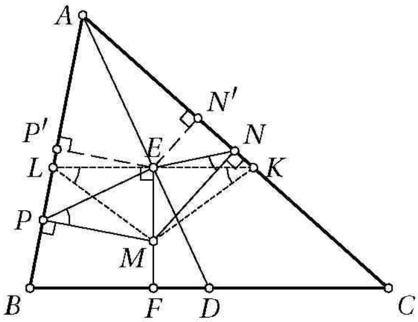
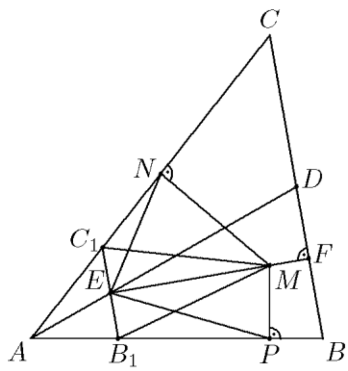
БМО 2000

1. Задачата е иста со четвртата задача од БМО 1997 година

2. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија $AD\,(D \in BC)$. Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC, M е внатрепна точка на отсечката EF, а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M на правите AC и AB, соодветно. Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглите PMN и PEN немаат заеднички точки.



Решение. *Прв начин.* Нека правата низ E паралелна на правата BC ги сече страните AC и AB соодветно во точките K и L. Од Талесовата теорема следува $\overline{EK} = \overline{EL}$, па затоа $\triangle MKL$ е рамнокрак. Освен тоа четириаголниците $MENK$ и $MELP$ се тетивни, па затоа важи $\measuredangle MNE = \measuredangle MKE = \measuredangle MLE = \measuredangle MPE$. Ако P' и N' се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од точката E на страните AB и AC, тогаш од претходно изнесеното следува $\measuredangle PEP' = \measuredangle NEN'$, па затоа симетралите на аглите $\measuredangle PEN$ и $\measuredangle P'EN'$ се совпаѓаат. Бидејќи симетралите на аглите $\measuredangle P'EN'$ и $\measuredangle PMN$ се паралелни, останува само да забележиме дека тие не се совпаѓаат, бидејќи во спротивно двете симетрали би се совпаѓале со правата ME, што не е можно затоа што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.



Втор начин. Прво ќе докажеме дека $\measuredangle ENM = \measuredangle EPM$. Нека l е правата низ E паралелна со BC. Со B_1 и C_1 да ги означиме пресечните точки на l со AB и AC, соодветно. Јасно, E е средина на B_1C_1 и $EM \perp B_1C_1$. Според тоа, $\triangle B_1C_1M$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle MC_1B_1 = \measuredangle MB_1C_1$. Од друга страна $\measuredangle Mc_1B_1 = \measuredangle ENM$, бидејќи точките E, M, N, C_1 лежат на кружницата со дијаметар EM. Аналогно, $\measuredangle MB_1C_1 = \measuredangle EPM$, па затоа $\measuredangle ENM = \measuredangle EPM$.

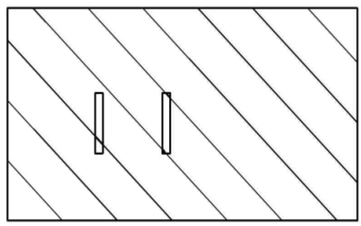
Понатаму, $\measuredangle PMN$ и $\measuredangle PEN$ ќе ги поистоветуваме со соодветните внатрешни агли на четириаголникот $EPMN$ (може да е конкавен, па дури и дегенериран кога $E \in PN$).

Без ограничување на општоста ќе сметаме дека симетралата на $\measuredangle PEN$ ја сече правата MP во точка Q. Тогаш

$$\measuredangle EQP = 180^\circ - \measuredangle PEQ - \measuredangle MPE = \tfrac{\measuredangle PMN}{2},$$

па затоа симетралите на $\measuredangle PEN$ и $\measuredangle PMN$ се паралелни. Останува да докажеме дека тие не се совпаѓаат. Имено, во спротивно симетралата на $\measuredangle PEN$ ќе минува низ M. Тогаш $\triangle EMN \cong \triangle EPN$, па затоа $\overline{MN} = \overline{MP}$. Сега $\triangle MNC_1 \cong \triangle MPB_1$, па затоа $\measuredangle MC_1N = \measuredangle MB_1P$. Бидејќи $\measuredangle MC_1B_1 = \measuredangle MB_1C_1$, следува дека $\measuredangle AC_1B_1$ $= \measuredangle AA_1C_1$. Тоа значи дека $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC$, што противречи на условот дека триаголникот ABC е разностран.

3. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90, ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.



Решение. Нека темињата на правоаголникот се $A(0,0), B(90,0), C(90,50)$ и $D(0,50)$. Да ги повлечеме правите

$$L_n:\ x+y=10n\sqrt{2}\ ,$$

каде $n=1,2,3,...,[\frac{90+50}{10\sqrt{2}}]=9$ и да ги разгледуваме отсечките кои правоаголникот $ABCD$ ги отсекува од нив. Бидејќи горните прави зафаќаат агол од 45° со секоја од координатните оски, лесно се пресметува дека збирот на должините на отсечките од овие прави, кои лежат во произволен правоаголник со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ и страни паралелни на координатните оски е $\sqrt{2}$. Со l_n да ја означиме должината на отсечката од правата L_n која лежи во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$. Со едноставни пресметувања се добива дека

$$l_1=20,\quad l_2=40,\quad l_3=60,\quad l_4=l_5=l_6=50\sqrt{2},$$
$$l_7=140\sqrt{2}-140,\ \ l_8 140\sqrt{2}-160,\ \ l_9=140\sqrt{2}-180.$$

Според тоа, вкупната должина на тие отсечки е еднаква на $570\sqrt{2}-360$. Сега, ако вкупниот број на правоаголниоци со димензии е $1\times 10\sqrt{2}$, бидејќи секој ваков правоаголник покрива отсечка со должина $\sqrt{2}$, добиваме дека е сиполнето неравенството $t\sqrt{2}\le 570\sqrt{2}-360$. Но, $316>\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}>315$, па затоа $t\le[\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}]=315$.

Ќе покажеме како може да се отсечат 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$.

Бидејќи $90 > 60\sqrt{2}$ дадениот правоаголник можеме да го поделиме на правоаголници со димензии $50 \times 60\sqrt{2}$ и $50 \times (90-60)\sqrt{2}$. Првиот правоаголник го делиме на 50 правоаголници со димензии $1 \times 60\sqrt{2}$, а потоа секој од нив го делиме на 6 правоагиолници со димензии $1 \times 10\sqrt{2}$ и така првиот правоаголник може да подели на 300 правоаголници $1 \times 10\sqrt{2}$. Бидејќи $(90-60)\sqrt{2} > 5$ и $50 > 30\sqrt{2}$ од вториот правоаголник може да се отсечат уште $3 \cdot 5 = 15$ правоаголници со димензии $1 \times 10\sqrt{2}$, Според тоа, од дадениот правоаголник може да се добијат 315 правоаголници со димензии $1 \times 10\sqrt{2}$.

4. Природниот број r го нарекуваме степен ако може да се прикаже во облик $r = t^s$, каде $t, s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Докажи, дека за секој природен број n постои множество природни броеви A, кои ги задоволуваат условите
1) A има n елементи,
2) сите елементи на A се степени, и
3) за секои $r_i \in A, i = 1, 2, ..., k, 2 \le k \le n$ бројот $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i$ е степен.

Решение. Ќе го користиме следново тврдење:
Лема. За секој $k \in \mathbb{N}$ постои $x \in \mathbb{N}$ таков што броевите $x, 2x, 3x, ..., kx$ се степени.
Доказ. Нека се $2 = p_1 < p_2 < ... < p_k$ првите k прости броеви. Броевите $i = 1, 2, ..., x$ ги запишуваме во видот $i = p_1^{r_{i,1}} p_2^{r_{i,2}} ... p_k^{r_{i,k}}$. Можеме да избереме x таков што ix е точен p_i – ти степен за $i = 1, 2, ..., k$. Навистина, доволно е да се најде x во видот $x = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$ таков што $s_j + r_{i,j}$ е делив со p_i за секои i, j, а такви степени $s_1, s_2, ..., s_k$ постојат според Кинеската теорема за остатоци. ■
Множеството A ќе го побараме во облик $\{m, 2m, 3m, ..., nm\}$. Ако ставиме $m = n!x$, тогаш сите броеви од видот $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i$, за $r_i \in A, i = 1, 2, ..., k$ и $1 \le k \le n$ се цели и припаѓаат на множеството $B = \{x, 2x, ..., n \cdot n!x\}$. Сега е доволно да определиме x таков што сите елементи на множеството B се степени, а според лемата таков x постои.