Мр Живота Јоксимовић (Београд)

ПИТАГОРИНИ БРОЈЕВИ[1]

1. Као што је познато, Питагорина теорема гласи: Површин квадрата конструисаног над хипотенузом правоуглог троугла једнак је збиру површина квадрата конструисаних над катетама тог троугл: Важи и обрнуто: Ако је код неког троугла површина квадрата на највећом страницом једнака збиру површина квадрата конструисани над оним другим двема страницама, тада је тај троугао правоугли Због тога, ако се мерни бројеви катета правоуглог троугла обележе с a и b, а мерни број хипотенузе обележи са c, добија се једначина

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (1$$

и обратно, ако мерни бројеви страница троугла задовољавају ову једначину, троугао је правоугли.

Сад се поставља питање: да ли постоје таква три цела позитивна броја a, b и c који задовољавају једначину (1)? Одговор је потврдан, јер се већ од давнашњих времена зна да су такви бројеви, на пример, 3, 4 и 5. Сем тога, лако се утврђује да и умношци ових бројева, на пример тројке $(6,8,10)$, $(12,16,20)$ и, уопште, $(3n,4n,5n)$ такође задовољавају једначину (1). Но нас интересује да пронађемо тзв. *основна решења* ове једначине, тј. оне тројке природних бројева које се не могу добити из других, већ нађених оваквих тројки, множењем неким бројем, а задовољавају ову једначину. Зато ћемо се најпре упознати са неким елементарним појмовима Теорије бројева, којој у ствари овај проблем и припада.

2. Претпостављамо да читаоци знају шта су то прости и сложени бројеви и да им је, макар само на основу искуства, познато следеће: да се сваки сложени број може представити као производ простих чинилаца, и то само на један начин. То каже и тзв. „основна теорема аритметике“, коју овде нећемо доказивати. Зато сваки сложени број можемо изразити у виду

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \qquad (n > 1),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ представљају просте чиниоце броја a. Међутим, међу овим простим чиниоцима може бити и једнаких. Зато, ако са $p_1, p_2, \ldots, p_k$ означимо различите просте чиниоце броја a и ако се p_1 као чинилац броја a јавља l_1 пута, а p_2 се јавља l_2 пута, итд., тада се број a може представити овако:

$$a = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k}.$$

Тако је, на пример, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ и то је тзв. „каноничко представљање" сложеног броја 360.

Даље претпостављамо исто тако да читаоци знају шта су то заједнички чинилац, највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац два сложена броја, као и да се за два броја каже да су узајамно прости ако сем броја 1 немају заједничких чинилаца. То нам је потребно ради даљег нашег излагања.

А сада докажимо следећу теорему која је веома важна кад је у питању изналажење основних решења Питагорине једначине, а која гласи: ако су a и b два узајамно проста броја и ако је $ab = c^2$, онда постоје природни бројеви x и y такви да је $a = x^2$ и $b = y^2$, то јест у том случају a и b представљају квадрате природних бројева.

Доказ. Разложимо бројеве a и b на просте чиниоце у виду:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}, \qquad b = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_n^{l_n},$$

где су $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ међусобно различити прости бројеви, а $k_1, k_2, \ldots, k_m, l_1, l_2, \ldots, l_n$ некакви природни бројеви. На основу тога је

$$c^2 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m} \cdot q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_n^{l_n}. \tag{4}$$

Нека је, пак, са своје стране,

$$c = r_1^{s_1} r_2^{s_2} \ldots r_t^{s_t}, \tag{5}$$

где су $r_1, r_2, \ldots, r_t$ међусобно различити прости чиниоци броја c, и где су $s_1, s_2, \ldots, s_t$ некакви природни бројеви. Тада је:

$$c^2 = r_1^{2s_1} r_2^{2s_2} \ldots r_t^{2s_t}, \tag{6}$$

јер се приликом квадрирања сваког природног броја изложиоци свих његових простих чинилаца удвајају.

Из једнакости (4) и (6) следује:

$$r_1^{2s_1} r_2^{2s_2} \dots r_t^{2s_t} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} \cdot q_1^{l_1} q_2^{l_2} \dots q_n^{l_n}.$$

Но, како се, према наведеној основној теореми аритметике, сваки природан број може само на један начин изразити као производ простих чинилаца, то мора бити $m+n=t$ и сваки од чинилаца $p_1^{k_1}$, $p_2^{k_2}, \dots, p_m^{k_m}, q_1^{l_1}, q_2^{l_2}, \dots, q_n^{l_n}$ мора бити једнак по једном од чинилаца $r_1^{2s_1}, r_2^{2s_2}, \dots, r_t^{2s_t}$. Отуд пак следује да је сваки од изложилаца k_1, $k_2, \dots, k_m, l_1, l_2, \dots, l_n$ дељив са 2, односно да су a и b квадрати природних бројева.

3. Вратимо се сад проблему изналажења основних решења Питагорине једначине и утврдимо неке особине тих решења.

1) Да би једно решење било основно решење Питагорине једначине, потребно је да бројеви a, b и c буду, два по два, узајмно прости. Јер ако би два од њих, на пример a и b, имали заједнички делилац p (p је прост број), он би био и делилац броја c (што може читалац и сам лако да докаже).

Отуд пак следује да само један од бројева a, b и c може бити паран, јер, ако би два од њих била парна, такав би био и трећи, па нађено решење не би било основно.

2) Не могу сви бројеви a, b, c бити непарни. Претпоставимо наиме, да су сви они непарни, тј. да је $a = 2k+1$, $b = 2l+1$, $c = 2m+1$. Тада би било

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2l+1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &+ 4l^2 + 4l + 1 = 4(k^2 + l^2) + 4(k+l) + 2, \end{aligned}$$

што би значило да је c^2 паран број; а то би било супротно претпоставци да је c непаран број.

3) Остаје нам, дакле, могућност да од три броја a, b буду два непарна и један паран и при томе тврдимо да c мора бити непаран. Јер, ако би c био паран, а a и b непарни ($a = 2k+1$, $b = 2l+1$), онда би број c био дељив са 4, док број $a^2 + b^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2$

не би био дељив са 4, па бисмо дошли до противуречности. Значи, остаје нам једина могућност да је c непаран број, а од два броја a и b један је паран, а други непаран.

4) Претпоставимо сада да је од два броја a и b број a непаран, а број b паран и напишимо Питагорину једначину у облику $b^2 = c^2 - a^2$, односно у облику:

$$b^2 = (c+a)(c-a). \tag{7}$$

Како су бројеви c и a непарни, бројеви $c+a$ и $c-a$ биће парни, али осим броја 2 они неће имати других заједничких чинилаца, па ће бројеви $\dfrac{c+a}{2}$ и $\dfrac{c-a}{2}$ бити два узајамно проста броја. То се види отуд што би се, када би ова два броја имала неки заједнички чинилац p, могло написати да је

$$\frac{c+a}{2} = mp, \qquad \frac{c-a}{2} = np,$$

одакле произилази да је $c = p(m+n)$, $a = p(m-n)$, односно да би и бројеви a и c имали један заједнички чинилац p; а то противуречи претпоставци да су они два узајамно проста броја.

5) Поделимо сад леву и десну страну једнакости (7) са 4. Тако добијамо једнакост

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2}.$$

Пошто је b, по претпоставци, паран број, на левој страни ове једнакости налази се квадрат једног природног броја, док се на њеној десној страни налази производ два узајамно проста природна броја, а то значи – према оном што је било речено у другом делу овог излагања – да и сваки од бројева $\dfrac{c+a}{2}$ и $\dfrac{c-a}{2}$ представља квадрат по једног природног броја. Полазећи од тога можемо написати да је

$$\frac{c+a}{2} = m^2, \qquad \frac{c-a}{2} = n^2, \tag{9}$$

с тим што треба имати у виду да су m и n два узајамно проста броја и да је $m > n$, пошто је $c+a > c-a$.

Из једнакости (9) добија се да је

$$c = m^2 + n^2, \quad a = m^2 - n^2,$$

а одатле закључујемо да један од бројева m и n мора бити паран, а други непаран, пошто би иначе c и a били парни бројеви.

Напослетку, заменом бројева a и c у једначини $a^2 + b^2 = c^2$ изразима $m - n$ и $m + n$, добијамо да је $b = 2mn$.

И тако смо доказали да свакој основној тројци Питагориних бројева (a, b, c) одговарају по два броја m и n која су са овим бројевима повезана једнакостима:

$$c = m^2 + n^2, \quad a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \tag{10}$$

с тим да они испуњавају услове да је $m > n$, да су узајамно прости и да је један од њих паран, а други непаран број.

Та два броја можемо за дату тројку (a, b, c) Питагориних бројева одредити по обрасцима:

$$m = \sqrt{\frac{a + c}{2}}, \qquad n = \sqrt{\frac{a - c}{2}}.$$

Но, из овога произилази да и обрнуто, свака тројка бројева a, b, c која се добије кад се у обрасцима (10) m и n замене бројевима који задовољавају наведене услове, представља по једно основно решење једначине (1), односно да се варирањем бројева m и n у обрасцима (10), уз поштовање наведених услова, могу добити сва основна решења Питагорине једначине. То се доказује овако:

1) Ако се у једначини $a^2 + b^2 = c^2$ уместо a, b и c унесу, редом, изрази $m^2 - n^2$, $2mn$ и $m^2 + n^2$, долази се до идентитета $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$, што значи да овако добијене вредности за a, b и c увек задовољавају једначину (1).

2) Ако су m и n два узајамно проста броја од којих је један паран а други непаран и ако је $m > n$, онда изрази $m - n$, $2mn$ и $m^2 + n^2$ представљају бројеве од којих су свака два узајамно проста, па нађено решење представља једно од основних решења Питагорине једначине.

Задаци

1. Наћи првих 10 основних решења Питагорине једначине допуњујући следећу таблицу:

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	14	25
5	2	21	20	29
...	...	...	...	...

2. Доказати да у Питагориној једначини $a^2 + b^2 = c^2$, бар један од бројева a и b мора бити дељив са 3.

3. Објаснити какви ће се бројеви добити на основу формула (10), ако се при варирању бројева m и n узму у обзир и бројеви који нису узајамно прости.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија