Osječki matematički list 12 (2012), 153-168

LU-dekompozicija trodijagonalne i cikličke trodijagonalne matrice

Tomislav Živković *

Sažetak

U ovom radu analizirani su specijalni algoritmi za rješavanje velikih sustava linearnih jednadžbi, kod kojih je matrica sustava specijalnog oblika, trodijagonalna i ciklička trodijagonalna matrica. Dane su osnovne karakteristike i svojstva ovih algoritama. Izrađen je odgovarajući *Mathematica*–modul pomoću kojega je vrijeme izvođenja navedenih algoritama uspoređeno s vremenom potrebnim za rješavanje istih sustava primjenom opće LU-dekompozicije na "punu" matricu.

Ključne riječi: *sustavi linearnih jednadžbi, faktorizacija matrica*

LU-decomposition of tridiagonal and cyclic tridiagonal matrices

Abstract

In this paper, we analyze several special algorithms for solving large systems of linear equations that have a specific form, tridiagonal and cyclic tridiagonal matrices. We will show some basic characteristics and properties of those algorithms. The running time of given algorithms can be compared with the running time of general LU-decomposition applied on the same tridiagonal or cyclic tridiagonal systems in the corresponding *Mathematica*–module.

Keywords: *linear systems, factorization of matrices*

*student Odjela za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail: `tzivkovi@mathos.hr`

Uvod

Mnogi problemi iz primijenjenih istraživanja svode se na rješavanje velikih sustava linearnih jednadžbi $Ax = y$ gdje je A kvadratna matrica, x vektor nepoznanica, y vektor slobodnih koeficijenata. Matrica sustava često je specifičnog oblika, gdje su opći algoritmi za rješavanje sustava vremenski preskupi u odnosu na specijalne, koji koriste specijalnu strukturu matrice.

U ovom radu osvrnut ćemo se na dvije specijalne strukture matrica, trodijagonalnu i cikličku trodijagonalnu matricu, koje se primjerice pojavljuju pri rješavanju problema interpolacije prirodnim kubičnim splinom i pri rješavanju rubnog problema metodom diskretizacije (vidi [6], [8], [10], [11], [12], [13]).

Navodimo definicije trodijagonalne i cikličke trodijagonalne matrice.

Definicija 0.1. *Realna trodijagonalna matrica je matrica oblika*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Definicija 0.2. *Realna ciklička trodijagonalna matrica je matrica oblika*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \tag{2}$$

1 LU-dekompozicija trodijagonalne matrice

Rješavamo sustav linearnih jednadžbi $Ax = y$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ trodijagonalna matrica definirana u (1). Trodijagonalnu matricu A prikazat ćemo u obliku produkta donje trokutaste matrice L koja na glavnoj dijagonali ima jedinice i gornje trokutaste matrice U. Lako se vidi da su matrice L i U u ovom slučaju oblika

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & f_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e_n \end{bmatrix},$$

pri čemu su $d_i, e_i, f_i \in \mathbb{R}$.

Uspoređujući produkt

$$LU = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1e_1 & e_2 + d_1f_1 & f_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2e_2 & e_3 + d_2f_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{n-1} + d_{n-2}f_{n-2} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-1}e_{n-1} & e_n + d_{n-1}f_{n-1} \end{bmatrix}$$

s matricom A iz (1) dobivamo sustav od $(3n-2)$ linearne jednadžbe s $(3n-2)$ nepoznanice koji se lako sukcesivno rješava. Dobivamo:

$$\begin{aligned} e_1 &= a_1 & f_1 &= b_1 & d_1 &= \frac{c_1}{e_1} \\ e_2 &= a_2 - d_1f_1 & f_2 &= b_2 & d_2 &= \frac{c_2}{e_2} \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \\ e_{n-1} &= a_{n-1} - d_{n-2}f_{n-2} & f_{n-1} &= b_{n-1} & d_{n-1} &= \frac{c_{n-1}}{e_{n-1}} \\ e_n &= a_n - d_{n-1}f_{n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Sada umjesto sustava $Ax = y$ promatramo sustav $LUx = y$. Uz supstituciju $z := Ux$ ovaj sustav sukcesivno rješavamo tako da najprije riješimo donje trokutast sustav $Lz = y$, a nakon toga gornje trokutast sustav $Ux = z$. Rješenje i jednog i drugog sustava lako se može dobiti u eksplicitnom obliku:

$$\begin{aligned} Lz = y: \quad z_1 &= y_1 & Ux = z: \quad x_n &= \frac{z_n}{e_n} \\ z_2 &= y_2 - d_1z_1 & x_{n-1} &= \frac{z_{n-1} - f_{n-1}x_n}{e_{n-1}} \\ &\vdots & &\vdots \\ z_n &= y_n - d_{n-1}z_{n-1} & x_1 &= \frac{z_1 - f_1x_2}{e_1} \end{aligned} \tag{4}$$

Sljedeća lema pokazuje kako se rekurzivno mogu izračunati glavni minori [1] trodijagonalne matrice.

Lema 1.1. *Glavne minore trodijagonalne matrice (1) možemo izračunati rekurzivno*

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1, \\ \Delta_2 &= a_2\Delta_1 - b_1c_1, \\ \Delta_i &= a_i\Delta_{i-1} - b_{i-1}c_{i-1}\Delta_{i-2}, \quad i = 3,\dots,n. \end{aligned} \tag{5}$$

Dokaz. Formule za Δ_1, Δ_2 slijede iz definicije glavnih minora. Laplaceovim razvojem subdeterminante $\Delta_i, i = 3,\dots,n$ po zadnjem retku dobivamo

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & b_{i-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-2} & a_{i-1} & b_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{i-1} & a_i \end{vmatrix}$$

$$= a_i \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & b_{i-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-2} & a_{i-1} \end{vmatrix} - c_{i-1} \overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-2} & b_{i-1} \end{vmatrix}}^{\text{razvijamo po zadnjem stupcu}}$$

$$= a_i \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & b_{i-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-2} & a_{i-1} \end{vmatrix}}_{\Delta_{i-1}} - c_{i-1}b_{i-1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} \end{vmatrix}}_{\Delta_{i-2}}$$

$$= a_i\Delta_{i-1} - b_{i-1}c_{i-1}\Delta_{i-2}, \quad i = 3,\dots,n \qquad \square$$

[1] Pojam glavnog minora matrice definira se primjerice u [7]

Korolar 1.1. *Za dijagonalne elemente $e_1, \ldots, e_n$ matrice U vrijedi:*

$$e_1 = \Delta_1, \qquad e_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \ldots \quad e_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

gdje su $\Delta_1 \ldots \Delta_n$ glavni minori matrice (1).

Dokaz. Iz (3) slijedi

$$e_1 = a_1 = \Delta_1,$$

Koristeći (3) i Lemu 1 metodom matematičke indukcije dokažimo tvrdnju za $e_k, \quad 2 \leq k \leq n$. Za $k = 2$ vrijedi

$$e_2 = a_2 - d_1 f_2 = a_2 - \frac{c_1}{e_1} f_2 = a_2 - \frac{c_1}{\Delta_1} f_2 = \frac{a_2 \Delta_1 - b_1 c_1}{\Delta_1} \overset{(5)}{=} \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

čime smo dokazali bazu indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = n-1$, odnosno $e_{n-1} = \Delta_{n-1} / \Delta_{n-2}$ te dokažimo da vrijedi za $k = n$:

$$\begin{aligned} e_n = a_n - d_{n-1} f_{n-1} &= a_n - \frac{c_{n-1}}{e_{n-1}} f_{n-1} \\ &= a_n - \frac{c_{n-1}}{\Delta_{n-1} / \Delta_{n-2}} f_{n-1} \\ &= \frac{a_n \Delta_{n-1} - c_{n-1} b_{n-1} \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} \overset{(5)}{=} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \end{aligned}$$

□

Teorem 1.1. *LU dekompoziciju realne trodijagonalne matrice A moguće je provesti bez postupka pivotiranja[2] onda i samo onda ako su svi glavni minori matrice A različiti od nule.*

Dokaz. Procedure navedene u (3) i (4) moguće je provesti onda i samo onda ako je $e_1, \ldots, e_n \neq 0$. Kako je iz Korolara 1.1 $e_1 = \Delta_1, \quad e_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \ldots,$ $e_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ uvjet $e_1, \ldots, e_n \neq 0$ bit će ispunjen onda i samo onda ako je $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$. □

2 Numerički eksperiment

Eksperiment ćemo provesti u programskom paketu *Mathematica* na matricama $A \in \mathbb{R}$ reda $n = 3\,000, 5\,000, 10\,000, 20\,000, 50\,000, 100\,000, 500\,000$ i

[2]Pivotiranje je postupak zamjene redaka ili stupaca.

1 000 000. Definirajmo trodijagonalnu matricu reda $n = 3\,000$ i vektor slobodnih koeficijenata čiji su elementi uniformno distribuirani slučajni brojevi na $[0, 100]$, mjerit ćemo vrijeme potrebno za njihovo definiranje:

```
n = 3000; SeedRandom[3];
vdef=Timing[a = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];
            b = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n - 1}];
            c = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n - 1}];
            y = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];][[1]]
```

Ispitajmo glavne minore

```
gm = Table[0, {i, n}];
gm[[1]] = a[[1]];
gm[[2]] = a[[2]] gm[[1]] - c[[1]]b[[1]];
Do[
gm[[i]]=gm[[i-1]]a[[i]]-c[[i-1]]gm[[i-2]]b[[i-1]],{i,3,n}];
If[Length[Cases[gm, 0]] > 0, Print["Neizvedivo"],
Print["Svi glavni minori su razliciti od nule"]]
```

Ako su svi glavni minori različiti od nule možemo napraviti LU-dekompoziciju.
Rezervirat ćemo mjesta za vektore e, f, d, i mjeriti vrijeme njihovog izračuna prema (3):

```
e = f = d = Table[0, {i, n}];
vLU = Timing[
        e[[1]] = a[[1]];
        f[[1]] = b[[1]];
        d[[1]] = c[[1]]/e[[1]];
        Do[e[[i]] = a[[i]] - d[[i - 1]] f[[i - 1]];
           f[[i]] = b[[i]];
           d[[i]] = c[[i]]/e[[i]];
           , {i, 2, n - 1}];
        e[[n]] = a[[n]] - d[[n - 1]] f[[n - 1]];][[1]]
```

Nakon toga rezervirat ćemo mjesta za z i x, te mjeriti vrijeme njihovog izračuna prema (4):

```
z = x = Table[0, {i, n}];
vrj = Timing[z[[1]] = y[[1]];
             Do[z[[i]] = y[[i]] - d[[i - 1]] z[[i - 1]];
                , {i, 2, n}];
             x[[n]] = z[[n]]/e[[n]];
             Do[x[[i-1]]=(z[[i-1]]-f[[i-1]]x[[i]])/e[[i-1]];
                , {i, n, 2, -1}];][[1]]
```

Mjerenje vremena ćemo provesti i pri rješavanju sustava korištenjem "obične" LU-dekompozicije definirane u programskom sustavu *Mathematica*:

```
vA=Timing[A = Table[0, {i, n}, {j, n}];
Do[A[[i, i]] = a[[i]], {i, n}];
Do[A[[i, i+1]] = b[[i]]; A[[i+1, i]] = c[[i]], {i, n-1}];][[1]]
vLUzx = Timing[LUBackSubstitution[LUDecomposition[A], y]][[1]]
```

Sve ćemo ponoviti za $n = 3\,000, 5\,000, 10\,000, 20\,000, 50\,000, 100\,000,$ $500\,000$ i $1\,000\,000$.
Eksperiment je proveden na računalu (Duron 1.3GHz, 512 MB RAM). Potrebna vremena za definiranje i rješavanje trodijagonalnog sustava primjenom LU dekompozicije prikazana su u Tablici 2.

n	Vrijeme (s)		
	definiranja dijagonala	LU dekompozicije	rješavanja sustava
3 000	0.010	0.091	0.103
5 000	0.015	0.125	0.156
10 000	0.021	0.281	0.328
20 000	0.047	0.531	0.609
50 000	0.109	1.343	1.579
100 000	0.219	2.672	3.219
500 000	1.094	14.062	16.125
1 000 000	2.149	26.688	32.031

Tablica 1: Potrebna vremena za definiranje i rješavanje trodijagonalnog sustava primjenom LU dekompozicije

Potrebno vrijeme za rješavanje istih sustava primjenom opće LU-dekompozicije na "punu" matricu (primjerice [11]), korištenjem *Mathematica*–modula LUDecomposition i LUBackSubstitution prikazano je u Tablici 2, u zagradi je radi usporedbe navedeno vrijeme potrebno pri rješavanju po (3) i (4).

n	Vrijeme (s)	
	definiranja matrice	LU-dekompozicije i rješavanja sustava
3 000	1.596	29.810 (0.194)
5 000	4.609	131.255 (0.281)
10 000	18.058	-.-
20 000	-.-	-.-

Tablica 2: Potrebno vrijeme rada računala uz primjenu *Mathematica*–modula LUDecomposition i LUBackSubstitution

Matrica reda 10 000 je uspješno definirana, dok definiranje matrice reda

$> 20\,000$ i LU-dekompoziciju nije bilo moguće provesti zbog prevelikog zahtjeva po računalne resurse, dobili smo poruku:

```
No more memory available.
Mathematica kernel has shut down.
Try quitting other applications and then retry.
```

3 LU-dekompozicija cikličke trodijagonalne matrice

Rješavamo sustav linearnih jednadžbi $Ax = y$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ciklička trodijagonalna matrica definirana u (2). Cikličku trodijagonalnu matricu A prikazat ćemo u obliku produkta donje trokutaste matrice L koja na glavnoj dijagonali ima jedinice i gornje trokutaste matrice U.

U ovom slučaju matrice L i U su oblika

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & d_{n-2} & 1 & 0 \\ g_1 & g_2 & g_3 \dots & g_{n-2} & d_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 \dots & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & e_2 & f_2 \dots & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & e_3 \dots & 0 & 0 & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & e_{n-2} & f_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & e_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & e_n \end{bmatrix},$$

pri čemu su $d_i, e_i, f_i, g_i, h_i \in \mathbb{R}$.

Uspoređujući produkt

$$LU = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 & h_1 \\ d_1 e_1 & e_2 + d_1 f_1 & f_2 & \dots & 0 & d_1 h_1 + h_2 \\ 0 & d_2 e_2 & e_3 + d_2 f_2 & \dots & 0 & d_2 h_2 + h_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{n-1} + d_{n-2} f_{n-2} & f_{n-1} + d_{n-2} h_{n-2} \\ e_1 g_1 & f_1 g_1 + e_2 g_2 & f_2 g_2 + e_3 g_3 & \dots & f_{n-2} g_{n-2} + d_{n-1} e_{n-1} & e_n + d_{n-1} f_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} g_i h_i \end{bmatrix}$$

s matricom A iz (2) dobivamo sustav od $(5n - 6)$ linearnih jednadžbi s

$(5n-6)$ nepoznanica koji se lako sukcesivno rješava. Dobivamo:

$$
\begin{array}{lll}
e_1 = a_1 & f_1 = b_1 & d_1 = \dfrac{c_2}{e_1} \\
e_2 = a_2 - d_1 f_1 & f_2 = b_2 & d_2 = \dfrac{c_3}{e_2} \\
e_3 = a_3 - d_2 f_2 & f_3 = b_3 & d_3 = \dfrac{c_4}{e_3} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
e_{n-2} = a_{n-2} - d_{n-3} f_{n-3} & f_{n-2} = b_{n-2} & d_{n-2} = \dfrac{c_{n-1}}{e_{n-2}} \\
e_{n-1} = a_{n-1} - d_{n-2} f_{n-2} & &
\end{array}
\tag{6}
$$

$$
\begin{array}{ll}
h_1 = c_1 & g_1 = \dfrac{b_n}{e_1} \\
h_2 = -d_1 h_1 & g_2 = \dfrac{-f_1 g_1}{e_2} \\
\vdots & \vdots \\
h_{n-2} = -d_{n-3} h_{n-3} & g_{n-2} = \dfrac{-f_{n-3} g_{n-3}}{e_{n-2}} \\
f_{n-1} = b_{n-1} - d_{n-2} h_{n-2} & d_{n-1} = \dfrac{c_n - f_{n-2} g_{n-2}}{e_{n-1}} \\
e_n = a_n - d_{n-1} f_{n-1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} g_i h_i. &
\end{array}
$$

Sada umjesto sustava $Ax = y$ promatramo sustav $LUx = y$. Uz supstituciju $z := Ux$ ovaj sustav sukcesivno rješavamo tako da najprije riješimo donje trokutast sustav $Lz = y$, a nakon toga gornje trokutast sustav $Ux = z$. Rješenje i jednog i drugog sustava lako se može dobiti u eksplicitnom obliku:

$$
\begin{array}{ll}
Lz = y: & Ux = z: \\
\qquad z_1 = y_1 & \qquad x_n = \dfrac{z_n}{e_n} \\
\qquad z_2 = y_2 - d_1 z_1 & \qquad x_{n-1} = \dfrac{z_{n-1} - f_{n-1} x_n}{e_{n-1}} \\
\qquad z_3 = y_3 - d_2 z_2 & \qquad x_{n-2} = \dfrac{z_{n-2} - f_{n-2} x_{n-3} - h_{n-2} x_{n-3}}{e_{n-2}} \\
\qquad \vdots & \qquad \vdots \\
\qquad z_{n-1} = y_{n-1} - d_{n-2} z_{n-2} & \qquad x_2 = \dfrac{z_2 - f_2 x_3 - h_2 x_3}{e_2} \\
\qquad z_n = y_n - d_{n-1} z_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} g_i z_i & \qquad x_1 = \dfrac{z_1 - f_1 x_2 - h_1 x_2}{e_1}.
\end{array}
\tag{7}
$$

Lema 3.1. *Glavne minore $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ cikličke trodijagonalne matrice (2) možemo izračunati rekurzivno*

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1, \\
\Delta_2 &= a_2 \Delta_1 - b_1 c_2, \\
\Delta_i &= a_i \Delta_{i-1} - b_{i-1} c_i \Delta_{i-2}, \quad i = 3, \ldots, n-1, \\
\Delta_n &= a_n \Delta_{n-1} - b_{n-1} c_n \Delta_{n-2} + c_1 \ldots c_n - b_1 \ldots b_n - b_n c_1 \overset{\circ}{\Delta}_{n-111}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

gdje je $\overset{\circ}{\Delta}_{n-111}$ $(1,1)$ kofaktor[3] *glavnog minora Δ_{n-1}.*

Dokaz: Formule za Δ_1, Δ_2 slijede iz definicije glavnih minora. Laplaceovim razvojem subdeterminante $\Delta_i, i = 3, \ldots, n-1$ po zadnjem retku

[3] Pojam kofaktora definira se primjerice u [8]

dobivamo

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & b_{i-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-1} & a_{i-1} & b_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_i & a_i \end{vmatrix}$$

$$= a_i \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & b_{i-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-1} & a_{i-1} \end{vmatrix}}_{\Delta_{i-1}} - c_i \overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{i-1} & b_{i-1} \end{vmatrix}}^{\text{razvijamo po zadnjem stupcu}}$$

$$= a_i\Delta_{i-1} - c_i b_{i-1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-2} \end{vmatrix}}_{\Delta_{i-2}}$$

$$= a_i\Delta_{i-1} - b_{i-1}c_i\Delta_{i-2}, \quad i = 3, \dots, n-1.$$

Laplaceovim razvojem determinante Δ_n po zadnjem retku dobivamo

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & c_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_n \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} - c_n \overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & 0 & c_1 \\ c_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}}^{\text{razvijamo po zadnjem stupcu}} - b_n \overbrace{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}}^{\text{razvijamo po zadnjem stupcu}}$$

$$= a_n\Delta_{n-1} - c_n b_{n-1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}} + c_n c_1 \overbrace{\begin{vmatrix} c_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1} \end{vmatrix}}^{\text{gornje trokutasta}} - b_n b_{n-1} \overbrace{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} \end{vmatrix}}^{\text{donje trokutasta}}$$

$$+ b_n c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}}_{\overset{\circ}{\Delta}_{n-1\,11}}$$

$$= a_n\Delta_{n-1} - b_{n-1}c_n\Delta_{n-2} + c_1 \dots c_n - b_1 \dots b_n + b_n c_1 \overset{\circ}{\Delta}_{n-1\,11} \qquad \square$$

Korolar 3.1. *Za dijagonalne elemente $e_1, \dots, e_n$ matrice U vrijedi:*

$$e_1 = \Delta_1, \qquad e_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \dots \quad e_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

gdje su $\Delta_1 \dots \Delta_n$ glavni minori matrice (2).

Dokaz. Iz (6) slijedi $e_1 = a_1 = \Delta_1$. Koristeći (6) i Lemu 2 metodom matematičke indukcije dokažimo tvrdnju za e_k, $\quad 2 \le k \le n-1$. Za $k = 2$ vrijedi

$$e_2 = a_2 - d_1 f_2 = a_2 - \frac{c_2}{e_1} f_2 = a_2 - \frac{c_2}{\Delta_1} f_2 = \frac{a_2\Delta_1 - b_1 c_2}{\Delta_1} \overset{(8)}{=} \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

čime smo dokazali bazu indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = n-2$, odnosno $e_{n-2} = \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}}$, te dokažimo da tvrdnja vrijedi za $k = n-1$:

$$\begin{aligned} e_{n-1} &= a_{n-1} - \frac{c_{n-2}}{e_{n-2}} f_{n-2} = a_{n-1} - \frac{c_{n-2}}{\Delta_{n-2}/\Delta_{n-3}} f_{n-2} \\ &= \frac{a_{n-1}\Delta_{n-2} - c_{n-2}b_{n-2}\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}} \overset{(8)}{=} \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}. \end{aligned}$$

Primijenimo pravilo za determinantu produkta

$$det(A) = det(LU) = det(L)det(U),$$

budući da su matrice L i U trokutaste njihove determinante su jednake umnošku elemenata na dijagonali, dakle $det(L) = 1, \quad det(U) = e_1 \ldots e_n$ što nam daje $det(A) = e_1 \ldots e_n = \frac{\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n-2} \Delta_{n-1}}{\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n-2}} e_n = \Delta_{n-1} e_n$

$$e_n = \frac{det(A)}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

□

Teorem 3.1. *LU dekompoziciju realne cikličke trodijagonalne matrice A moguće je provesti bez postupka pivotiranja onda i samo onda ako su svi glavni minori matrice A različiti od nule.*

Dokaz: Procedure navedene u (6) i (7) moguće je provesti onda i samo onda ako je $e_1, \ldots, e_n \neq 0$. Kako je iz Korolara 3.1 $e_1 = \Delta_1, \quad e_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \ldots, e_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ uvjet za $e_1, \ldots, e_n \neq 0$ bit će ispunjen onda i samo onda ako je $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$. □

Izradimo odgovarajući *Mathematica*–modul

```
In[1]:=LUtricyc[n_,a_,b_,c_,y_]:=Module[{e,f,d,z,g,h,x},
                e=Table[0,{i,n}];f=d=Table[0,{i,n-1}];
                g=h=Table[0,{i,n-2}];

                (*LU-dekompozicija*)
                e[[1]]=a[[1]];f[[1]]=b[[1]];h[[1]]=c[[1]];
                Do[
                      d[[i-1]]=c[[i]]/e[[i-1]];
                      e[[i]]=a[[i]]-d[[i-1]]f[[i-1]];
                      f[[i]]=b[[i]];
                      h[[i]]=-d[[i-1]]h[[i-1]];,{i,2,n-2}];
                d[[n-2]]=c[[n-1]]/e[[n-2]];
                e[[n-1]]=a[[n-1]]-d[[n-2]]f[[n-2]];
                f[[n-1]]=b[[n-1]]-d[[n-2]]h[[n-2]];
                g[[1]]=b[[n]]/e[[1]];
                Do[g[[i]]=-f[[i-1]]g[[i-1]]/e[[i]],{i,2,n-2}];
                d[[n-1]]=(c[[n]]-f[[n-2]]g[[n-2]])/e[[n-1]];
                e[[n]]=a[[n]]-d[[n-1]]f[[n-1]]-Sum[g[[i]]h[[i
                    ]],{i,n-2}];

                (*rjesenja*)
                z=x=Table[0,{i,n}];z[[1]]=y[[1]];
                Do[
                z[[i]]=y[[i]]-d[[i-1]]z[[i-1]];,{i,2,n-1}];
                z[[n]]=y[[n]]-d[[n-1]]z[[n-1]]-Sum[g[[i]]z[[i
                    ]],{i,n-2}];
                x[[n]]=z[[n]]/e[[n]];
                x[[n-1]]=(z[[n-1]]-f[[n-1]]x[[n]])/e[[n-1]];
                Do[
                x[[i-1]]=(z[[i-1]]-f[[i-1]]x[[i]]-h[[i-1]]x[[n
                    ]])/e[[i-1]];,{i,n-1,2,-1}];
                x//N]
```

Primjer 1. *Definirajmo cikličku trodijagonalnu matricu reda $n = 15$ čiji su elementi uniformno distribuirani slučajni brojevi na $[0, 10]$ i vektor slobodnih koeficijenata, provjerit ćemo ispravnost modula LUtricyc.*

```
In[2]:= n = 15; SeedRandom[3];
        a = Table[Random[Real, {0, 10}], {i, n}];
        b = Table[Random[Real, {0, 10}], {i, n}];
        c = Table[Random[Real, {0, 10}], {i, n}];
        y = Table[i, {i, n}];
        x = LUtricyc[n, a, b, c, y]

Out[7]:={0.346748,-0.415342,0.164119,0.377419,-0.0632976,
          0.388487,0.458513,-0.537333,1.69895,0.970109,0.186839,
          1.02291,0.616449,1.21222,1.00089}
```

Definirajmo matricu i provjerimo jednakost Ax=y.

```
In[8]:= A = Table[0, {i, n}, {j, n}];
        A[[n, 1]] = b[[n]]; A[[1, n]] = c[[1]];
        Do[A[[i, i]] = a[[i]], {i, n}];
        Do[A[[i, i + 1]] = b[[i]]; A[[i + 1, i]] = c[[i + 1]];,
             {i, n - 1}];
        A.x==y

Out[9]:= True
```

Primjer 2. *Definirajmo cikličku trodijagonalnu matricu reda n i vektor slobodnih koeficijenata čiji su elementi uniformno distribuirani slučajni brojevi na* $[0, 100]$, *mjerit ćemo vrijeme izvođenja našeg modula za*

$$n = 3\,000, 5\,000, 10\,000, 20\,000, 50\,000, 100\,000, 500\,000, 1\,000\,000.$$

```
In[11]:= n = 3000; SeedRandom[3];
        a = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];
        b = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];
        c = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];
        y = Table[i, {i, n}];
        x = Timing[LUtricyc[n, a, b, c, y];][[1]]

Out[12]:= 0.359 Second
```

Potrebna vremena za rješavanje cikličkog trodijagonalnog sustava primjenom modula LUtricyc i primjenom *Mathematica*–modula LUDecomposition i LUBackSubstitution prikazana su u Tablici 3.

	Vrijeme (s)	
n	LUtricyc	*Mathematica*–modul
3 000	0.359	29.810
5 000	0.688	131.255
10 000	1.438	-.-
20 000	2.984	-.-
50 000	7.563	-.-
100 000	15.141	-.-
500 000	76.078	-.-
1 000 000	151.344	-.-

Tablica 3: Potrebna vremena za rješavanje cikličkog trodijagonalnog sustava primjenom modula LUtricyc i primjenom *Mathematica*–modula LUDecomposition i LUBackSubstitution

Literatura

[1] R. C. Allen, S. Pruess, L. F. Shampine, *Fundamentals of Numerical Computing*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

[2] Carl de Boor, S. D. Conte, *Elementary Numerical Analysis – An Algorithmic Approach*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

[3] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[4] D. Faddiev, *Algebra*, Nauka, Moskva, 1966.

[5] D. Faddiev, I. Sominski, *Problemas de algebra superior*, Mir, Moskva, 1971.

[6] G. H. Golub, C. F. van Loan, *Matrix Computations*, The J.Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

[7] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[8] Carl D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, New York, 2000.

[9] R. Plato, *Concise Numerical Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[10] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 2000.

[11] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1999.

[12] H. Späth, *Eindimensionale Spline – Interpolations – Algoritmen*, R.Oldenbourg Verlag, München, 1973.

[13] H. Späth, *Spline – Algoritmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*, R.Oldenbourg Verlag, München, 1973.

[14] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] J. Stoer, R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2, 3. Auflage*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[16] Stephen Wolfram, *The Mathematica Book*, 5th ed. (Wolfram Media, 2003)