LX олимпијада

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такви што за секои цели броеви a и b важи

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)). \qquad (1)$$

Решение. Со замена во (1) за $a=0, b=x$ добиваме $f(f(x))=2f(x)+f(0)$. Според тоа, ако во (1) ставиме $a=1$ добиваме

$$f(2)+2f(b)=f(f(b+1))=2f(b+1)+f(0),$$

т.е.

$$f(b+1)-f(b)=\tfrac{1}{2}(f(2)-f(0)).$$

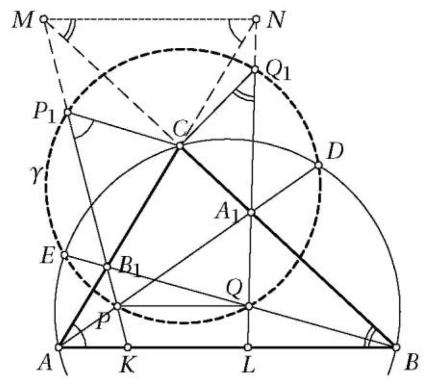
Последното значи дека функцијата f е линеарна, т.е. $f(x)=kx+n$, за некои константи k и n. Со замена во (1) добиваме

$$2k(a+b)+3n=k^2(a+b)+(k+1)n,$$

за секои цели броеви a и b, што е исполнето само за $k=2$ или $k=n=0$. Значи, единствени решенија се функциите $f(x)=0$ и $f(x)=2x+n$, за произволен $n\in\mathbb{Z}$.

2. Нека ABC е остроаголен триаголник и A_1 и B_1 се точки на страните BC и AC, соодветно. Нека P и Q се точки на отсечките AA_1 и BB_1, соодветно, такви што правата PQ е паралелна на правата AB. Нека P_1 е точка на правата PB_1 таква што B_1 е меѓу точките P и P_1 и важи $\measuredangle PP_1C=\measuredangle BAC$. Слично, нека Q_1 е точка на правата QA_1 таква што A_1 е меѓу точките Q и Q_1 и важи $\measuredangle CQ_1Q=\measuredangle CBA$.

Докажи дека точките P,Q,P_1 и Q_1 се конциклични.



Решение. *Прв начин*. Нека правите AA_1 и BB_1 по втор пат ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките D и E, соодветно. Бидејќи

$$\measuredangle EDP=\measuredangle EDA=\measuredangle EBA=\measuredangle EQP,$$

точките D,E,P и Q припаѓаат на иста кружница γ. Со K да ја означиме пресечната точка на правите PB_1 и AB. Бидејќи $\measuredangle AP_1K=\measuredangle CAK$, четириаголникот AP_1CK е тетивен, па од степенот на точката B_1 добиваме

$$\overline{B_1K}\cdot\overline{B_1P_1}=\overline{B_1A}\cdot\overline{B_1C}=\overline{B_1B}\cdot\overline{B_1E}\ .$$

Според Талесовата теорема $\overline{B_1P}:\overline{B_1K}=\overline{B_1Q}:\overline{B_1B}$, па оттука следува

$$\overline{B_1P}\cdot\overline{B_1P_1}=\overline{B_1Q}\cdot\overline{B_1E}\ ,$$

што значи дека точката P_1 припаѓа на кружницата γ. Аналогно се докажува дека и точката Q_1 припаѓа на кружницата γ, со што доказот е завршен.

Втор начин. Нека правата PB_1 ги сече правите AB и BC соодветно во точките K и M, а правата QA_1 ги сече правите AB и AC соодветно во точките L и N. Од теоремата на Пап за точките A_1,P,A и B_1,B,Q, следува дека точките M и N (кои се двете конечни или бесконечни) и бесконечната точка $AB\cap PQ$ се колинеарни, т.е. $MN\,||\,AB\,||\,PQ$. Ако точките M и N се конечни, тогаш од $\measuredangle KP_1C=\measuredangle KAC=180^\circ-\measuredangle MNC$ следува дека точката P_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle MNC$. Аналогно и точката Q_1 лежи на оваа кружница. Сега $\measuredangle PP_1Q_1=\measuredangle MNQ_1=180^\circ-\measuredangle Q_1QP$, па значи четириаголникот PQQ_1P_1 е тетивен.

Ако M и N се бесконечни точки, т.е. $PB_1\,||\,BC$ и $QA_1\,||\,AC$, тогаш точките P_1,C и Q_1 се колинеарни ($\measuredangle P_1CA=\measuredangle P_1KA=\measuredangle CBA$ и $\measuredangle BCQ_1=\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle P_1CQ_1=180^\circ$), што значи $\measuredangle PP_1Q_1=\measuredangle PP_1C=\measuredangle BAC=180^\circ-\measuredangle Q_1QP$, и повторно четириаголникот PQQ_1P_1 е тетивен.

3. Една општествена мрежа има 2019 корисници од кои некои парови се пријатели. Притоа, ако A е пријател на B, тогаш и B е пријател на A. Една по друга може да се случат промени од следниов вид:

   Три корисници A,B и C такви што A е пријател и со B и со C, но B и C не се пријатели, ги менуваат статусите на своите пријателства така што сега B и C се пријатели, но A не е пријател ниту со B ниту со C, додека статусите на останатите пријателства не се менуваат.

   На почетокот 1010 корисници имаат по 1009 пријателства, а 1009 корисници по 1010 пријателства. Докажи дека постои низа од опишаните промени по која секој корисник има најмногу еден пријател меѓу останатите корисници на мрежата.

   Решение. Општествената мрежа претставува граф $\mathbb{G}$ во кој темињата се корисниците, а ребрата се пријателствата. Опишаните промени ќе ги нарекуваме *пресврти*.

   Графот $\mathbb{G}$ е сврзан, бидејќи во спротивно темињата во помалата компонента на сврзаност ќе имаат степен помал од 1009. Ќе применуваме пресврти така што ќе останува сврзан граф се додека тоа е можно. Бидејќи со секој пресврт бројот на ребрата се намалува, овој процес мора да заврши. Така, ни останува граф $\mathbb{H}$ кој е сврзан, но кој со секој следен пресврт веќе нема да биде сврзан. Очигледно графот $\mathbb{H}$ не е комплетен. Исто така, бидејќи пресвртите не ја менуваат парноста на степените на темињата, а за почетниот граф $\mathbb{G}$ не се сите степени парни, заклучуваме дека графот $\mathbb{H}$ има темиња со непарен степен, па затоа тој не е цикличен.

1) Ако во графот $\mathbb{H}$ постојат триаголници, го разгледуваме максималниот комплетен подграф $\mathbb{K}$ и да земеме ребро AB такво што $A \in \mathbb{K}$ и $B \notin \mathbb{K}$. Постои теме $C \in \mathbb{K}$ кое не е поврзано со ребро со B. Тогаш по пресвртот на тројката ABC графот останува сврзан.
2) Ако нема триаголници, ама има циклуси, го разгледуваме најмалиот циклус $\mathbb{O}$ и ребро AB такво што $A \in \mathbb{O}$ и $B \notin \mathbb{O}$. Нека $C \in \mathbb{O}$ е соседно теме на темето A. Бидејќи ABC не е триаголник, BC не е ребро. И во овој случај по пресвртот на тројката ABC графот останува сврзан.

Според тоа, во графот $\mathbb{H}$ не постојат циклуси, т.е. $\mathbb{H}$ е дрво. Бидејќи пресвртите не може да формираат циклуси, понатаму е доволно да правиме пресврти се додека постојат темиња со степен поголем или еднаков на 2. Во графот кој ќе остане на крајот степените на сите темиња ќе бидат 1 или 0.

4. Определи ги сите парови природни броеви (k,n) такви што важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1}).$$

Решение. Најголемиот цел број r таков што $2^r \mid k!$ е еднаков на

$$[\tfrac{k}{2}] + [\tfrac{k}{2^2}] + [\tfrac{k}{2^3}] + ... < k.$$

Бидејќи бројот $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1})$ е делив со $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, добиваме $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Според тоа,

$$2^{n^2} > f(n) = k! > (\tfrac{n(n-1)}{2})!.$$

Меѓутоа, за $n \geq 6$ ова неравенство не важи. Навистина, за $n = 6$ имаме $15! > 2^{36}$, додека за $n > 6$ имаме

$$(\tfrac{n(n-1)}{2})! > 15! \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2} - 15} > 2^{36} \cdot 2^{2n(n-1) - 60} = 2^{2n^2 - 2n - 24} > 2^{n^2},$$

бидејќи $n^2 - 2n - 24 > 0$.

Конечно, бидејќи $f(3) = 168$, $f(4) = \frac{1}{4} \cdot 8!$ и $31 \mid f(5) < 31!$, ниту во овие случаи нема решение, па затоа единствени решенија се $(k,n) \in \{(1,1), \{3,2\}$.

5. Банката на градот Бата издава монети кои од едната страна имаат ознака H, а од другата ознака T. Хари наредил n вакви монети во низа од лево на

десно. Со овие монети тој ја повторува следнава операција: ако во низата има точно $k>0$ монети кои покажуваат H, тогаш тој ја превртува $k-$тата монета од лево, а во спротивно сите монети покажуваат T и постапката завршува. На пример, ако $n=3$ и почетниот распоред е THT, Хари ја извршува низата оперции $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ и постапката завршува по овие три операции.

а) Докажи дека за секој почетен распоред на монетите Хари ја завршува опишаната постапка по конечно многу операции.

б) За почетен распоред C, нека со $L(C)$ е означен бројот на операциите кои Хари ги извршува пред постапката да заврши. На пример, $L(THT)=3$ и $L(TTT)=0$. Определи ја аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C.

Решение. *Прв начин*. Нека $l(n)$ е аритметичката средина на $L(C)$ по сите распореди на n монети. Имаме $l(0)=0$ и $l(1)=1$. Тврдењето под а) ќе го докажеме ако докажеме дека $l(n)$ е конечен број.

Со $f(c)$ да го означиме распоредот кој се добива од распоредот $c=a_1a_2...a_n$ по една операција. Исто така воведуваме ознака $\bar{c}=\overline{a_1}\,\overline{a_2}...\overline{a_n}$, каде $\overline{H}=T$ и $\overline{T}=H$.

1) За произволен распоред на n монети важи $f(cT)=f(c)T$. Според тоа, аритметичката средина на $L(cT)$ е еднаква на $l(n)$.

2) Од друга страна $f(\bar{c}H)=\overline{f(c)}H$. Навистина, ако точно k монети во распоредот покажува H, тогаш $f(c)$ се разликува од c само во $(n-1-k)-$тата позиција, па $\overline{f(c)}H$ се разликува од $\bar{c}H$ само во $(k+1)-$та позиција, т.е. се совпаѓа со $f(\bar{c}H)$.

   Од распоредот $\bar{c}H$ по $L(c)$ операции се добива распоредот $HH...HH$, од кој потоа со $n+1$ операција се добива распоредот $TT..TT$. Според тоа аритметичката средина на броевите $L(cH)$ е еднаква на $l(n)+n+1$.

   Значи, точна е формулата $l(n+1)=l(n)+\frac{n+1}{2}$, од каде со индукција се добива дека $l(n)=\frac{n(n+1)}{4}$.

Втор начин. За распоред на n монети $C=a_1a_2...a_n$ со $\tau(C)$ да го означиме бројот на монетите кои покажуваат H, а со $\sigma(C)$ збирот на позициите i на кои $a_i=H$. На пример, $\tau(HHTTH)=3$ и $\sigma(HHTTH)=1+2+5=8$.

Нека со операцијата од распоредот C се добива распоредот C'. Тогаш

$$\tau(C')=\tau(C)\pm 1 \text{ и } \sigma(C')=\sigma(C)\pm\tau(C),$$

во зависност од тоа дали на позицијата $\tau(C)$ е T или H. Во двата случаја важи

$$\lambda(C') = \lambda(C) - 1, \text{ каде } \lambda(C) = 2\sigma(C) - \tau(C)^2.$$

Бидејќи

$$\lambda(C) \geq 2(1+2+...+\tau(C)) - \tau(C)^2 \geq 0,$$

за секој распоред C, следува дека $L(C) = \lambda(C)$ е секогаш конечен.

Аритметичката средина на $\sigma(C)$ е еднаква на $\frac{1}{2}(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{4}$, бидејќи за секој i монетата на $i-$тото место покажува H точно во половината случаи. Аритметичката средина на $\tau(C)^2$ е:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2 n!}{i!(n-i)!} = \frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-1}{i-1} = \frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\binom{n-1}{i-1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n+1)\binom{n-1}{i-1} = \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}\cdot 2^{n-1} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Според тоа, аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C е еднаква на $2\cdot\frac{n(n+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}$.

6. Нека I е центар на впишаната кружница ω на остроаголниот триаголник ABC во кој $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата ω ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Правата која ја содржи D и е нормална на EF повторно ја сече кружницата ω во точката R. Правата AR повторно ја сече кружницата ω во точката P. Кружниците опишани околу триаголниците PCE и PBF повторно се сечат во точката Q.

Докажи дека правите DI и PQ се сечат на правата која ја содржи точката A и е нормална на AI.

Решение. *Прв начин*. Нека нормалата во A на AI ја сече правата DI во точката S. Од $AI \parallel RD \perp EF$ следува

$$\measuredangle PDS = 90^\circ - \measuredangle BDP = 90^\circ - \measuredangle DRP = 90^\circ - \measuredangle IAP = 180^\circ - \measuredangle SAP,$$

што значи дека четириаголникот $APDS$ е тетивен. Понатаму,

$$\measuredangle BQC = \measuredangle BQP + \measuredangle PQC = \measuredangle BFP + \measuredangle PEC = \measuredangle FEP + \measuredangle PEC$$

$$= \measuredangle FEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle A = \measuredangle BIC,$$

па затоа и четириаголникот $BQIC$ е тетивен.

Нека правата PS по вторпат ја сече впишаната кружница во точката K. Тогаш важи $\measuredangle EDS = \measuredangle RDF$ и $\measuredangle SDA = \measuredangle SPA = \measuredangle KPR = \measuredangle KDR$, т.е. DA и DK се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle EDF$, па како е DA симедијана во $\triangle DEF$, заклучуваме дека правата DK ја содржи средината A' на отсечката EF .

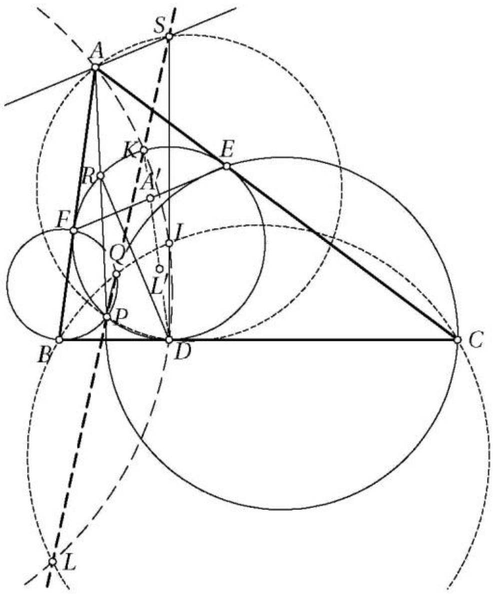
Од $\triangle APE \sim \triangle AER$ и $\triangle APF \sim \triangle AFR$ следува

$$\frac{\overline{RF}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{RE}}{\overline{EP}},$$

т.е. четириаголникот $FREP$ е хармониски. Во сличноста $\triangle FRE \sim \triangle BCI$ на точката P и соодветствува точка L таква што $FREP \sim BICL$. Тогаш $\frac{\overline{IB}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{CL}}$. Бидејќи

$$\measuredangle PQB = \measuredangle PFB = \measuredangle PEF = \measuredangle LCB = \measuredangle LQB,$$

точката Q лежи на правата PL . Останува да докажеме дека точките L, P и K се колинеарни.



При инверзија во однос на впишаната кружница точките D, E, F, K се фиксни, точките A, B, C се пресликуваат соодветно во средините A', B', C' на отсечките EF, DF, DE , а L се пресликува во точка L' таква што $\frac{\overline{IL'}}{\overline{L'B'}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{IL'}}{\overline{L'C'}}$, па затоа $\overline{L'B'} = \overline{L'C'}$, т.е. L' е средина на отсечката $B'C'$. Според тоа, точките D, L', A', K се колинеарни, што значи дека точките D, L, A, K лежат на кружница која минува низ точката I , т.е. петаголникот $AKIDL$ е тетивен. Сега, од сличноста $FREP \sim BICL$ следува

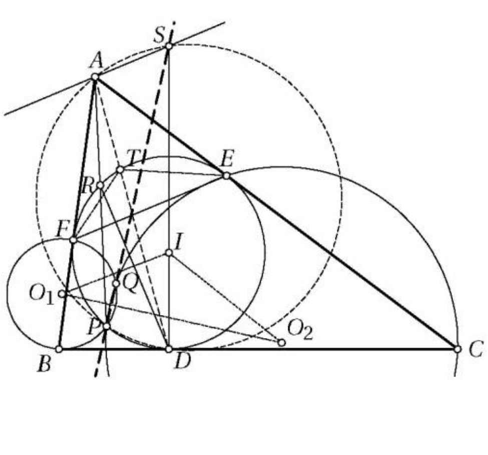
$$\measuredangle LKD = \measuredangle LID = \measuredangle PRD = \measuredangle PKD,$$

т.е. L лежи на правата PK , со што доказот е завршен.

Втор начин. Пресечната точка S на правата DI и нормалата на AI во A припаѓа на кружницата APD бидејќи

$$\begin{aligned} \measuredangle PDS &= 90^\circ - \measuredangle BDP \\ &= 90^\circ - \measuredangle DRP \\ &= 90^\circ - \measuredangle IAP \\ &= 180^\circ - \measuredangle SAP. \end{aligned}$$

Нека правата AD ја сече впишаната кружница во точката



$T \neq D$. Од $\triangle ATE \sim \triangle AED$ и $\triangle ATF \sim \triangle AFD$ следува $\frac{\overline{ET}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{FD}}$, т.е. $\frac{\overline{ET}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{FD}}$. На сличен начин се добива $\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{ER}}{\overline{FR}}$. Со O_1 и O_2 да ги означиме центрите на опишаните кружници на триаголниците BPF и CPE, соодветно. Тогаш важи $O_1I \perp FP, O_2I \perp EP$ и $O_1O_2 \perp PQ$. Бидејќи

$$\measuredangle PO_1B = 2\measuredangle PFB = 2\measuredangle PEF = \measuredangle PIF,$$

триаголниците PO_1B и PIF се ротационо хомотетични, од каде што следува $\triangle PO_1B \sim \triangle PBF$. Слично важи $\triangle PO_2I \sim \triangle PCE$. Од овие две сличности имаме $\overline{O_1I} = \overline{BF} \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{FP}}$ и $\overline{O_2I} = \overline{CE} \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{EP}}$, па е $\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{FP}}$. Сега од

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{ER}}{\overline{FR}} = \frac{\sin\measuredangle EFR}{\sin\measuredangle FER} = \frac{\cos\measuredangle DEF}{\cos\measuredangle DFE} = \frac{\cos\measuredangle DFB}{\cos\measuredangle DEC},$$

следува

$$\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\cos\measuredangle DFB}{\cos\measuredangle DEC} = \frac{\overline{FD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{ET}}.$$

Притоа важи $\measuredangle O_1IO_2 = 180^\circ - \measuredangle EPF = \measuredangle FTE$, па затоа $\triangle O_1IO_2 \sim \triangle FTE$.
Сега имаме

$$\measuredangle EPQ = \measuredangle IO_2O_1 = \measuredangle TEF = \measuredangle ADF = \measuredangle SDF - \measuredangle SDA = \measuredangle EPR - \measuredangle SPA = \measuredangle EPS,$$

па затоа точките P, Q и S се колинеарни.