**Методи Главче, Скопје**
**Виолета Анѓелкоска, Струга**

## МАГИЧНИ КВАДРАТИ И МАГИЧНА КОЦКА

Квадратните шеми природни броеви во кои тие се распоредени така да збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и секоја дијагонала е еднаков ги нарекуваме *магични квадрати*. Случајот кога имаме квадрат со $3\times3$ полиња во кои треба да ги распоредиме броевите од 1 до 9 треба да ја решиме следнава задача:

На квадратна $3\times3$ табла треба да се распоредат броевите од 1 до 9 така да збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала да биде еднаков на 15. Притоа секој од броевите од 1 до 9 може и мора да биде искористен точно еднаш, т.е. броевите во различните полиња мора да се различни.

На прв поглед ништо тешко. Доволно е да ги провериме сите можни распореди на броевите од 1 до 9 во деветте полиња на табелата. Колку такви распореди има? За првото поле на таблата имаме девет можности, т.е. во него можеме да го запишеме секој од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Понатаму, на второто поле можеме да го сместиме било кој од останатите осум броеви, што значи дека имаме осум можности. Значи, за пополнување на првите две полиња имаме $9\cdot8=72$ можности. Со аналогни размислувања добиваме дека таблата со 9 полиња со броевите од 1 до 9 може да пополни на $9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=362880$ начини. Јано, проверката на сите можни распоредувања е бесмислена, па затоа поставената задача ќе ја решиме на друг начин.

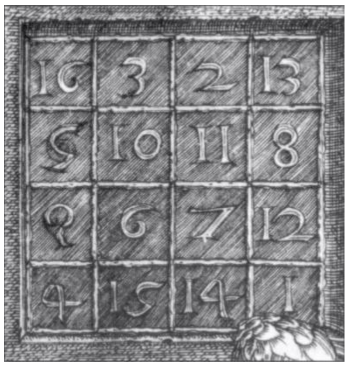
| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

Цртеж 1

Со $a$ да го означиме збирот на броевите во аглите на табелата, потоа со $s$ да го означиме бројот запишан во пресекот на дијагоналите и со $b$ да го означиме збирот на преостанатите броеви. Имаме, $a+2s=30$, бидејќи тоа е збирот на броевите на двете дијагонали, и $b+2s=30$, бидејќи тоа е збирот на броевите запишани во втората редица и втората колона на таблата. Од последните две равенства добиваме $a=b$. Понатаму, ако ги собереме броевите во првата и третата редица и првата и третата колона добиваме $2a+b=60$ и како $a=b$ имаме $3a=60$, т.е. $a=20$. Со замена во првата равенка наоѓаме $20+2s=30$, т.е. $s=5$, што значи дека во централното поле треба да го запишеме бројот 5. Понатаму е јасно. Имено, броевите 5 и 15 се непарни, па затоа во дијагоналните спротивни полиња мора да се запишани или два парни или два непарни броја. Не е можно овие броеви да се непарни, бидејќи тогаш во една дијагонала, редица или колона ќе се наоѓаат броевите 7 и 9, а $7+9=16>15$. Значи, во дијагоналните спротивни полиња во произволен распоред ќе ги запишеме парните броеви, а потоа користејќи го фактот дека збирот во секоја редица и секоја колона е 15 ги распоредуваме непарните броеви. Едно решение на нашата задача е дадено на цртеж 1.

Задачата има вкупно осум решенија, но во суштина тие се инваријантни на решението прикажано на цртеж 1, т.е. се разликуваат само во положбата на таблата во рамнината. Обидите се истите да ги најдете.

**Забелешка 1.** Решението на нашата задача било познато пред повеќе од 3000 години. Така, за ова решение знаел кинескиот филозоф Конфучие во петтиот век пред нашата ера, кој најверојатно го осознал читајќи ја старата кинеска книга “Книга за пермутациите”, која е пишувана најмалку 1000 години п.н.е.

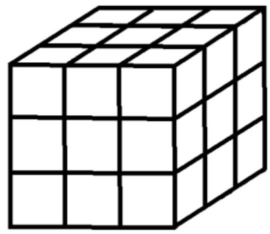



**Забелешка 2.** Магичните квадрати отсекогаш привлекувале посебно внимание, па така некои од нив може да се најдат дури и на уметничките дела. Еден таков случај е бакрорезот “Меланхолија” на големиот сликар Albrecht Dürer (1471-1528), кој е даден на горната слика. На овој бакрорез, во горниот десен агол е нацртан магичен квадрат со $4\times 4=16$ полиња, во кој се сместени броевите од 1 до 16 така да збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и секоја дијагонала е еднаков на 34, слика десно.

**Забелешка 3.** Интересно е да се напомене дека постои ефективен алгоритам за составување магични квадрати со непарен број полиња, што не е случај со магичните квадрати со парен број полиња. Алгоритамот за формирање магични квадрати со парен број полиња може да се види во [1].

Во претходните разгледувања се запознавме со магичните квадрати, а сега ќе ги разгледаме таканаречените магични коцки, чие составување е далеку поголем проблем, па затоа задачата нема да ја решаваме туку само ќе го формулираме проблемот и ќе провериме дали понуденото решение ги задоволува условите на задачата. Значи, треба да ја решиме следнава задача:

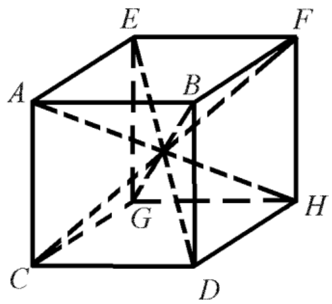
Од $3\times3\times3=27$ коцки треба да ја составиме коцка прикажана на цртеж 2 и во секоја коцкичка да запишеме по еден од броевите од 1 до 27, во секоја коцкичка запишуваме различен број, така да збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и на секоја дијагонала да биде еднаков.


Цртеж 2

Јасно, збирот на сите 27 броја е

$$1+2+3+...+26+27=378$$

и како имаме девет колони (редици) во кои дадените броеви се запишани (цртеж 2), добиваме дека збирот на броевите во секоја колона, секоја редица и на секоја дијагонала мора да биде $378:9=42$.



Цртеж 3

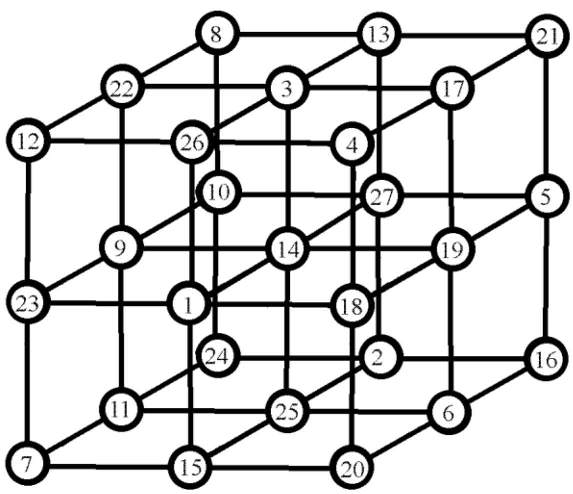
Како што рековме колони има $3\times3=9$, редици има $3\times3=9$, а бројот на просторните дијагонали е еднаков на 4 (на цртеж 3 тоа се дијагоналите $AH, BG, CF$ и $DE$.

Едно од можните решенија на нашата задача е дадено на цртеж 4. Не е тешко да се провери дека збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја просторна дијагонала е еднаков на 42. На пример, збирот на броевите запишани на првиот горен ред е:

$$12+26+4=42,$$

на дијагоналата $BG$ е:

$$4+14+24=42,$$



Цртеж 4

на средната колона е:

$$3+14+25=42 \text{ итн.}$$

Забележуваме дека формирањето на магичната коцка е далеку посложена работа. Ова пред се се должи на фактот дека бројот запишан во централното квадратче на магичниот квадрат учествува во три збира, а додека кај коцката тој број учествува во дури седум збира.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Тренчески, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
2. Devide, V.: Zabavna matematika, Školska knjiga, Zagreb, 1988

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ