

ДВЕ УСЛОВНИ АЛГЕБАРСКИ НЕРАВЕНСТВА^{*)}

Д-р. Шевкет Арсланагиќ, БиХ; М-р. Фарук Зејнулахи, БиХ

Во оваа статија ќе докажеме две условни алгебарски неравенства кои гласат:

Нека x, y, z се ненегативни реални броеви, т.е. $x, y, z \geq 0$ за кои важи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажи дека важат неравенствата:

$$1 \leq \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad (1)$$

$$1 \leq \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \sqrt{2}. \quad (2)$$

Доказ. 1° Ќе ја докажеме левата страна на неравенството (1). Ќе го разгледаме изразот

$$f(x, y, z) = \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy}.$$

Од условот $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ имаме $0 \leq x, y, z \leq 1$, па според тоа $0 < 1-yz \leq 1$, $0 < 1-zx \leq 1$, $0 < 1-xy \leq 1$. Оттука добиваме

$$\frac{x}{1-yz} \geq x, \quad \frac{y}{1-zx} \geq y, \quad \frac{z}{1-xy} \geq z,$$

т.е.

$$f(x, y, z) \geq x + y + z \geq x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

што требаше и да се докаже.

Лесно се докажува дека равенство важи ако и само ако

$$(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

2° Ќе ја докажеме десната страна на неравенството (1). Заради неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина на два позитивни броеви, точно е следното неравенство

$$yz \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \text{ т.е. } 1-yz \geq 1 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

Сега

$$\frac{x}{1-yz} \leq \frac{2x}{1+x^2}.$$

Значи, со воведената ознака $f(x, y, z) = \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy}$, имаме

$$f(x, y, z) \leq \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2} \quad (3)$$

^{*)} Авторите на статијата се и автори на неравенствата

Понатаму ќе го користиме следното помошно неравенство:

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} (1+x^2). \quad (4)$$

За да го докажеме неравенството (4) користиме:

$$\begin{aligned} (1+x^2)^2 - \frac{16\sqrt{3}}{9} x &= \frac{1}{9} (9x^4 + 18x^2 - 16\sqrt{3}x + 9) \\ &= \frac{1}{9} (3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) (3x^2 + 2\sqrt{3}x + 9) \\ &= \frac{1}{9} (\sqrt{3}x - 1)^2 (3x^2 + 2\sqrt{3}x + 9) \geq 0 \end{aligned}$$

Лесно се заклучува дека важи (4).

Исто така во (4) важи равенство, ако и само ако $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ако (4) го собереме со двете аналогни неравенства по променливите y и z , ќе добиеме:

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} (3+x^2+y^2+z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

Сега од (3) и (5) заклучуваме дека важи неравенството $f(x, y, z) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, т.е. десната страна на неравенството (1) е точна. Равенството важи ако и само ако $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Од 1° и 2° следи дека неравенството (1) е точно.

3° Да докажеме дека левата страна на неравенството (2) е точна. Од неравенството $yz \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2) (\Leftrightarrow (y-z)^2 \geq 0)$, лесно ги добиваме следните неравенства:

$$x + x y z \leq x + \frac{1}{2} x (y^2 + z^2) = x + \frac{1}{2} x (1 - x^2) = \frac{1}{2} (3x - x^3) \leq 1,$$

Последното неравенство важи затоа што важи неравенството $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$, $x \geq 0$.

Користејќи ги уште двете аналогни неравенства, имаме:

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \geq \frac{x^2}{x+xyz} + \frac{y^2}{y+xyz} + \frac{z^2}{z+xyz} \geq x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

Значи дека левата страна на неравенството (2) е точна. Равенството важи ако и само ако $(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

4° Ќе ја докажеме десната страна на неравенството (2). Не намалувајќи ја општоста претпоставуваме дека $x \leq z$ и $y \leq z$. Тогаш

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \frac{x+y+z}{1+xy},$$

Па според тоа, доволно за да се докаже точноста на неравенството:

$$x + y + z \leq \sqrt{2}(1 + xy),$$

за $0 \leq x \leq z$, $0 \leq y \leq z$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Сега последното неравенство го добива обликот:

$$x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq \sqrt{2}(1 + xy),$$

а ова неравенство е еквивалентно со неравенството:

$$1 - x^2 - y^2 \leq (\sqrt{2}(1 + xy) - x - y)^2.$$

Воведувајќи ги смените $u = x + y$ и $v = xy$, го добиваме неравенството:

$$1 + u^2 + 2v \leq (\sqrt{2}(1 + v) - u)^2,$$

а од ова неравенство го добиваме еквивалентното неравенство:

$$(\sqrt{2}u - v - 1)^2 + v^2 \geq 0,$$

кое е точно како сума на два потполни квадрати.

Со тоа е докажана точноста на десната страна на неравенството (2).

Забележуваме дека во последното неравенство, важи равенството само ако $v = 0$ и $\sqrt{2}u - v - 1 = 0$, т.е. $xy = 0$ и $x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значи заклучуваме дека

равенство важи само ако $(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ или $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Заради ограничувањата дадени на почетокот на доказот дека $x \leq z$ и $y \leq z$, ги добивме горните решенија. Секако, треба да се земе во предвид уште едно симетрично решение $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Значи равенството важи ако и само ако:

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}.$$

Напомена: Ќе дадеме уште еден доказ на десните страни на неравенствата (1) и (2).

5° Нека $S = \frac{x}{1 - yz} + \frac{y}{1 - zx} + \frac{z}{1 - xy}$. Ќе покажеме дека $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ако било која променлива x, y или z е еднаква на нула, пример $x = 0$, тогаш $S = y + z < 2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Да претпоставиме дека $xyz \neq 0$, и x, y, z сетакви што $x, y, z \in (0, 1)$ (заради условот $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

Да забележиме дека $\frac{x}{1 - yz} = x + \frac{xyz}{1 - yz}$; при тоа следува:

$$S = x + y + z + xyz \left(\frac{1}{1 - yz} + \frac{1}{1 - zx} + \frac{1}{1 - xy} \right), \quad (6)$$

Користејќи го неравенството

$$yz \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2) (\Leftrightarrow (y-z)^2 \geq 0)$$

и неравенството меѓу аритметичка и геометричка средина, повеќекратно, добиваме:

$$\begin{aligned} 1 - yz &\geq 1 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(1 + x^2) = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + x^2 + y^2 + z^2) \geq 2 \sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} = 2x\sqrt{yz} \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} xyz \left(\frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} + \frac{1}{1-xy} \right) &\leq \frac{xyz}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{zx}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} + \frac{x+y}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z) \end{aligned}$$

т.е.

$$xyz \left(\frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} + \frac{1}{1-xy} \right) \leq \frac{1}{2}(x+y+z). \quad (7)$$

Сега, заради (6) и (7), користејќи го уште и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, добиваме:

$$S \leq \frac{3}{2}(x+y+z) \leq \frac{3}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

т.е.

$$\frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

што и требаше да се докаже.

6° Заради потполната симетрија на даденото неравенство (2), не намалувајќи ја општоста можеме да сметаме дека $0 \leq x \leq y \leq z$. Тогаш добиваме (како во предходниот доказ):

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq \frac{x+y+z}{1+xy}.$$

Сега е доволно да докажеме дека важи:

$$\frac{x+y+z}{1+xy} \leq \sqrt{2},$$

односно

$$x+y+z - \sqrt{2}xy \leq \sqrt{2}. \quad (8)$$

За да го докажеме (8) ќе го користиме методот за одредување на екстремни вредности на функцијата $g(x, y, z) = x+y+z - \sqrt{2}xy$ со помош

на Лагранжовиот мултипликатор λ во областа:

$$B = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Имаме

$$G(x, y, z) = x + y + z - \sqrt{2}xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

па од условот $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0$, добиваме:

$$1 - \sqrt{2}y - 2\lambda x = 0, \quad (9)$$

$$1 - \sqrt{2}x - 2\lambda y = 0, \quad (10)$$

$$1 - 2\lambda z = 0, \quad (11)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (12)$$

Од (9) и (10) добиваме $(\sqrt{2} - 2\lambda)(x - y) = 0$, а оттука: $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = y$.

а) Ако $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогаш $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ заради (11). Сега од (12) добиваме:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Од друга страна, од (9) добиваме дека $1 - \sqrt{2}(x + y) = 0$, а оттука:

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (14)$$

Сега од (13) и (14) следи дека $x = 0$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Јасно е дека во (8) равенството

важи за $x = 0$ и $y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Ако $x = y$, тогаш од (8) добиваме:

$$2x + z - \sqrt{2}x^2 \leq \sqrt{2}. \quad (15)$$

Бидејќи $(2x + z)^2 \leq 2(4x^2 + z^2) (\Leftrightarrow (2x - z)^2 \geq 0)$, имаме:

$$2x + z - \sqrt{2}x^2 \leq \sqrt{2}\sqrt{4x^2 + z^2} - \sqrt{2}x^2,$$

Оттука заклучуваме дека неравенството (15) е точно ако е:

$$\sqrt{4x^2 + z^2} \leq x^2 + 1,$$

значи $x = y$:

$$2x^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq (x^2 + 1)^2$$

или

$$2x^2 + 1 \leq x^4 + 2x^2 + 1,$$

што е очигледно е точно.

Значи, неравенството (15) е точно, па според тоа точно е и неравенството (8).

На крај, да ги земеме точките на работ од B . Не намалувајќи ја општоста, земаме дека $x = 0$. Тогаш

$$x + y + z - \sqrt{2}xy = y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} = \sqrt{2},$$

што значи дека (8) важи и во овој случај.

Според тоа, даденото неравенство е точно и равенството важи во случај

$$\text{кога } (x, y, z) \in \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}.$$

Литература:

- [1] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
- [2] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Vol. 27: No 1, February 2001.
- [3] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Vol. 28: No 3, April 2002.
- [4] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Vol. 31: No 4, May 2005.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ