Сава Гроздев,
БАН, Софија

ДА ГО ПОБАРАМЕ ОНА ШТО НЕ СЕ МЕНУВА

Учителката влезе на час и им се обрати на учениците:

– Драги ученици, денес во одделението присутни се вкупно 26 ученици. Сега, нека стане по еден ученик од секоја од трите редици и нека ги преброи соучениците во неговата редица, вклучувајќи се и себеси.

Учителката ги посочи Иван, Петар и Ирина. Тие го отпочнаа броењето во нивните редици. Резултатите беа 9, 10 и 7 за првата, втората и третата редица, соодветно.

– Ученици, обрнете внимание, дека $9+10+7=26$, што и треба да се очекува. Броењето можеме да го направиме и на друг начин. На пример, во училницата има 11 клупи со по два ученика и 4 клупи со еден ученик. Вкупно има $11\cdot 2+4\cdot 1=22+4=26$ ученици. Повторно добиваме 26. Забележуваме, дека бројот на учениците во одделението не зависи од начинот на броење. Во случајов, тоа што не се менува е бројот на учениците. На математички јазик велиме, дека бројот на учениците е *инваријантен* во однос на начинот на броење. Денес ќе се занимаваме со *инваријантите* – еден од важните поими во математиката. Да ја разгледаме следната задача:

Задача 1. Дадени се броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, т.е. дадени се првите осум природни броеви. Изберете два од нив, прецртајте ги и на нивно место запишете ја разлика која се добива кога од поголемиот број ќе се одземе помалиот. Бројот на броевите се намалува за еден. Со седумте броеви постапете на истиот начин: изберете два од нив, прецртајте ги и на нивно место запишете ја нивната разлика. Добивате шест броја Продолжете понатаму, се додека не остане еден единствен број. Кој број се добива на крајот?

Учениците започнаа да пресметуваат и најбрзите ги соопштија добиените одговори: Ѓорѓи добил 4, Румена – 6, а Иван – 0. Се добија и други резултати. Учителката беше задоволна и започна да објаснува:

– Драги ученици, забележете, дека има 3 можности за избор на два броја во задачата. Ако двета избрани броја се парни, на нивно место се запишува парен број. Ако избраните броеви се непарни, на нивно место се запишува повторно парен број. Но, ако избраните броеви се со различна парност (еден парен и еден непарен), на нивно место се запишува непарен број. Сега да видиме што станува со бројот на непарните броеви. Во првиот и третиот случај тој број се запазува, а во вториот случај бројот на непарни броеви се намалува за 2. Значи, имаме инваријанта. Тоа е парноста на бројот на непарните броеви. На почетокот имаме четири непарни броеви: 1, 3, 5 и 7, т.е. бројот на непарните броеви е парен број и како после секој чекор парноста на тој број се запазува, на крајот пак треба да имаме парен број непарни броеви. Но, на крајот останува еден единствен број, т.е. останува непарен број броеви. Следствено не може последниот број да е непарен, па затоа тој е парен. Вашите пресметувања го потврдуваат тоа. Јасно, парниот број кој останува не може да е поголем од 8, бидејќи одземаме два природни броја кои се помали или еднакви на 8. Евентуалните одговори може да бидат 0, 2, 4, 6 и 8. Но за секоја од овие можности треба да се посочи конкретна реализација. И така, во оваа задача сме сигурни, дека не може да се добие непарен број и до овој заклучок дојдовме со помош на откриеното инваријантно својство. Но, за целосно да ја решиме задачата треба да ги потврдиме или соодветно да ги отфрлиме сите или некои од случаите 0, 2, 4, 6 и 8. Сега ќе покажеме, дека секој од овие случаи може да се реализира. За таа цел после секој чекор во заграда ќе ги ставаме броевите кои остануваат. На пример, дадените броеви ќе ги запишеме на следниов начин $(1,2,3,4,5,6,7,8)$ и ако сме ги одбрале 2 и 3, кога ќе го искористиме условот, ќе добиеме $(1,1,4,5,6,7,8)$. Понатаму, ако ги избереме 6 и 8, ќе добиеме $(1,1,4,5,2,7)$ итн. Користејќи го опишаниот начин на запишување, ќе дадеме по една реализација (тие не се единствените) на секој од случаите 0, 2, 4, 6 и 8:

реализација на 0: $(1,2,3,4,5,6,7,8) \to (1,3,4,5,6,7,8) \to (1,1,5,6,7,8) \to$
$\to (1,1,1,7,8) \to (1,1,1,1) \to (0,1,1) \to (0,0) \to (0)$;

реализација на 2: $(1,2,3,4,5,6,7,8) \to (2,3,4,5,6,7,7) \to (2,3,4,5,6,0) \to$
$\to (2,3,4,1,0) \to (2,1,1,0) \to (2,0,0) \to (2,0) \to (2)$;

реализација на 4: $(1,2,3,4,5,6,7,8) \to (2,2,4,5,6,7,8) \to (0,4,5,6,7,8) \to$
$\to (0,4,1,7,8) \to (0,4,1,1) \to (0,4,0) \to (4,0) \to (4)$;

реализација на 6: $(1,2,3,4,5,6,7,8) \to (2,2,4,5,6,7,8) \to (0,4,5,6,7,8) \to$
$\to (0,1,6,7,8) \to (0,1,6,1) \to (0,0,6) \to (6,0) \to (6)$;

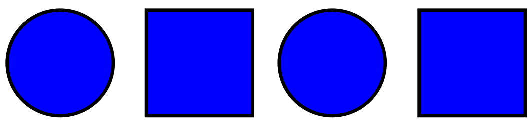
реализација на 8: $(1,2,3,4,5,6,7,8) \to (2,2,4,5,6,7,8) \to (0,4,5,6,7,8) \to$
$\to (0,1,6,7,8) \to (0,1,1,8) \to (0,0,8) \to (8,0) \to (8)$. ■

Задача 2. На таблата се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Во еден чекор избираме два броја, ги прецртуваме и на нивно место ја запишуваме разликата, која се добива кога од поголемиот број ќе го одземеме помалиот. Продолжуваме, се додека е можно да се избираат два броја. Дали може на крајот да се добие бројот 6?

Решение: Постапката е иста како и во задача 1 – парноста на бројот на непарните броеви не се менува, т.е. парноста на бројот на непарните броеви останува инваријантна после секој чекор. Бидејќи на почетокот имаме пет непарни броеви: 1, 3, 5, 7 и 9, т.е. непарен број непарни броеви, а треба да остане само еден број, (исто така непарен број), добиваме дека последниот број сигурно е непарен. Конечно, на крајот не може да остане бројот 6. ■

– Драги ученици, силата на инваријантите се покажува, кога сакаме да отфрлиме некаква можност, како што беше во претходната задача, т.е. ако сакаме да докажеме, дека нешто не може да се случи. Еден можен начин на решавање е да побараме инваријантно својство. Еве една „геометриска задача“ за инваријанти, која е поврзана со компјутерска игра.

Задача 3 (игра с квадрати и кругови). Мониторот на компјутерот се прикажани неколку квадрати и неколку кругови. Ако кликнете со глувчето над две еднакви фигури, тие исчезнуваат од екранот и на нивно место се појавува квадрат, а ако кликнете на две различни фигури, тие исчезнуваат и на нивно место се појавува круг. Играчот губи, т.е. победник е компјутерот, ако последната фигура која останува е квадрат. Кој ќе победи, ако на почетокот на екранот се појават 23 квадрати и 20 кругови?



Решение: Нека во општ случај во даден момент (после реализирањето на определен број потези) бројот на квадратите е x, а бројот на круговите е y. Реализираме еден потег, т.е. кликнуваме со глувчето на две од фигурите. Можни се 3 случаи, а резултатите од нив се дадени во следната табела:

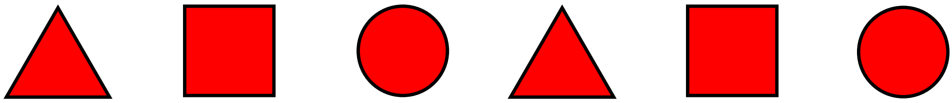
Избор на	**Резултат после еден потег**	
	Број на кругови	**Број на квадрати**
круг и круг	$y-2$	$x+1$
квадрат и квадрат	y	$x-1$
квадрат и круг	y	$x-1$

Од таблицата се гледа, дека после секој потег бројот y или не се менува, или се намалува за 2, т.е. парноста на бројот на круговите е инваријантна. Оттука следува, дека ако почетниот број на кругови е парен, тогаш на крајот треба да се добие квадрат. Со други зборови, компјутерот секогаш победува, ако на почетокот на екранот се појави парен број на кругови. Во конкретната задача со 23 квадрати и 20 кругови победник ќе биде компјутерот. Се разбира, од истото инваријантно својство следува, дека играчот ќе победи секогаш кога почетниот број на кругови е непарен и тоа ќе се случи независно од почетниот број на квадрати. ■

Всушност задачата 3 е „геометриска“ варијанта на задача 1 и задача 2. Доволно е да ги замениме квадратите со парни броеви, а круговите – со непарни. И уште нешто, во „аритметичките“ задачи 1 и 2 чекорот „одземање на два броја“ може да се замени со чекорот „собирање на два броја“ и конечно да го поставиме прашањето каква е парноста на последниот број кој останува. На пример, можете да ја решите следнава задача: Определете ја парноста на последниот број, ако на таблата се запишани броевите 2, 7, 11, 12, 23, 27, 33 и 100, кога се извршуваат следниве чекори: избираме два броја, ги пречкртуваме и на нивно место го ставаме нивниот збир. Еве го и одговорот: бидејќи бројот на непарните броеви на почетокот е 5, добиваме дека последниот број кој останува ќе биде исто така непарен.

– Драги ученици, како што споменав на почетокот на часот, инваријантите и инваријантните својства се важни во математиката. Еден од првите математичари, кој се занимавал со нив, е германскиот математичар Феликс Клајн (1849 – 1925). Се што на училиштето учиме од геометрија е дел од таканаречената Евклидова геометрија, наречена по името на античкиот математичар Евклид (325 г. пне – 265 г. пне). Меѓутоа, во математиката, постојат и многу други геометрии, кои Феликс Клајн успеал да ги подреди со помош на инварианти. Има и други математичари, кои се занимавале со инваријанти – на пример, англичанецот Џејмс Силвестер (1814 – 1897), но за нив ќе ви раскажам во некој од следните часови. Денес ќе разгледаме уште една задача, во која инваријантното својство се открива доста потешко.

Задача 4 (игра со триаголници, квадрати и кругови). На мониторот од компјутерот се прикажуваат произволен број на триаголници, квадрати и кругови. Ако кликнете со глувчето на две различни фигури, тие исчезнуваат од мониторот и на нивно место се појавува фигура од третиот вид. Играта завршува, кога на екранот ќе останат фигури од само еден и ист вид. Дали може да остане само една фигура и таа да е квадрат, ако на почетокот на екранот се појават 4 триаголници, 3 квадрати и 2 круга?



Решение: Нека во општ случај во даден момент (после одигрување на определен број потези) бројот на триаголниците е x, бројот на квадратите е y, а бројот на круговите е z. Реализираме еден потег, т.е. кликнуваме со глувчето на две различни фигури. Можни са 3 случаи, чии резултати се дадени во следната таблица:

Избор на	**Резултат после еден потег**		
	Број на триаголници	**Број на квадрати**	**Број на кругови**
триаголник и квадрат	$x-1$	$y-1$	$z+1$
триаголник и круг	$x-1$	$y+1$	$z-1$
квадрат и круг	$x+1$	$y-1$	$z-1$

Да ги разгледаме трите разлики: разликата на бројот на триаголниците и бројот на квадратите, разликата на бројот на триаголниците и бројот на круговите, както и разликата на бројот на квадратите и бројот на круговите. Секогаш од поголемиот број го одземаме помалиот. Од таблицата се гледа, дека парноста на секоја разлика се запазува. Навистина, ако сме избрале, на пример, триаголник и квадрат (види прв ред), тогаш разликата на бројот на триаголниците и бројот на квадратите се запазува, разликата на бројот на триаголниците и бројот на круговите се намалува за 2 или се зголемува за 2, исто така разликата на бројот на квадратите и бројот на круговите се намалува за 2 или се зголемува за 2. Аналогно проверуваме за другите две можности (види втор и трет ред). **Инвариантата во таа задача е парноста на секоја од трите разлики**. Заклучуваме, дека за да остане на крајот на играта една единствена фигура од даден вид, треба броевите на фигурите од другите два вида да се со еднаква парност. Условот е неопходен, но не е доволен. За да се убедиме во последното, ќе го разгледаме следниот случај: нека на почетокот на екранот се појавиле 1 триаголник, 1 квадрат и 1 круг. Тоа ќе го забележиме со ставање на броевите во загради. Во случајот имаме $(1,1,1)$ и се договараме на прво место да го запишеме бројот на триаголниците, на второ место – бројот на квадратите, а на трето место – бројот на круговите. Бројот на триаголниците и бројот на круговите се со еднаква парност (и двата са непарни). Неопходниот услов за да остане еден единствен квадрат на крајот на играта е исполнет. Освен тоа, до таков резултат не е можно да се добие. Од $(1,1,1)$ се можни само 3 резултати: $(0,0,2)$, $(0,2,0)$ и $(2,0,0)$. Ако се вратиме на условот на задачата, забележуваме, дека и тука неопходниот услов за да остане еден единствен квадрат на крајот на играта е исполнет – бројот на триаголниците, както и бројот на круговите се парни броеви (соодветно 4 и 2). Ќе дадеме реализација на еден квадрат на крајот на играта, од каде ќе следува, дека одговорот на задачата е позитивен. Еве една можна реализација (таа не е единствена):

$$(4,3,2)\to(3,4,1)\to(2,3,2)\to(1,4,1)\to(0,3,2)$$
$$\to(1,2,1)\to(2,1,0)\to(1,0,1)\to(0,1,0).\ \blacksquare$$

– Ученици, за да се научите да откривате инваријанти, треба да решите повеќе задачи на таа тема. За домашна ви предлагам две задачи:

Задача 5. Запишете ги природните броеви од 1 до 13. Изберете два од нив, прецртајте ги и на нивно место запишете ја нивната разлика, (кога од поголемиот ќе го извадите помалиот). Продолжете на аналоген начин, се додека не остане еден единствен број. Докажете, дека при соодветно реализирање на вакви чекори може да се добие бројот 13.

Задача 6. Во играта со триаголници, квадрати и кругови (види задача 4) на мониторот се појавуваат:

а) 5 триаголници, 2 квадрата и 4 кругови;

б) 5 триаголници, 2 квадрата и 3 кругови.

Дали е можно на крајот на играта да остане само една фигура и таа да биде квадрат?

Одговор. а) Не е можно, бидејќи броевите 5 и 4 се со различна парност.

б) Доволно е да забележиме, дека со еден чекор добиваме $(5,2,3)$ $\to(4,3,2)$ и понатаму можеме да го искористиме решението на задача 4.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ