

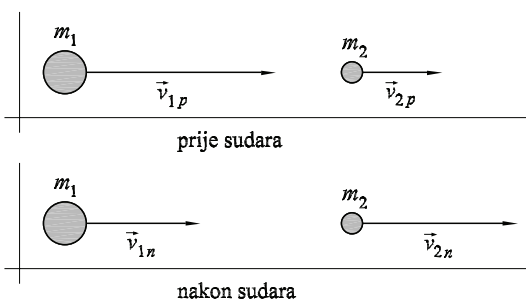


## Sudari kuglica: simulacija u programskom jeziku C

Igor Rončević<sup>1</sup>, Rijeka i Goranka Bilalbegović<sup>2</sup>, Zagreb

### O sudarima u fizici

Sudari objekata su vrlo važni u svakodnevnom životu, prirodi i znanosti. Sudaraju se galaktike i tako nastaju nove strukture u svemiru [1]. Sudaraju se čestice u velikim akceleratorima i tako dolazimo do novih spoznaja o strukturi materije na najsitnijim skalama duljina [2]. Nažalost, sudaraju se i automobili i ljudi nekad ginu. Simulacije sudara su dio mnogih računalnih igara koje su za neke dobra zabava, a za druge dobra zarada. Vrlo je važno istražiti i naučiti zakone sudara. Fizičari polaze od jednostavnih modela na kojima se formuliraju i provjeravaju osnovni zakoni. Najjednostavniji slučaj sudara je pri gibanju kuglica po pravcu. Za takve sudare kažemo da su jednodimenzionalni. Animacije koje prikazuju jednodimenzionalno gibanje i sudare samo dvije [3], te većeg broja [4] kuglica možete gledati na Internetu.



Slika 1.

U većini slučajeva sile koje djeluju prilikom sudara nisu poznate. Stoga se stanje sustava nakon sudara najčešće određuje iz zakona očuvanja količine gibanja i zakona očuvanja energije [5,6]. Zakon očuvanja količine gibanja vrijedi u svakom sudaru pri kojem ne djeluju vanjske sile. Tada je i energija promatranog sustava također

<sup>1</sup> Diplomirao je 2006. godine na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, studentska grupa profesor fizike i politehnike. Apsolvent je na smjeru profesor matematike i informatike na istom fakultetu, e-mail: ironcevh@hotmail.com.

<sup>2</sup> Izvanredni je profesor fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Zagrebu, e-mail: goranka@phy.hr.

očuvana. Općenito, ukupna energija ne mora uključivati samo kinetičku energiju već i ostale oblike poput unutarnje energije, energije deformacija, rotacijske energije, itd. U elastičnom sudaru zanemarujemo sve ove energije i uzimamo u obzir samo potencijalnu i kinetičku energiju. Izvedimo sada relacije koje nam povezuju brzine kuglica prije i nakon elastičnog sudara. Zamislimo dvije kuglice koje se gibaju duž pravca koji spaja njihove centre (i koji ujedno čini  $x$ -os koordinatnog sustava) te se sudare nastavljajući se gibati duž iste linije poslije sudara (slika 1). Kuglice tijekom sudara djeluju jedna na drugu silama koje imaju smjer duž početne linije gibanja te će i konačno gibanje biti usmjereno duž iste koordinatne osi. Stoga u izvodu ne koristimo vektorski oblik brzine već pišemo isključivo iznose brzina. Pri tome vrijedi: iznos brzine kuglice je negativan ukoliko se ona giba u negativnom smjeru  $x$ -osi, odnosno pozitivan ukoliko se giba u pozitivnom smjeru  $x$ -osi.

Mase kuglica su  $m_1$  i  $m_2$ , a iznosi brzina  $v_{1p}$  i  $v_{2p}$  prije sudara te  $v_{1n}$  i  $v_{2n}$  nakon sudara. Iz zakona očuvanja količine gibanja dobivamo:

$$m_1 v_{1p} + m_2 v_{2p} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}. \quad (1)$$

Iz zakona očuvanja energije dobivamo:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1p}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2p}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1n}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2n}^2. \quad (2)$$

Ako znamo mase i početne brzine kuglica iz gornjih jednadžbi možemo izračunati krajnje brzine  $v_{1n}$  i  $v_{2n}$ . Jednadžbu (1) zapisujemo na sljedeći način:

$$m_1 (v_{1p} - v_{1n}) = m_2 (v_{2n} - v_{2p}). \quad (3)$$

Jednadžbu (2) zapisujemo kao:

$$m_1 (v_{1p}^2 - v_{1n}^2) = m_2 (v_{2n}^2 - v_{2p}^2). \quad (4)$$

Budući je došlo do sudara vrijedi  $v_{1n} \neq v_{1p}$  i  $v_{2n} \neq v_{2p}$ . Podijelimo jednadžbu (4) s jednadžbom (3) i dobivamo:

$$\begin{aligned} v_{1p} + v_{1n} &= v_{2p} + v_{2n}, \\ v_{1p} - v_{2p} &= -(v_{1n} - v_{2n}). \end{aligned} \quad (5)$$

Rezultat (5) znači da je u jednodimenzionalnom elastičnom sudaru relativna brzina približavanja prije sudara iznosom jednaka, a smjerom suprotna relativnoj brzini udaljšavanja nakon sudara, bez obzira na mase sudarajućih čestica. Kako bi našli iznose brzina  $v_{1n}$  i  $v_{2n}$  iz poznatih brzina  $v_{1p}$  i  $v_{2p}$ , koristimo jednadžbe (3) i (5) da eliminiramo  $v_{2n}$  te riješimo sustav po  $v_{1n}$ :

$$v_{1n} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1p} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2p}. \quad (6)$$

Analogno eliminiramo  $v_{1n}$  te riješimo sustav po  $v_{2n}$ :

$$v_{2n} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1p} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2p}. \quad (7)$$

Dobiveni izrazi su općeniti rezultati koji nam omogućuju određivanje konačnih brzina u bilo kojem jednodimenzionalnom elastičnom sudaru. Posebno nam je zanimljiv slučaj kada su mase sudarajućih objekata jednake. Uvrštavajući  $m_1 = m_2$  u (6) i (7) dobivamo:

$$v_{1n} = v_{2p}, \quad v_{2n} = v_{1p}. \quad (8)$$

Rezultat (8) znači da kuglice jednakih masa prilikom elastičnog sudara jednostavno zamijene iznose svojih brzina. Iznos krajnje brzine prve kuglice jednak je iznosu početne brzine druge kuglice i obratno. Slučaj više kuglica koje se gibaju po pravcu i većeg broja njihovih sudara može se riješiti primjenom računalnog programiranja. Možemo

zamisliti da su kuglice raspoređene po pravcu između dva nepokretna zida koji su međusobno na rastojanju  $L$ . Animaciju koja to prikazuje možete gledati na Internetu [4]. Masa zida (npr.  $m_1$ ) je mnogo veća od mase kuglice ( $m_2$ ), tj. vrijedi  $m_1 \gg m_2$ . Zid miruje (tj.  $v_{1p} = 0$ ) te se u tom slučaju iz (7) dobiva da nakon sudara sa zidom kuglica samo promijeni predznak brzine (tj. giba se od zida s brzinom čiji je iznos jednak iznosu njene brzine prije sudara). Ako se na rastojanju  $L$  nalaze prepreke čija je masa  $m_1$  usporediva s masom kuglice  $m_2$ , analiza sudara je složenija. U tom slučaju se promijeni i iznos brzine kuglice nakon sudara s preprekom.

## Simulacija sudara kuglica u programskom jeziku C

Za numeričko rješavanje zadataka o sudarima može se koristiti bilo koji programski jezik. O primjenama programskog jezika F (dio Fortrana 90/95) je pisano u jednom od prethodnih brojeva Matematičko-fizičkog lista [7]. Za sudare kuglica izabrali smo programski jezik C koji je jedan od najvažnijih za rad u fizici, matematici i računalnoj znanosti [8,9,10]. Program `Sudari1d.c` koji predstavlja jednu realizaciju rješenja zadatka jednodimenzionalnog sudara kuglica možete preuzeti s Interneta [11]. Za prevođenje programa na strojni jezik računala može se koristiti bilo koji komercijalni ili besplatni prevoditelj (compiler) za C jezik. Jedan od besplatnih prevoditelja za Windows je Dev-C++ [12]. Instalirajte ovaj prevoditelj na vaše računalo i u prozoru editora (File/Open Project or File) otvorite datoteku `Sudari1d.c` koju ste prethodno preuzeli s Interneta [11] i snimili na vaše računalo. Prevedite program izborom `Execute/Compile`, a zatim ga izvršite pomoću `Execute/Run`. Kad se program završi formira se izlazna datoteka `Rezultat.txt` koju možete otvoriti i čitati u editoru Dev-C++ ili u bilo kojem drugom tekstualnom editoru koji je instaliran na vašem računalu (npr. Notepad). Ako koristite Dev-C++ izlaznu datoteku s rezultatima možete otvoriti izborom `File/Open Project or File`, ako nakon toga u prozoru `Open file` izaberete prvo `Files of type: All files (*.*)`, a zatim `Rezultat.txt`. Program `Sudari1d.c` u verziji s Interneta simulira samo 10 sudara, i to za samo tri kuglice, ali se ti brojevi (kao i drugi parametri simulacije) lako mogu promijeniti u editoru Dev-C++. Prvi red u izlaznoj datoteci `Rezultat.txt` sadrži broj sudara, drugi broj kuglica u simulaciji, treći gustoću kuglica duž pravca, četvrti promjer kuglice, a peti rastojanje  $L$  između zidova. U simulaciji pojam gustoće je broj između 0 i 1 i jednak je:  $(\text{broj kuglica} \cdot \text{promjer kuglice})/L$ . Dakle, ako je taj broj veći (bliži jedinici) između zidova se nalazi više kuglica, a ako je manji (bliži nuli) između zidova se nalazi manje kuglica. Na početku simulacije kuglice su na jednakim razmacima, a njihove početne brzine su slučajni pozitivni i negativni brojevi, po iznosu između 0 i 1. U izlaznu datoteku `Rezultat.txt` program piše od šestog reda koordinate i brzine svih kuglica u trenutku sudara i to: prvo koordinate kuglica u jednom redu, a onda u idućem redu odgovarajuće brzine kuglica i tako naizmjenice za sve sudare u simulaciji.

Predlažemo vam da analizirate jednodimenzionalne sudare kuglica kao važan zadatak iz fizike. Komentari u programu `Sudari1d.c` [11] mogu vas voditi u analizi računalnog programa. Sudare kuglica možete simulirati uporabom bilo kojeg programskog jezika. Programski jezik C je vrlo značajan za suvremenu znanost i primjene te ga je dobro učiti već u školi [8,9,10]. Pored Dev-C++-a za prevođenje i izvršavanje programa u C-u možete koristiti besplatne prevoditelje `lcc` (Windows) [13] i `gcc` (Linux, Windows) [14].

## Literatura

---

- [1] J. DUBINSKI, *Milky Way–Andromeda Galaxy Collision*,  
<http://haydenplanetarium.org/resources/ava/page/index.php?file=G0601andmilwy>
- [2] CERN: *Large Hadron Collider, animacija sudara*,  
[http://hands-on-cern.physto.se/ani/acc\\_lhc\\_atlas/lhc\\_atlas.swf](http://hands-on-cern.physto.se/ani/acc_lhc_atlas/lhc_atlas.swf)
- [3] *HyperPhysics, Collisions in One Dimension*,  
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/col1d.html-c1>
- [4] I. VORAS, *Java Applet za simulaciju jednodimenzionalnog gibanja i sudara kuglica*,  
[http://eskola.hfd.hr/inter\\_fizika/voras/eskolasim\\_kugle.html](http://eskola.hfd.hr/inter_fizika/voras/eskolasim_kugle.html)
- [5] V. PAAR, *Fizika I*, Školska knjiga, Zagreb (1997).
- [6] T. ANDREIS, M. PLAVČIĆ, N. SIMIĆ, *Fizika I*, Profil, Zagreb (2002).
- [7] S. KRIŽ, A. ŠVOB, G. BILALBEGOVIĆ, *Programski jezik F i Fortrani (1954. – 2003.): Madelungova konstanta jednodimenzionalnog kristala NaCl*, Matematičko-fizički list, LV 1 (2004. – 2005.).
- [8] M. BRAIN, *How C Programming Works*,  
<http://computer.howstuffworks.com/c.htm>
- [9] V. TOMIĆ, T. ANDROKOVIĆ, *Programski jezik C*, udžbenik za četvrti razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb (2006).
- [10] R. VULIN, *Zbirka riješenih zadataka iz C-a* (za srednje škole), Školska knjiga, Zagreb (2003).
- [11] I. RONČEVIĆ, *Program za simulaciju jednodimenzionalnog sudara kuglica*,  
<http://www.phy.hr/~goranka/Igor/Sudari1d.c>
- [12] *Dev-C++*, besplatni prevoditelj za programske jezike C i C++,  
[http://prdownloads.sourceforge.net/dev-cpp/devcpp-4.9.9.2\\_setup.exe](http://prdownloads.sourceforge.net/dev-cpp/devcpp-4.9.9.2_setup.exe)
- [13] *lcc-win32: A Compiler system for windows*,  
<http://www.cs.virginia.edu/~lcc-win32/>
- [14] *GCC, the GNU Compiler Collection*, <http://gcc.gnu.org/>