно имаме 50 полиња, од кои 26 се црни и 24 се бели. Секое домино покрива едно црно и едно бело поле, па затоа со 25 домина не може да се покрие дадената фигура.

II година

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x=\sqrt{x-\tfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\tfrac{1}{x}}\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со системот

$$(x-\sqrt{x-\tfrac{1}{x}})^2=x-\tfrac{1}{x},\;\; x\geq 1,$$

односно со ситемот

$$x^2-x-1=0,\;\; x\geq 1.$$

Единствено решение на последниот систем е $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. На страните AB, BC и CA на триаголникот ABC дадени се точки P, Q и R такви што

$$AP=\lambda AB,\, BQ=\lambda BC,\, CR=\lambda CA,\, (\tfrac{1}{2}\leq\lambda\leq 1)\,.$$

Докажи дека периметарот на триаголникот PQR не е поголем од периметарот на триаголникот ABC помножен со бројот λ.

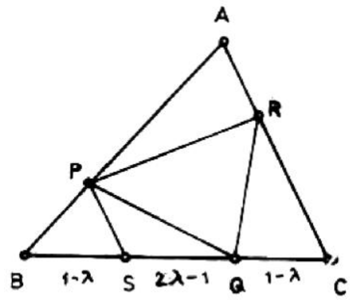
Решение. Нека S е пресекот на правата BC со правата која минува низ точката P и е паралелна со правата AC, цртеж десно. Тогаш

$$BS=(1-\lambda)BC,\;\; PS=(1-\lambda)AC\,.$$

Бидејќи $\frac{1}{2}\leq\lambda<1$, точката S припаѓа на отсечката BQ, па затоа

$$SQ=BQ-BS=\lambda BC-(1-\lambda)BC=(2\lambda-1)BC\,,$$

$$PQ\leq PS+SQ=(1-\lambda)AC+(2\lambda-1)BC\,.$$



Аналогно добиваме

$$QR\leq(1-\lambda)AB+(2\lambda-1)AC,\quad RP\leq(1-\lambda)BC+(2\lambda-1)AB\,,$$

па лесно се добива дека

$$PQ+QR+RP\leq\lambda(AB+BC+CA)\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $S=Q$ или $S=B$. Овој услов е еквивалентен со $2\lambda-1=0$ или $\lambda=1$, т.е. $\lambda\in\{\frac{1}{2},1\}$.

3. Дадени се 20 природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{20}$ такви што

$$a_1<a_2<...<a_{20}<70\,.$$

Докажи дека меѓу разликите a_j-a_k, $j>k$ постојат барем четири меѓусебно еднакви.

Решение. Ќе докажеме дека меѓу броевите $a_{20}-a_{19}, a_{19}-a_{18}, ..., a_3-a_2, a_2-a_1$ има барем четири еднакви меѓу себе. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека меѓу нив има најмногу три броја кои се еднакви меѓу себе. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{20} &= (a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+...(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1 \\ &\geq 1+3(1+2+3+4+5+6)+7=71, \end{aligned}$$

што противречи на претпоставката $a_{20}<70$.

4. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи неравенството

$$\sqrt{n} < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2} < \sqrt{2n}. \qquad (1)$$

Решение. Нека означиме $P_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2}$. Бидејќи за $k>1$ важи

$$\frac{2k-1}{2k-2} > \sqrt{\frac{k}{k-1}}$$

добиваме

$$P_n > \sqrt{\frac{2}{1}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot...\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{n}$$

т.е. точно е левото неравенство во (1).

Означуваме, $Q_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}$. Од

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1},$$

за секој $k\in\mathbb{N}$ следува

$$Q_n < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{P_n}\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\frac{1}{Q_n} < \frac{1}{2nQ_n}$$

што значи $Q_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Конечно,

$$P_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot 2n = 2nQ_n < \sqrt{2n}$$

со што го докажавме и десното неравенство.

III година

1. Нека k е природен број и $a_1, a_2, ..., a_{2k}$ се позитивни броеви помали од 1. Докажи го неравенството

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2}+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2} \geq k\sqrt{2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина непосредно следува

$$\begin{aligned} &\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2}+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{2}\left(\frac{a_1+1-a_2}{2}+\frac{a_2+1-a_3}{2}+...+\frac{a_{2k}+1-a_1}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\frac{2k}{2} = k\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a_1 = a_3 = \ldots = x,\ a_2 = a_4 = \ldots = y \text{ и } x + y = 1.$$

2. Определи го природниот број чиј квадрат е еднаков на петтиот степен на збирот на неговите цифри (во декаден запис).

Решение. Нека бројот n во декаден запис има k цифри и нека S е збирот на цифрите на бројот n. Тогаш $9^{k-1} < 10^{k-1} \le n$ и $S \le 9k$. Нека $n^2 = S^5$. Тогаш $(9^{k-1})^2 < (9k)^5$, т.е. $9^{2k-7} < k^5$. Лесно се проверува дека последното неравенство важи за $k \in \{1,2,3,4,5\}$. Со индукција ќе докажеме дека за $k \ge 6$ важи $9^{2k-7} \ge k^5$. За $k = 6$ имаме

$$9^{2\cdot 6-7} = 59049 > 776 \ge 6^5.$$

Нека претпоставиме дека за некој $k \ge 6$ важи $9^{2k-7} \ge k^5$. Тогаш

$$9^{2(k+1)-7} = 81\cdot 9^{2k-7} \ge 81k^5 > (2k)^5 > (k+1)^5,$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$.

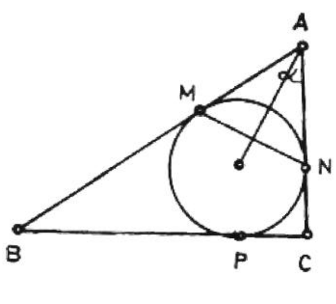
Од претходно изнесеното следува дека $k \le 5$ и $S \le 45$. Од условот $n^2 = S^5$ следува $n = S^2\sqrt{S}$, па затоа S е точен квадрат. Според тоа, $S \in \{1,4,9,16,25,36\}$. Понатаму проверуваме:

$$\begin{array}{lll}
S = 1, & n = S^2\sqrt{S} = 1, & 1 = 1,\\
S = 4, & n = 32, & 3+2 \ne 4,\\
S = 9, & n = 243, & 2+4+3 = 9,\\
S = 16, & n = 1024, & 1+0+2+4 \ne 16,\\
S = 25, & n = 3125, & 3+1+2+5 \ne 25,\\
S = 36, & n = 46656, & 4+6+6+5+6 \ne 36.
\end{array}$$

Според тоа, бараните броеви се 1 и 243.

3. Кружницата впишана во правоаголен триаголник со хипотенуза c ги допира краците на остриот агол во точките M и N. Докажи дека $MN \le \frac{2c\sqrt{3}}{9}$.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза $AB = c$. Со M и N да ги означиме допирните точки на впишаната кружница соодветно со отсечките AB и AC, и $\alpha = \measuredangle BAC$, цртеж десно. Тогаш



$$\begin{aligned} AM &= \tfrac{AB+AC-BC}{2}\\ &= \tfrac{c}{2}(1+\cos\alpha - \sin\alpha). \end{aligned}$$

Бидејќи симетралата на аголот α истовремено е и симетрала на отсечката MN, добиваме

$$\begin{aligned}MN &= 2AM\sin\tfrac{\alpha}{2} = c\sin\tfrac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &= c\sin\tfrac{\alpha}{2}(2\cos^2\tfrac{\alpha}{2}-2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2})\\ &= c\sin\alpha(\cos\tfrac{\alpha}{2}-\sin\tfrac{\alpha}{2})\\ &= c\sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)}\\ &= \tfrac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\alpha\sin\alpha(2-2\sin\alpha)}\\ &\le \tfrac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{(\tfrac{\sin\alpha+\sin\alpha+2-2\sin\alpha}{3})^3}\\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{9}c,\end{aligned}$$

при што го искористивме неравенството меѓу аритметичката и геометсикста средина.

4. Нека D е множеството дијагонали на правилен 100-аголник. Дали постои подмножество E на множеството D со следниве својства:

1) Никои две дијагонали од E немаат заедничка внатрешна точка.

2) Од секое теме на 100-аголникот излегува парен број дијагонали од множеството E.

3) Дијагоналите од E го делат 100-аголникот на триаголници.

Решение. Нека претпоставиме постои подмножество E на множеството D такво што дека $n-$аголникот е поделен со дијагоналите од E на триаголници, така што никои две дијагонали од E немаат заедничка внатрешна точка и од секое теме на $n-$аголникот излегува парен број дијагонали. Тогаш добиените триаголници може да се обојат во сина и црвена боја така што секои два триаголника кои имаат заедничка страна се обоени во различна боја. (Тоа може да се постигне ако на почетокот многуаголникот се обои во една боја, а потоа се конструираат дијагоналите една по друга и по секое конструирање на дијагонала сите обоени површини на едната страна од таа дијагонала се пребојуваат во друга боја.) За вака обоените триаголници важи:

а) Секоја дијагонала е страна на еден син и еден црвен триаголник.

б) Сите триаголници кај кои една страна е истовремено и страна на $n-$аголникот се обоени со иста боја, да кажеме сина. (Ова следува од фактот дека од секое теме на $n-$аголникот излегуваат парен број дијагонали од E, т.е. секое теме на $n-$аголникот е заедничко теме на непарен број триаголници на кои $n-$аголникот е поделен.)

Ако p е бројот на сините, а c на црвените триаголници, тогаш $n+3c=3p$, бидејќи секоја дијагонала од E е страна на еден син и еден црвен триаголник, а секоја страна на $n-$аголникот е страна на само еден син триаголник. Според тоа, бројот n е делив со 3, што значи дека 100-аголник не може да биде поделен така што ќе бидат исполнети дадените услови.

IV година

1. Нека $n\geq 2$ и $a_j = n!+j$, за $j\in\{1,2,...,n\}$. Докажи дека за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ постои барем еден прост број p таков што бројот a_k е делив со p, а ниту еден од броевите $a_1,a_2,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n$ не е делив со p.

Решение. Прво да забележиме: Ако $p\geq n$ е прост број, тогаш најмногу еден од броевите $a_1,a_2,...,a_n$ е делив со p. Навистина, ако $p\,|\,a_i$ и $p\,|\,a_j$, $1\leq i<j\leq n$, тогаш $p\,|\,a_j-a_i=j-i$, при што $1\leq j-i\leq n-1$, што не е можно. Ќе ги разгледаме следниве случаи.

а) k е прост број и $2k\leq n$. Тогаш бројот $n!$ е делив со k^2, а бројот $\frac{n!}{k}$ е делив со секој прост број кој не е поголем од n. Затоа бројот $\frac{n!}{k}+1$ нема прости делители помали или еднакви на n (во спротивно бројот 1 би бил делив со таков прост делител). Според тоа, бројот $a_k=k(\frac{n!}{k}+1)$ има прост делител p кој е поголем од p. Ниту еден од броевите $a_j,\ j\neq k$ не е делив со p.

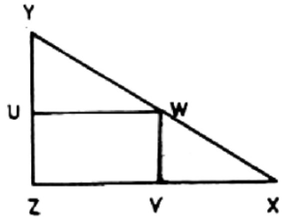
б) k е прост број и $k\leq n<2k$. Тогаш $k\,|\,a_k$ и ниту еден од броевите j (па со тоа и ниту еден од броевите a_j) каде $j\in\{1,2,...,n\}\setminus\{k\}$ не е делив со k.

в) k е сложен број и $k\neq 4$. Ако $k=ab$, каде a и b се природни броеви и $1<a<b$, тогаш во производот $n!$ се појавуваат броевите a,b и k. Ако $k=a^2$, каде $a\geq 3$, тогаш во производот $n!$ се појавуваат броевите $a,2a$ и k. Во секој случај бројот $\frac{n!}{k}$ е делив со k, па како под а) добиваме дека a_k има прост делител поголем од n.

г) $k=4$. Ако $n\geq 6$, тогаш бројот $\frac{n!}{4}$ е делив со 4, па аналогно како во случаите а) и в) следува дека бројот a_k има прост делител поголем од n. За $n=4$ бројот $a_4=4!+4=28$ е делив со $p=7>4$, а за $n=5$ бројот $a_4=5!+4=124$ е делив со простиот број $p=31>5$.

2. Докажи дека плоштината на квадратот кој исцело лежи внатре во даден триаголник не е поголема од половината на плоштината на триаголникот.

Решение. Ќе го докажеме следново помошно тврдење: Нека XYZ е правоаголен триаголник со хипотенуза XY, W е произвона точка на отсечката XY и U и V се подножјата на нормалите повлечени од W соодветно на YZ и ZX, цртеж десно. Ако плоштината на триаголникот XYZ е p_0, а плоштината на пра-

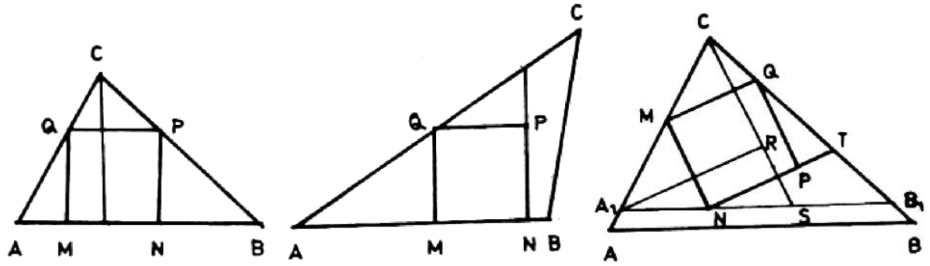


воаголникот $UZVW$ е p_1, тогаш $p_1 \le \frac{p_0}{2}$.

Доказ. Нека $YW = kXY$ и $XW = (1-k)XY$, каде $0 < k < 1$. Тогаш

$$p_0 - p_1 = P_{UWY} + P_{XWV} = k^2 p_0 + (1-k)^2 p_0 = (2k^2 - 2k + 1) p_0$$
$$= 2(k - \tfrac{1}{2})^2 p_0 + \tfrac{p_0}{2} \ge \tfrac{p_0}{2},$$

од каде добиваме $p_1 \le \frac{p_0}{2}$. ■



а) б) в)

Нека квадратот $MNPQ$ се наоѓа внатре во триаголникот ABC (цртежи а), б) и в)). На читателот му препуштаме да докаже дека триаголникот ABC може да се подели на неколку правоаголни триаголници (и евентуално на уште неколку триаголници и четириаголници) така што секој правоаголен триаголник содржи правоаголник исечен од квадратот $MNPQ$, при што едно теме на таквиот правоаголник се поклопува со темето на правиот агол на триаголникот и потоа да го примени претходно докажаното помошно тврдење.

3. На колку начини бројот $6k$ $(k \in \mathbb{N})$ може да се запише како збир на три природни броја? Записите кои се разликуваат само во редоследот на собирците ги сметаме за исти.

Решение. Нека $6k = x_1 + x_2 + x_3$, каде x_1, x_2, x_3 се природни броеви такви што $x_1 \le x_2 \le x_3$. Ако $x_1 = 2l - 1$, каде $1 \le l \le k$, тогаш x_2 може да биде еднаков на еден од броевите

$$2l-1, 2l, 2l+1, ..., [\tfrac{6k-2l+1}{2}] = 3k - l$$

и за секоја од овие $3k - 3l + 2$ можности бројот x_3 е еднаков на $6k - x_1 - x_2$. Ако $x_1 = 2l$, каде $1 \le l \le k$, тогаш x_2 е еднаков на некој од броевите

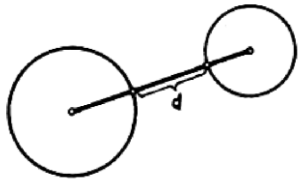
$$2l, 2l+1, ..., 3k - l$$

и за секоја од овие можности бројот x_3 еднозначно се определува. Затоа бараниот број е еднаков на

$$\sum_{l=1}^{k}(3k-3l+2)+\sum_{l=1}^{k}(3k-3l+1)=\sum_{l=1}^{k}(6k-6l+3)=k(6k+3)-6\frac{k(k+1)}{2}=3k^2.$$

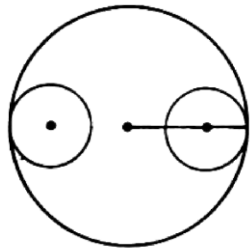
4. Во рамнината е дадено множество S од 100 точки. Докажи дека постои конечно множество кругови за кои важи:

1) Секоја точка од S се содржи во внатрешноста на некој круг.



2) Круговите се дисјунктни и растојанието меѓу секои два круга е строго поголемо од 1. (Растојанието d меѓу два дисјунктни круга k_1 и k_2 е прикажано на цртежот десно.)

3) Збирот на дијаметрите на тие кругови и строго помал од 100.



Решение. Нека S_{100} е множеството кое ги содржи круговите со центри во дадените точки и радиус $r=\frac{1}{201}$. Збирот на дијаметрите на овие кругови е $D_{100}=200r<1$. Ако растојанието меѓу секои два круга од S_{100} е поголемо од 1, тогаш за множеството S_{100} се исполнети условите 1), 2) и 3). Ако меѓу круговите од S_{100} има такви што растојанието меѓу нив не е поголемо од 1, тогаш произволни два такви круга ќе ги замениме со најмалиот круг кој ги содржи (цртеж десно). Добиваме множество S_{99} (составено од 99 кругови), така што внатре во тие кругови се сите дадени точки, а притоа збирот на радиусите на сите тие кругови е $D_{99}\le 200r+1<2$. Ако растојанието меѓу секои два круга од S_{99} е поголемо од 1, тогаш за множеството S_{99} важат сите услови на задачата. Во спротивно два круга од S_{99} чие растојание не е поголемо од 1 ќе ги замениме со најмалиот круг кој ги содржи. Ќе добиеме множество S_{98} и понатаму аналогно ја продолжуваме постапката. На крајот добиваме множество S_n, каде $1\le n\le 100$, такво што тоа содржи n кругови, во внатрешноста на тие кругови се содржат сите дадени точки и збирот на радиусите на сите кругови од S_n е

$$D_n\le 200r+(100-n)\le 200r+99<100.$$

Мала олимпијада

1. Определи го множеството од сите реални броеви α со следново својство: За секој позитивен број c постои дропка $\frac{m}{n}$ ($m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$) различна од α таква што

$$|\alpha-\frac{m}{n}|<\frac{c}{n}.$$

Решение. Ќе докажеме дека бараното множество е еднакво на множеството ирационални броеви.

Нека претпоставиме дека α е ирационален број. Во задачата 1 од Малата олимпијада во 1974 година е докажано дека тогаш за секој позитивен број c постојат (дури бесконечно многу) рационални броеви $\frac{m}{n}$ (јасно различни од α), такви што $|\alpha-\frac{m}{n}|<\frac{c}{n}$. Значи, ирационалните броеви го имаат наведеното својство.

Сега ќе докажеме дека рационалните броеви го немаат наведеното својство. Со други зборови ќе докажеме дека за секој рационален број α постои позитивен број c таков што за секој рационален број $\frac{m}{n}\neq\alpha$ важи $|\alpha-\frac{m}{n}|\geq\frac{c}{n}$.

Навистина, нека $\alpha=\frac{p}{q}, q\geq 1$. Тогаш од $\frac{p}{q}\neq\frac{m}{n}$ следува $pn-mq\neq 0$, па затоа $|pn-mq|\geq 1$. Оттука следува

$$|\alpha-\frac{m}{n}|=|\frac{p}{q}-\frac{m}{n}|=\frac{|pn-mq|}{qn}\geq\frac{1}{qn}=\frac{\frac{1}{q}}{n},$$

т.е. може да се земе $c=\frac{1}{q}$.

2. Определи ги сите шесторки (p,q,r,x,y,z) такви што p,q,r се прости броеви, x,y,z се природни броеви и важи

$$p^{2x}=q^y r^z+1. \qquad (1)$$

Решение. Во следните разгледувања p,q,r секогаш ќе означуваат прости броеви, а x,y,z природни броеви. Прво ќе докажеме четири леми.

Лема 1. Единствено решение на равенката $2^x-1=3^y$ е $x=2, y=1$.

Доказ. Нека за природните броеви x и y важи $2^x-1=3^y$. Тогаш

$$2^{x-1}+2^{x-2}+...+2+1=3^y,$$

од каде лесно следува дека $2\,|\,x$. Нека $x=2l, l\in\mathbb{N}$. Тогаш $(2^l-1)(2^l+1)=3^y$. Бидејќи броевите 2^l-1 и 2^l+1 се заемно прости (тие се непарни и се разликуваат за 2), од последното равенство лесно следува дека $l=1$, $x=2$ и $y=1$. ■

Лема 2. Равенката $2^x+1=3^y$ има точно две решенија: $x=y=1$ и $z=3, y=2$.

Доказ. Лесно се гледа дека $x=y=1$ е решение на равенката $2^x+1=3^y$. Нека $y>1$. Тогаш од равенката

$$2^x=3^y-1=2(3^{y-1}+3^{y-2}+...+3+1)$$

следува $y=2l, l\in\mathbb{N}$, па понатаму добиваме

$$2^x = (3^t - 1)(3^t + 1),$$

а оттука лесно следува дека $l = 1, y = 2, x = 3$. ■

Лема 3. Равенката $p^x - 1 = 2^y$, каде $p > 3$ и $x > 1$ нема решенија.

Доказ. Бидејќи p е непарен број, од равенката

$$(p-1)(p^{x-1} + p^{x-2} + ... + p + 1) = 2^y$$

следува $x = 2l, l \in \mathbb{N}$. Сега равенката го добива видот

$$(p^l - 1)(p^l + 1) = 2^y$$

и има решение $p = 3, l = 1, y = 3$, бидејќи единствени два степени на бројот 2 кои се разликуваат за 2 се $p^l - 1 = 2^1$ и $p^l + 1 = 2^2$. ■

Лема 4. Равенката $p^x + 1 = 2^y$, каде $p > 3$ и $x > 1$ нема решенија.

Доказ. Нека $p > 3$ и $x > 1$. Ќе ги разгледаме следниве случаи.

Случај 1. $y = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тогаш бројот $2^y - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1$ е делив со 3, што е противречност бидејќи тој е еднаков на p^x, па единствен негов прост делител е бројот $p > 3$.

Случај 2. $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$p^x + 1 = (p+1)(p^{x-1} + p^{x-2} + ... + 1p + 1) = (p+1)A = 2^y.$$

Притоа бројот A е непарен и е степен на бројот 2. Затоа $A=1$, па е $x = 1$, што е противречност.

Случај 3. $y = 2k + 1, x = 2l, k, l \in \mathbb{N}$. Бројот p е од облик $p = 4m \pm 1$, каде $m \in \mathbb{N}$. Затоа

$$p^x + 1 = 1 + (1 \pm 4m)^{2l} = 2 \pm \cdot 4m + \binom{2l}{2}(4m)^2 \pm ... \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8),$$

$$2^y = 2^{2k+1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8),$$

што е противречност. ■

Сега ќе ги определиме решенијата на дадената равенка.

а) Нека $p = 2$. Равенката го добива видот:

$$(2^x - 1)(2^x + 1) = q^y r^z.$$

Броевите $2^x - 1$ и $2^x + 1$ се заемно прости и еден е делив со 3. Од условот дека бројот $(2^x - 1)(2^x + 1)$ има точно два различни прости делители следува дека еден од броевите $2^x - 1$ и $2^x + 1$ е степен на бројот 3, Користејќи од лемите 1 и 2 ги добиваме следните решенија на дадената равенка:

$$(2,3,5,2,1,1), \quad (2,5,3,2,1,1), \quad (2,3,7,3,2,1), \quad (2,7,3,3,1,2). \qquad (2)$$

б) Нека $p = 3$. Равенката го добива видот

$$(3^x-1)(3^x+1)=q^y r^z .$$

Броевите 3^x-1 и 3^x+1 се последователни парни броеви, па затоа нивниот најголем заеднички делител е еднаков на 2. Од условот дека производот на овие два броја има најмногу два различни прости делители следува дека едниот од нив е степен на бројот 2. Сега, користејќи ги лемите 1 и 2 лесно добиваме дека единствени решенија на дадената равенка кај кои $p=3$ се:

$$(3,2,2,1,1,2),\ (3,2,2,1,2,1),\ (3,2,5,2,4,1),\ (3,5,2,2,1,4) . \qquad (3)$$

в) Нека $p>3$ и $(p^x-1)(p^x+1)=q^y r^z$. Еден од броевите p^x-1 и p^x+1 е делив со 3, а секој од нив е парен број. Затоа еден од овие два броја е степен на бројот 2, а еден е од видот $2\cdot 3^z$. Од лемите 3 и 4 следува $x=1$.

Ако $p-1=2^{y-1}$, $p+1=2\cdot 3^z$, тогаш $2^{y-2}+1=3^z$. Користејќи ја лема 2 добиваме $y=3, z=1, p=5$ или $y=5, z=2, p=17$, а решенијата на дадената равенка во овие случаи се:

$$(5,2,3,1,3,1),\ (5,3,2,1,1,3),\ (17,2,3,1,5,2),\ (17,3,2,1,2,5) . \qquad (4)$$

Ако $p+1=2^{y-1}$, $p-1=2\cdot 3^z$, тогаш $2^{y-2}-1=3^z$. Користејќи ја лема 1 добиваме $y=4, z=1, p=7$ и во овој случај решенијата на дадената равенка се

$$(7,2,3,1,4,1),\ (7,3,2,1,1,4) . \qquad (5)$$

Според тоа, равенката (1) има 14 решенија (p,q,r,x,y,z) кои се дадени со (2), (3), (4) и (5).

3. Во триаголникот ABC важи релацијата $2BC=AB+AC$. Докажи дека:

а) Темето A, средините M и N на страните AB и AC, центарот S на впишаната кружница и центарот O на опишаната кружница припаѓаат на иста кружница k . .

б) Правата TS , каде T е тежиштето на триаголникот ABC е тангента на кружницата k .

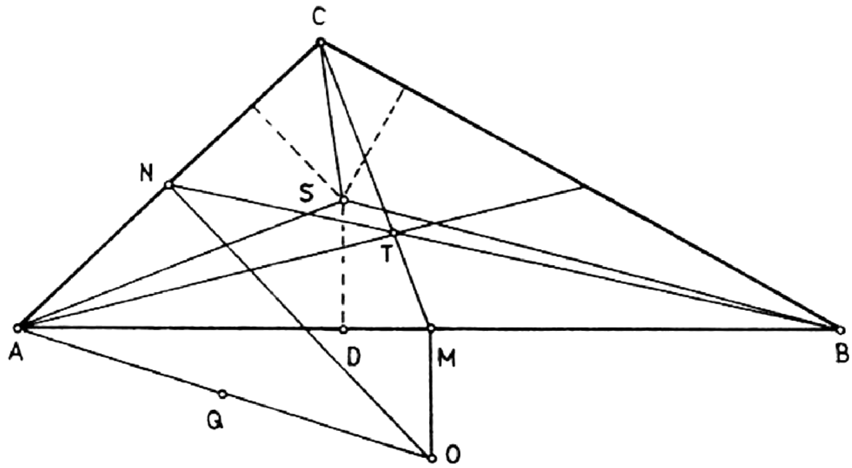
Решение. Ги воведуваме ознаките: $a=BC, b=CA, c=AB, P$ е плоштината на триаголникот BAC , R и r се соодветно радиусите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC , D е допирната точка на впишаната кружница и страната AB, Q е средината на отсечката AO (види цртеж) и

$$s=\tfrac{a+b+c}{2},\ k=\sqrt{3(3b-c)(3c-b)}=\sqrt{30bc-9b^2-9c^2} .$$

Според условот на задачата важи $2a=b+c$. Побнатаму, добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\tfrac{b+c}{16}k, \qquad R=\tfrac{abc}{4P}=\tfrac{2bc}{k}, \qquad r=\tfrac{2P}{a+b+c}=\tfrac{k}{12},$$

$$AD=\tfrac{b+c-a}{2}=\tfrac{b+c}{4}, \qquad OM^2=R^2-\tfrac{c^2}{4}=(\tfrac{c(5b-3c)}{2k})^2.$$



Да забележи дека, ако $5b=3c$, тогаш $b=\frac{3}{5}c, a=\frac{4}{5}c$, па следува $c^2=a^2+b^2$, т.е. $\measuredangle BCA=90^\circ$. Ако $5b>3c$, тогаш $b>\frac{3}{5}c, a>\frac{4}{5}c$, па следува $c^2<a^2+b^2$, т.е. $\measuredangle BCA<90^\circ$, а точките C и O се од иста страна на правата AB. Ако $5b<3c$, тогаш точките O и C се од различни страни на правата AB.

Да воведеме правоаголен координатен систем таков што $A(0,0), B(c,0)$ и $y_C>0$, каде со y_C е означена $y-$координатата на точката C. Понатаму, лесно добиваме:

$$C(\tfrac{3b^2+3c^2-2bc}{8c},\tfrac{b+c}{8c}k),\quad M(\tfrac{c}{2},0),\quad D(\tfrac{b+c}{4},0),\ S(\tfrac{b+c}{4},\tfrac{k}{12}),$$
$$O(\tfrac{c}{2},\tfrac{5b-3c}{2k}c),\quad Q(\tfrac{c}{4},\tfrac{5b-3c}{4k}c),\quad T(\tfrac{3b^2+11c^2-2bc}{24c},\tfrac{b+c}{24c}k).$$

а) Бидејќи $ON\perp AN$ и $OM\perp AM$, заклучуваме дека точките M и N припаѓаат на кружницата K со дијаметар AO. Бидејќи

$$\begin{aligned}SA^2+SO^2-OA^2&=x_S^2+y_S^2+(x_S-x_O)^2+(y_S-y_O)^2-x_O^2-y_O^2\\&=2x_S(x_S-x_O)+2y_S(y_S-y_O)\\&=\tfrac{b+c}{2}(\tfrac{b+c}{4}-\tfrac{c}{2})+\tfrac{k}{6}(\tfrac{k}{12}-\tfrac{5b-3c}{2k}c)\\&=\tfrac{b^2-c^2}{8}+\tfrac{k^2}{72}+\tfrac{3c^2-5bc}{12}\\&=\tfrac{1}{72}(9b^2-9c^2+30bc-9b^2-9c^2+18c^2-30bc)=0,\end{aligned}$$

заклучуваме дека точката S припаѓа на кружницата K.

б) Центарот на кружницата K е точката Q. Бидејќи

$$\begin{aligned}ST^2+SQ^2-TQ^2&=(x_T-x_S)^2+(y_T-y_S)^2+(x_Q-x_S)^2+(y_Q-y_S)^2-\\&\quad-(x_Q-x_T)^2-(y_Q-y_T)^2\\&=2(x_S-x_Q)(x_S-x_T)+2(y_S-y_Q)(y_S-y_T)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b}{2}\left(\frac{b+c}{4} + \frac{2bc-3b^2-11c^2}{24c}\right) + 2\left(\frac{k}{12} + \frac{3c^2-5bc}{4k}\right)\left(\frac{k}{12} - \frac{k}{12}\,\frac{b+c}{2c}\right) \\
&= \frac{b(8bc-3b^2-11c^2)}{48c} + \frac{k}{12}\,\frac{c-b}{c}\left(\frac{k}{12} + \frac{3c^2-5bc}{4k}\right) \\
&= \frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c} + \frac{k^2(c-b)}{144c} + \frac{(c-b)(3c^2-5bc)}{48c} \\
&= \frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c} + \frac{(c-b)(15bc-9b^2)}{144c} \\
&= \frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c} - \frac{3b(b-c)(5c-3b)}{144c} = 0,
\end{aligned}
$$

па затоа $TS \perp SQ$, т.е. правата TS е тангента на кружницата K.