Републички натпревар 1987

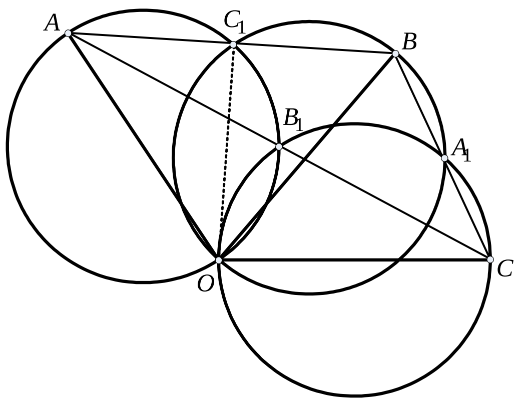
I година

1. Да се докаже дека при каков и да е избор на знаците $+$ или $-$ меѓу броевите $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$, добиената сума ќе биде различна од нула.

Решение. Добиената сума ќе ја запишеме во обликот: $(1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm ... \pm \frac{1}{12}) \pm \frac{1}{11}$. Еден заеднички именител за сите дропки во изразот е бројот $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 12$. По сведувањето на дропките под овој заеднички именител и собирањето на дропките во заградата добиваме број $\frac{A}{12!}$, каде што A е број делив со 11 (како сума на броеви деливи со 11). Сега сумата е еднаква со $\frac{A \pm 12 \cdot 10!}{12}$. Овој број е различен од нула, бидејќи бројот $12 \cdot 10!$ не е делив со 11, а збир или разлика на два броја од кои едниот е делив со 11, а другиот не е делив со 11 никогаш не е нула.

Забелешка. Наместо 11 во решението може да се користи и бројот 7.

2. Во рамнина се дадени три еднакви по должина отсечки OA, OB и OC при што точката B лежи во внатрешноста на помалиот агол AOC. Тие се дијаметри на три кружници кои освен во точката O се сечат и во точките A_1, B_1 и C_1. Докажи дека плоштината на криволинискиот трапез $A_1B_1C_1$ е половина од плоштината на триаголникот ABC.



Решение. Според ознаките од цртежот, триаголниците OAC_1 и OC_1B се складни бидејќи имаат една заедничка страна OC_1, $\overline{OA} = \overline{OB}$ и $\measuredangle OC_1B = \measuredangle AC_1O = 90^\circ$. Значи, C_1 е средина на страната AB. Слично се покажува дека B_1 и A_1 се средини на AC и BC соодветно, т.е. C_1B_1 и B_1A_1 се средни линии на триаголникот ABC. Оттука, $\overline{A_1B} = \overline{B_1C_1}$, па плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот B_1C_1 и отсечката B_1C_1 е еднаква на плоштината на кружниот отсечок ограничен со A_1B и A_1B. Слично се добива и за плоштните на кружните отсечоци чии лаци се BC_1 и A_1B_1.

Значи плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ е иста со плоштината на паралелограмот $A_1B_1C_1B$ што е половина од плоштината на триаголникот ABC.

3. Да се определи најголемиот природен број помал од бројот

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}$$

знаејќи дека $\sqrt[3]{6}>1,6$.

Решение. Знаејќи дека $\sqrt{6}>2,4$ и $\sqrt[3]{6}>1,6$ добиваме

$$4<\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}\,.$$

Од друга страна

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+3}}}=3$$

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+2}}}=2\,,$$

Односно

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<3+2=5\,.$$

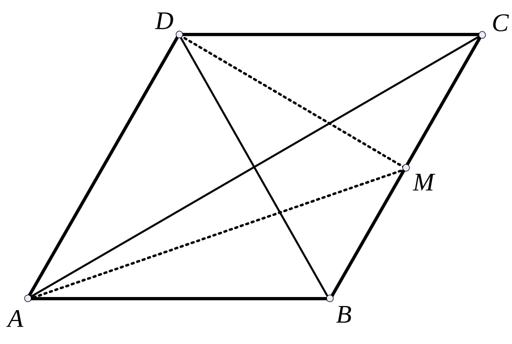
Значи, бараниот број е 4.

4. Даден е ромб $ABCD$. Пресечната точка на симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BDC$ лежи на една негова страна. Да се определат аглите на ромбот.

Решение. Пресекот на симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BDC$ го означуваме со M, при што M лежи на страната BC. Според теоремата за симетрали на внатрешни агли на триаголник, важат односите:

$$\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{AB}:\overline{AC}$$

$$\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{BD}:\overline{CD}\,.$$



Оттука се добива дека

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD},\ \text{т.е.}\ \overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}.$$

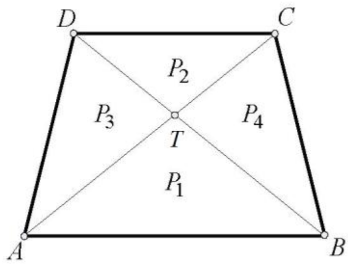
Ако страната на ромбот ја означиме со a, а висината со h, тогаш последното равенство го добива обликот: $2ah=a^2$, т.е. $a=2h$, што значи дека аглите на ромбот изнесуваат 60° и 120°.

II година

1. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Дијагоналите на трапезот се сечат во точката T. Ако P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците ABT и CDT, а P е плоштината на трапезот, да се докаже дека:

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2 .$$

Решение. Да го означиме односот $\overline{AB} : \overline{CD}$ со k. Триаголниците TAC и TCD се слични, па за нивните висини h_1 и h_2 соодветно важи $k = h_1 : h_2$. Оттука за плоштината P на трапезот добиваме



$$P = \tfrac{1}{2} h(\overline{AB} + \overline{CD}) = \tfrac{1}{2}(k \cdot \overline{CD} + \overline{CD})(kh_1 + h_1)$$

$$P = \tfrac{1}{2}(k+1)^2 h_2 \cdot \overline{CD}$$

$$P = (k+1)^2 P_2 . \qquad (1)$$

Триаголниците ABD и ABC имаат еднаква плоштина бидејќи имаат еднаква основа и висина. Оттука и триаголниците ABT и BCT имаат еднаква плоштина означена како P_3. Бидејќи

$$P_{ABC} = \tfrac{1}{2} \overline{AB} \cdot h = P_1 + P_3 \qquad (2)$$

$$P_{ACD} = \tfrac{1}{2} \overline{CD} \cdot h = P_2 + P_3 \qquad (3)$$

добиваме

$$P_1 + P_3 = k(P_2 + P_3) \qquad (4)$$

Ако во равенството

$$P = P_1 + P_2 + 2P_3 \qquad (5)$$

се примени (4), се добива

$$P = (k+1)(P_2 + P_3) \qquad (6)$$

Од (1) и (6) се добива $P_3 = kP_2$, и заменувајќи во (6) се добива дека $P_3 = \frac{1}{k} P_2$, па според тоа

$$P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{k \cdot P_2 \cdot \tfrac{1}{k} \cdot P_1} = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2 .$$

2. Ако

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0,$$

тогаш

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0 .$$

Докажи!

Решение. Воведуваме ознаки

$$A=\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y} \text{ и } B=\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}.$$

Ако A се помножи со изразот $C=\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}$, се добива

$$\begin{aligned}AC&=B+\frac{x+y}{(z-x)(y-z)}+\frac{x+z}{(y-z)(x-y)}+\frac{y+z}{(z-x)(x-y)}\\&=B+\frac{(x+y)(x-y)+(z-x)(x+z)+(y-z)(y+z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\\&=B\end{aligned}$$

Според тоа, ако $A=0$, тогаш и $B=0$.

3. Не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(7)=11$ и $P(11)=13$. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

ги исполнува условите од задачата. Ако ставиме $x=7$ и $x=11$ соодветно, од условите на задачата се добива

$$11=a_n7^n+a_{n-1}7^{n-1}+...+a_1\cdot 7+a_0$$

$$13=a_n11^n+a_{n-1}11^{n-1}+...+a_1\cdot 11+a_0.$$

Ако од второто равенство го извадиме првото равенство, се добива

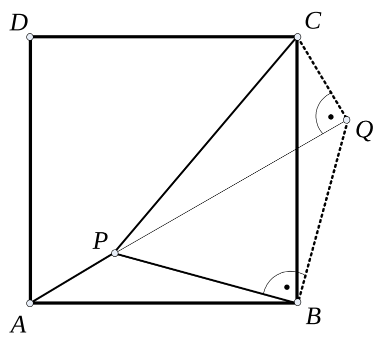
$$2=a_n(11^n-7^n)+a_{n-1}(11^{n-1}-7^{n-1})+...+a_1\cdot(11-7).$$

Бидејќи за секој $n\geq 1$, 11^n-7^n е делив со 4, изразот од десната страна на последното равенство е делив со 4. Бидејќи изразот од левата страна на истото равенство не е делив со 4 добиваме противречност.

4. Даден е квадрат $ABCD$ и точка P во внатрешноста на квадратот така што $\overline{AP}:\overline{BP}:\overline{CP}=1:2:3$. Да се пресмета аголот $\measuredangle APB$.

Решение. Триаголникот ABP го ротираме околу темето B се додека темето B не се совпадне со темето C. Со Q да ја означиме новата положбан на темето P по ротацијата. Бидејќи $\measuredangle QBC=\measuredangle PBA$ следува $\measuredangle QBП=90^\circ$. Заради ова, бидејќи $\overline{BP}=\overline{BQ}$ имаме

$$\measuredangle PQB=45^\circ \text{ и } \overline{PQ}^2=2\overline{BP}^2.$$



Од условот на задачата имаме $\overline{BP}=2\overline{AP}$,

$\overline{CP}=3\overline{AP}$ па оттука и од претходното равенство добиваме:

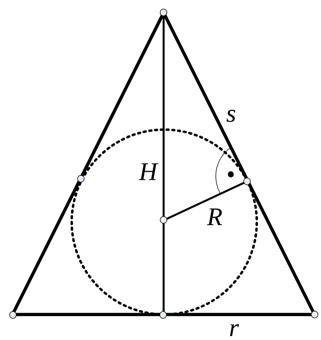
$$\overline{PQ}^2+\overline{CQ}^2=8\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=\overline{CP}^2 .$$

Бидејќи за триаголникот CQP важи теоремата на Питагора, $\measuredangle CQP=90^\circ$. Конечно

$$\measuredangle APB=\measuredangle CQB=\measuredangle PQB+\measuredangle CQP=45^\circ+90^\circ=135^\circ .$$

III година

1. Да се најде односот $k=\frac{M}{B}$, каде M е плоштината на обвивката на конусот, а B плоштината на неговиот базис, ако се знае дека волуменот на конусот е двапати поголем од волуменот на впишаната топка во него.



Решение. Нека H,s и r се соодветно висината, генератрисата и радиусот на базаисот на конусот и нека R е радиусот на впишаната топка. Од сличноста на триаголниците на цртежот, имаме:

$$\frac{r}{s}=\frac{R}{H-R} .$$

Оттука, бидејќи $H=\sqrt{s^2-r^2}$ добиваме $R=r\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}$.

Сега, ако со V_k и V_t ги означиме соодветно волуменот на конусот и топката, имаме:

$$\frac{V_k}{V_t}=\frac{\frac{\pi r^2 H}{3}}{\frac{4\pi r^3}{3}}=\frac{r^2\sqrt{s^2-r^2}}{4r^3\frac{s-r}{s+r}\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}}=\frac{(s+r)^2}{4r(s-r)} .$$

Од условот на задачата $\frac{V_k}{V_t}=2$, па од првиот и последниот член на горното равенство, добиваме:

$$8r(s-r)=(s+r)^2,$$

$$9r^2-6rs+s^2=0,$$

$$(3r-s)^2=0 .$$

Оттука $s=3r$, па $k=\frac{M}{B}=\frac{\pi rs}{\pi r^2}=\frac{s}{r}=3$.

2. Да се покаже дека не постои полином со целобројни коефициенти таков што $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$, каде a,b и c се три различни цели броеви.

Решение. Нека $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$. Воочуваме дека

$$\frac{P(a)-P(b)}{a-b}=\frac{a_n(a^n-b^n)+a_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+...+a_1(a-b)}{a-b} ,$$

и ова е цел број бидејќи коефициентите a_k се цели броеви и $a^k - b^k$ е деливо со $a-b$ ($k=1,2,3,...,n$). Од исти причини и $\frac{P(b)-P(c)}{b-c}$ и $\frac{P(c)-P(a)}{c-a}$ се цели броеви.

Да претпоставиме дека за горниот полином P важи $P(a)=b, P(b)=c$ и $P(c)=a$, каде a,b и c се различни цели броеви. Заради претходната дискусија имаме дека $\frac{b-c}{a-b}$, $\frac{c-a}{b-c}$ и $\frac{a-b}{c-a}$ се цели броев. Но бидејќи нивниот производ е еднаков на 1, секој од нив е еднаков на 1 или -1. Ако првиот број е еднаков на -1 добиваме $a=c$ што противречи на претпоставката. Од исти причини и останатите два броја не можат да бидат еднакви на -1. Затоа сите три броја се днакви на 1. Од овде добиваме

$$\begin{aligned} b-c &= a-b \\ c-a &= b-c \, . \\ a-b &= c-a \end{aligned}$$

Со одземање на второто равенство од првото се добива $b=c$, а ова противречи на претпоставката. Значи, не постои полином со бараните својства.

3. Нека $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функција за која се исполнети следниве два услови:

а) за било кои два реални броја x и y важи $f(x+y)=f(x)f(y)$

б) постои единствен реален број x_0 таков што $f(x_0)=1987$.

Да се докаже: ако за два реални броја x и y важи $f(x)=f(y)$, тогаш мора $x=y$ (т.е. функцијата е инјективна).

Решение. Според првиот услов на задачата, имаме

$$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)f(0)$$

од каде следува $f(0)=1$. Оттука

$$1=f(x+(-x))=f(x)f(-x),$$

од каде следува дека за секој x, $f(x)\neq 0$ и $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$. Сега, нека $f(x)=f(y)$, односно $\frac{f(x)}{f(y)}=1$. Од овде и заради претходниот заклучок добиваме

$$\begin{aligned} &f(x)f(-y)=1, \\ &f(x-y)=1, \\ &f(x_0)f(x-y)=1987, \\ &f(x_0+x-y)=1987. \end{aligned}$$

Бидејќи постои единствен број x_0 таков што $f(x_0)=1987$, следува

$$x_0+x-y=x_0,$$

односно $x=y$.

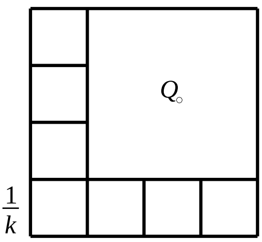
4. Да се докаже дека секое множество од шест различни едноцифрени броеви содржи две подмножества без заеднички елементи, такви што збирот на елементите на првото подмножество е еднаков на збирот на елементите од второто подмножество.

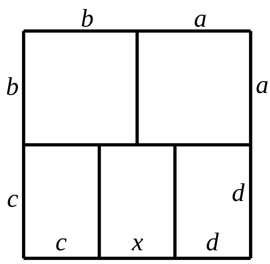
Решение. Бројот на непразни подмножества на множество од шест елементи е $2^6-1=63$ и ниту една од сумите на елементите во нив не е поголема од $6\cdot 9=54$, што значи дека со 63 различни подмножества можеме да формираме најмногу 54 различни збира. Според тоа, барем две подмножества ќе имаат еднаков збир на елементите. Ако тие подмножетва не се дисјунктни, тогаш од нив ќе ги извадиме заедничките елементи.

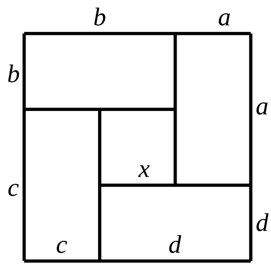
IV година

1. Да се докаже дека за секој природен број n, $n\geq 6$, квадрат може да се раздели на n помали квадрати (така што плоштината на квадратот е збир од плоштините на помалите квадрати), но не може да се раздели на 5 помали квадрати.

Решение. Можеме да претпоставиме дека квадратот Q има страна 1. Ако $k\geq 2$, тогаш лентите со ширина $\frac{1}{k}$ до две соседни страни на квадратот можеме да ги поделиме на $2k-1$ квадрати со страна $\frac{1}{k}$, како на цртежот. Остатокот од површината на Q е пак квадрат (означен на цртежот со Q_0). Со ова покажавме дека квадратот може да се подели на $2k$ ($k\geq 2$) квадрати.







Ако пак квадратот Q_0 го поделиме на четири еднакви квадрати, тогаш тие заедно со квадратите со страна $\frac{1}{k}$ ќе дадат поделба на квадратот Q на $2k+3$ квадрати ($k\geq 2$). Со ова покажавме дека Q може да се подели и на произволен непарен број (≥ 7) квадрати.

Сега да претпоставиме дека квадратот Q може да се подели на 5 помали квадрати. Јасно е дека овие квадрати мора да имаат страна паралелна со страните на квадратот. Можни се следниве два случаи:

1) Ниту еден од квадратите да не биде целосно во внатрешноста на Q како што е прикажано на цртежот. Ова не е можно бидејќи

$$a+b=b+c=d+a=c+d+x,$$

повлекува дека страната на средниот квадрат е $x=0$.

2) Некој од квадратите (а возможно е само еден) да биде исцело во внатрешноста на квадратот Q (како на цртежот) што повторно не е можно бидејќи

$$a+b=b+c=c+d=d+a$$

повлекува дека $a=c$ и $b=d$, па понатаму бидејќи плоштината на квадратот Q е еднаква на збирот од плоштините на помалите квадраати имаме

$$(a+b)^2=a^2+b^2+a^2+b^2+x^2,$$

т.е. $x^2=-(a-b)^2$, од каде $x=0$.

2. Неколку луѓе треба да ископаат еден канал. Ако започнат со работа истовремено, тогаш ќе го ископаат каналот за 24 часа. Меѓутоа тие на работа доаѓале еден по друг во еднакви временски интервали, а потоа секој работел до завршувањето на работата. Колку време работел работникот кој прв дошол на работа ако тој работел 5 пати подолго од работникот кој последен дошол на работа?

Решение. Со z да го означиме бројот на сите работници, x бројот на часови што ги поминал на работа работникот што последен дошол на работа и со y бројот на часовите на временскиот интервал на доаѓање на двата работника кои еден по друг дошле на работа. Тогаш за копање на каналот се потрошени вкупно $x+(x+y)+(x+2y)+...+(x+(z-1)y)$ работни часа, што по услов на задачата се еднакви на $24z$, т.е.

$$x+(x+y)+(x+2y)+...+(x+(z-1)y)=24z$$

Со оглед на тоа дека сумата на низа од првите $z-1$ природни броја е $\frac{(z-1)z}{2}$ се добива $xz+\frac{yz(z-1)}{2}=24z$, т.е.

$$2x+y(z-1)=48. \qquad (1)$$

Знаејќи дека првиот работник поминал на работа пет пати подолго време од последниот, мора да важи и равенството

$$x+y(z-1)=5x. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива дека $6x=48$, т.е. $x=8$.

Според тоа, првиот работник работел 40 часа.

3. Иста како задача 3 од трета година

4. Иста како задача 4 од трета година