Сојузен натпревар 1963

III година

1. Докажи дека за секое реално решение x на равенката $x^2+px+q=0$ (p и q се реални броеви) важи

$$x \geq \frac{4q-(p+\lambda)^2}{4\lambda},$$

каде λ е произволен позитивен број.

Решение. Нека $p^2 \geq 4q$ (само во тој случај равенката има реални решенија), $\lambda > 0$ и $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Тогаш

$$x-\frac{4q-(p+\lambda)^2}{4\lambda}=\frac{(\lambda\pm\sqrt{p^2-4q})^2}{4\lambda}\geq 0.$$

2. Реши ја неравенкта

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2},$$

каде a е реален параметар.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката

$$\frac{(x-3a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}>0.$$

Множеството решенија на последната неравенка е:

$$(-\infty,0)\cup(0,+\infty), \text{ ако } a=0,$$

$$(-\infty,-2a)\cup(-a,a)\cup(3a,+\infty), \text{ ако } a>0,$$

$$(-\infty,3a)\cup(a,-a)\cup(-2a,+\infty), \text{ ако } a<0.$$

3. Нека a,b,c се страните на триаголникот и α,β,γ се неговите агли. Докажи дека за острите агли x,y,z кои се определени со равенствата

$$\cos x=\frac{a}{b+c}, \cos y=\frac{b}{c+a}, \cos z=\frac{c}{a+b}$$

важат следниве равенства

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Да забелжиме дека за $0<\varphi<\pi$ важи $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$. Користејќи ја оваа формула добиваме

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1-\cos y}{1+\cos y}+\frac{1-\cos z}{1+\cos z}=\frac{b+c-a}{b+c+a}+\frac{a+c-b}{a+c+b}+\frac{a+b-c}{a+b+c}=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)^3}}\,. \qquad (1)$$

Според косинусната теорема имаме $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Понатаму:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a))b+c+a)}\,.$$

Слични формули имаме и за $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Затоа

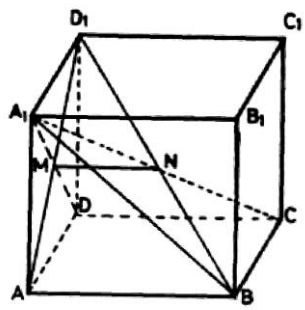
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)^3}}\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува равенството

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

4. Основата на пирамидата е паралелограм. Низ еден раб на основата и средната линија на бочниот ѕид наспроти тој раб повлечена е рамнина. Во кој одно оваа рамнина го дели волуменот на пирамидата?

Решение. Нека A_1ABCD е дадената пирамида (со основа $ABCD$), потоа $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелопипед (со рабови BB_1, CC_1, DD_1), V е волуменот на тој паралелопипед и M и N се соодветно средини на отсечките A_1D и A_1C (цртеж десно). Тогаш



$$V_{A_1ABCD}=\tfrac{1}{3}V\,,$$

$$V_{A_1ABNM}=V_{D_1A_1AB}-V_{D_1A_1MN}$$

$$=\tfrac{1}{6}V-\tfrac{1}{24}V=\tfrac{3}{24}V=\tfrac{3}{8}V_{A_1ABCD}.$$

Според тоа, рамнината $ABNM$ го дели волуменот на пирамидата A_1ABCD во однос 5:3.

IV година

1. Од квадрат со страна $2a$ исечени се четири рамнокраки триаголници, чии основи се страните на дадениот квадрат и чии висини се еднакви на x. Преостанатиот дек на квадратот претставува мрежа на правилна четиристрана пирамида.

а) Изрази го волуменот V на таа пирамида во функција од параметарот x.

б) Определи го x така што волуменот V ќе биде најголем.

в) Скицирај го графикот на функцијата $V(x)$.

Решение. а) Се добива пирамида со основа квадрат со дијагонала $2a-2x$. Лесно се добива дека бочниот раб и висината на пирамидата соодветно се еднакви на $\sqrt{a^2+x^2}$ и $\sqrt{2ax}$. Оттука за волуменот на пирамидата добиваме

$$V(x)=\frac{1}{3}\frac{(2a-2x)^2}{2}\sqrt{2ax}=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\sqrt{x}(a-x)^2,$$

каде $0<x<a$.

б) За функцијата $V(x)$ имаме:

$$V'(x)=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{(a-x)(a-5x)}{2\sqrt{x}}.$$

Понатаму,

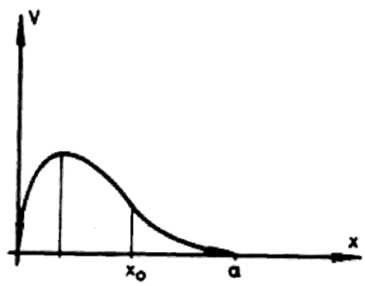
- $V'(x)>0$, ако $0<x<\frac{a}{5}$,
- $V'(x)=0$, ако $x=\frac{a}{5}$,
- $V'(x)<0$, ако $\frac{a}{5}<x<a$.

Според тоа, функцијата $V(x)$ расте на интервалот $(0,\frac{a}{5})$ и опаѓа на интервалот $(\frac{a}{5},a)$, а во точката $x=\frac{a}{5}$ има минимум.

в) Вториот извод на функцијата е

$$V''(x)=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{15x^2-6ax-a^2}{4x\sqrt{x}},\ 0<x<a.$$

Квадратниот трином $15x^2-6ax-a^2$ има во интервалот $(0,a)$ нула $x_0=\frac{3+\sqrt{24}}{15}a$. Ова е превојна точка на функцијата $V(x)$ чиј график е прикажан на цртежотдесно.



2. Докажи дека во рамнокрак триаголник со основа c, крак a и симетрала d на аголот на основата важи равенството

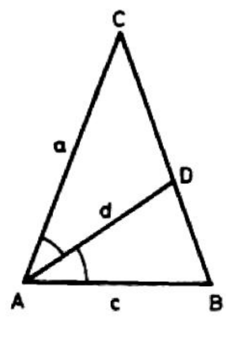
$$d^2=c^2\frac{a(2a+c)}{(a+c)^2}.$$

Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AB и нека D е пресекот на симетралата на аголот во темето A со кракот BC (цртеж десно). Тогаш

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{a} \text{ и } BD+DC=a,$$

па затоа $BD=\frac{ac}{a+c}$, $DC=\frac{a^2}{a+c}$. Од косинусната теорема следува

$$(\frac{ac}{a+c})^2=c^2+d^2-2cd\cos\frac{A}{2},$$
$$(\frac{a^2}{a+c})^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{A}{2}.$$



Ако од последните две равенства го елеминираме $\cos\frac{A}{2}$ го добиваме равенството $d^2=c^2\frac{a(2a+c)}{(a+c)^2}$.

3. Нека AB е дијаметарот на кружницата K со радиус R која припаѓа на рамнината α и нека S е точка која припаѓа на нормалата на рамнината α во точката B. Низ точката S е повлечена рамнина β, која е нормална на рамнината ABS и која со рамнината α формира агол од $\frac{\pi}{3}$.

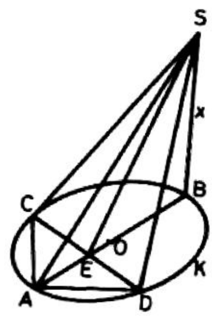
а) Определи ги граничните вредности за $x = BS$ така што β ја сече кружницата K во две точки C и D.

б) Докажи дека аглите SCA и SDA се прави.

в) Определи го збирот y на квадратите на рабовите на тетратедарот $SDAC$ во функција од x и R.

г) Определи го геометриското место на екстремот на функцијата $y(x)$ кога R се менува.

Решение. а) Нека E е пресекот на рамнината β и правата AB. Триаголникот SEB е правоаголен, при што $\measuredangle SBE = \frac{\pi}{2}, \measuredangle SEB = \frac{\pi}{3}$, па затоа $BE = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Точката E е внатрешна точка за отсечката AB (т.е. кружницата K и рамнината β имаат две заеднички точки) ако и само ако $0 < x < 2R\sqrt{3}$.



б) Нека $0 < x < 2R\sqrt{3}$ и нека O е центар на кружницата K. Тогаш $OE = | BE - BO | = | \frac{x}{\sqrt{3}} - R |$. Да заблежиме дека триаголниците CEO, CEA, SBE, SBA, SEC се правоаголни со прави агли кај темињата E, E, B, B, E (цртеж десно). Сега од Питагоровата теорема следува:

$$CE^2 = CO^2 - OE^2 = R^2 - (\frac{x}{\sqrt{3}} - R)^2 = \frac{2Rx}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{3},$$

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = (2R - \frac{x}{\sqrt{3}})^2 + \frac{2Rx}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{3} = 4R^2 - \frac{2Rx}{\sqrt{3}},$$

$$SC^2 = SE^2 + CE^2 = SB^2 + BE^2 + CE^2 = x^2 + \frac{2Rx}{\sqrt{3}},$$

$$SC^2 + AC^2 = x^2 + 4R^2 = BS^2 + AB^2 = SA^2.$$

Според тоа, триаголникот SCA е правоаголен со прав агол во темето C. Аналогно се докажува дека аголот SDA е прав.

в) Имаме:

$$y = SA^2 + SD^2 + AD^2 + SC^2 + AC^2 + CD^2 = 3\rangle SA^2 + CD^2 = \frac{5}{3}x^2 + \frac{8R}{\sqrt{3}}x + 12R^2 .$$

г) Координатите на темето на параболата се

$$x = -\frac{4\sqrt{3}}{5}R, \; y = \frac{44}{5}R^2 ,$$

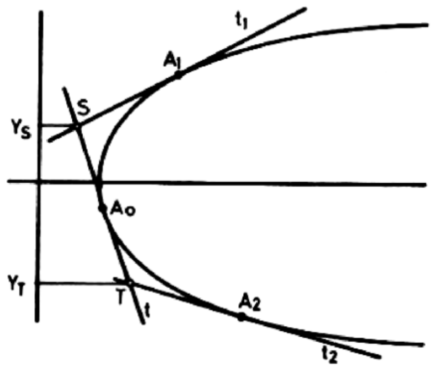
од каде со елиминирање на параметарот R го добиваме геометриското место на темето

$$y=\frac{55}{12}x^2,\quad x<0\,.$$

(Добиената квадратна функција ја разгледувавме како функција која е определена на множеството од сите реални броеви. Функцијата $y(x),\ 0<x<2R\sqrt{3}$ нема екстреми.)

4. Отсечокот на произволна тангента на параболата $y^2=2px$, ограничен со две фиксирани тангенти на параболата, ортогонално се проектира на директрисата на параболата. Докажи дека должината на оваа проеција е константна.

Решение. Нека $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$ се фиксирани точки на дадената парабола, $A_0(x_0,y_0)$ е произволна точка од параболата (цртеж десно). Тангентите t_0,t_1,t_2 на параболата соодветно во точките $A_0,A_1,\ A_2$ се определени со равенките:



$$x-x_0=\frac{y_0}{p}(y-y_0),$$

$$x-x_1=\frac{y_1}{p}(y-y_1),$$

$$x-x_2=\frac{y_2}{p}(y-y_2).$$

Нека $S(x_S,y_S)$ е пресекот на правите t_0 и t_1, а $T(x_T,y_T)$ епресекот на правите t_0 и t_2. Тогаш

$$y_S=\frac{1}{2}(y_1+y_0)\ \text{и}\ y_T=\frac{1}{2}(y_2+y_0)\,.$$

Бидејќи директрисата на параболата $y^2=2px$ е паралелна со $y-$оската, добиваме дека должината на проекцијата на отсечката ST на таа директриса е еднаква на

$$|\,y_S-y_T\,|=\frac{1}{2}\,|\,y_1-y_2\,|$$

и не зависи од точкаsa A_0.