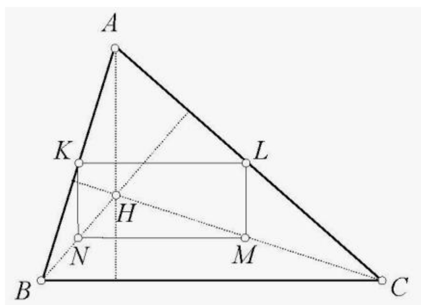
Ристо Малчески
Скопје

ОЈЛЕРОВА КРУЖНИЦА

Познато е дека средините на страните, подножјата на висините и средините на отсечките кои ортоцентарот го поврзуваат со темињата на триаголникот припаѓаат на една кружница. Оваа кружница често пати се нарекува кружница на девет точки или Ојлерова кружница (Леонард Ојлер – брилијантен швајцарски математичар, физичар, астроном и филозоф од осумнаесеттиот век).

Во литературата постојат повеќе докази за Ојлеровата кружница, при што во некои докази се користат напредни знаења од геометријата. Во нашите разгледувања за Ојлеровата кружница ќе користиме само елементарни предзнаења, кои им се познати на повеќето читатели.

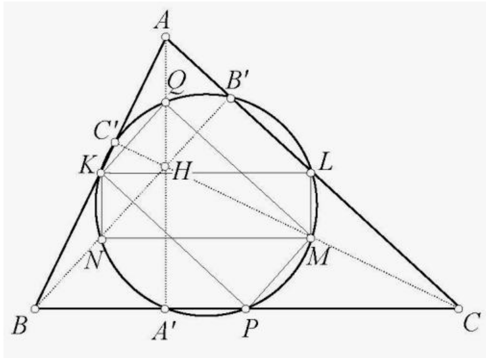
Тврдење 1. Нека H ортоцентар на $\triangle ABC$. Ако K,L,M,N се соодветно средини на отсечките AB,AC,HC,HB, тогаш четириаголникот $KLMN$ е правоаголник.



Доказ. Отсечките KL и NM се средни линии на триаголниците ABC и HBC соодветни на страната BC, па затоа тие се паралелни и еднакви меѓу себе ($KL,NM \| BC$ и $\overline{KL}=\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$). Според тоа, четириалолникот $KLMN$ е паралелограм (цртеж десно). Сега, доволно е да докажеме дека еден негов агол е прав. Но, отсечката KN е средна линија на триаголникот ABH, па затоа таа е паралелна на AH, т.е. на висината на триаголникот повлечена од темето A. Според тоа, $KN \perp BC$ и како $NM \| BC$, добиваме дека $KN \perp NM$. Значи, $\measuredangle KNM = 90^\circ$, т.е. четириаголникот $KLMN$ е правоаголник. ■

Тврдење 2. Средините на страните, подножјата на висините и средините на отсечките кои ортоцентарот го поврзуваат со темињата на триаголникот припаѓаат на една кружница (Ојлерова кружница или кружница на девет точки).

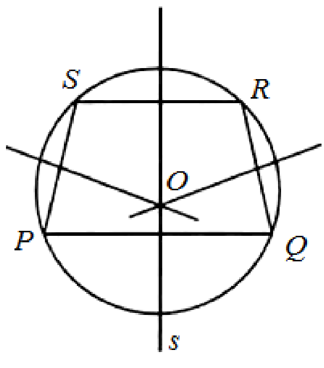
Доказ. Ќе ги користиме ознаките како на цртежот десно. Според тврдењето 1 четириаголникот $KLMN$ е правоаголник. Слично, ако P е средина на BC и Q е средина на AH, тогаш на потполно ист начин како во доказот на тврдењето 1 се докажува дека четириаголникот $PMQK$ е правоаголник. Но, отсечката KM е заедничка дијагонала на правоаголниците $KLMN$ и $PMQK$, па затоа околу нив може да се опише кружница (KM е дијаметар на оваа кружница). Останува да докажеме дека и подножјата на висините припаѓаат на оваа кружница. Но, точката A', како подножје на висината повлечена од темето A, припаѓа на оваа кружница, бидејќи $\measuredangle QA'P = 90^\circ$ и PQ е дијаметар на оваа кружница. Слично се докажува дека B' и C' припаѓаат на кружницата. ■



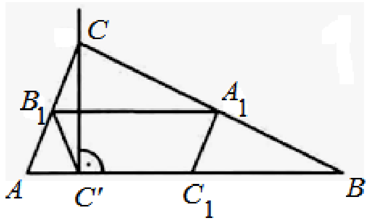
Во тврдењето 2, со помош на тврдењето 1 дадовме елементарен доказ за постоењето на Ојлеровата кружница. Во следните разгледувања ќе дадеме уште еден доказ за постоењето на Ојлеровата кружница.

Тврдење 3. Околу рамнокрак трапез може да се опише кружница.

Доказ. Нека $PQRS$ е рамнокрак трапез (цртеж десно). Симетралата s на основата PQ е симетрала на трапезот, па затоа симетралите на краците QR и PS ја сечат симетралата s во една точка. Нека тоа е точката O. Според тоа, симетралите на сите страни на рамнокракиот трапезот се сечат во една точка, што значи дека околу него може да се опише кружница. ■



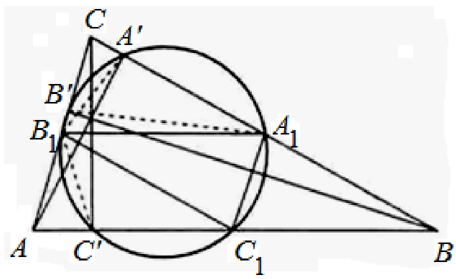
Тврдење 4. Средините на страните на разностран триаголник и подножјето на една од висините се темиња на рамнокрак трапез.



Доказ. Нека ABC е разностран триаголник и A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle BAC > \measuredangle ABC$. Тогаш подножјето на висината повлечена од темето C е меѓу точките A и C_1 (цртеж десно). Отсечката A_1B_1 е средна линија на триаголникот ABC, па затоа таа е паралелна со AB, односно со C_1C'. Значи, четириаголникот $C'C_1A_1B_1$ е трапез. Отсечката A_1C_1 исто така е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $A_1C_1 \parallel AC$ и $\overline{A_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Отсечката $C'B_1$ е тежишна линија која соодветствува на хипотенузата AC на правоаголниот триаголник, па затоа $\overline{C'B_1} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и не е паралелна со AC. Според тоа, отсечките A_1C_1 и $C'B_1$ се еднакви и не се паралелни. Значи, трапезот $C'C_1A_1B_1$ е рамнокрак.

Јасно, тврдењето важи и за подножјата A' и B' на висините повлечени соодветно од темињата A и B на триаголникот ABC. ■

Тврдење 5. Средините на страните на триаголникот и подножјата на неговите висини припаѓаат на една кружница.



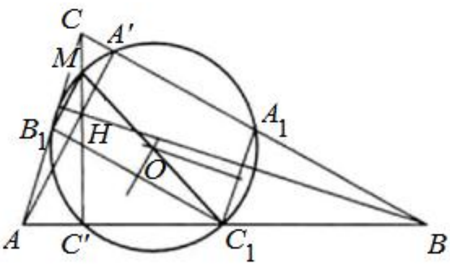
Доказ. Нека е даден триаголникот ABC, A_1, B_1, C_1 се средините на страните и A', B', C' се подножјата на висините (цртеж десно). Од тврдењето 4 следува дека точките $A_1, B_1, C_1.A'$, потоа точките A_1, B_1, C_1, B' и точките A_1, B_1, C_1, C' се темиња на рамнокраки трапези. Бидејќи точките A_1, B_1, C_1 се заеднички за сите три трапези, кружниците опишани околу овие рамнокраки трапези (тврдење 3) се совпаѓаат и тоа е кружницата опишана околу триаголникот $A_1B_1C_1$. Според тоа, точките $A_1, B_1, C_1, A', B', C'$ припаѓаат на една кружница. ■

Сега, *Ојлеровата кружница* за триаголникот ABC можеме да ја определиме како кружницата опишана околу триаголникот $A_1B_1C_1$.

Притоа докажавме дека подножјата на висините припаѓаат на Ојлеровата кружница. Следното тврдење всушност го комплетира тврдењето 2.

Тврдење 6. Ојлеровата кружница ги сече отсечките определени со темињата на триаголникот и ортоцентарот во нивните средини.

Доказ. Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC и нека неговата Ојлерова кружница ја сече отсечката CH во точката M (цртеж десно). Треба да докажеме дека M е средина на CH. Точката C' е подножје на висината од темето C, па затоа триаголникот $MC'C_1$ е правоаголен. Центарот O на Ојлеровата кружница е средина на хипотенузата MC_1. Понатаму, $\measuredangle C_1B_1M = 90^\circ$, како перифериски агол над дијаметарот MC_1.



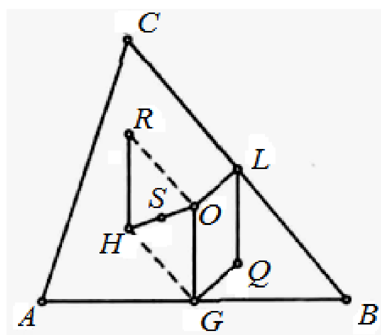
Правата C_1B_1 е паралелна со BC, па затоа $B_1M \perp BC$, што значи дека $B_1M \parallel AH$. Од триаголникот AHC следува дека M е средина на страната CH (својство на средната линија). Аналогно се докажува дека Ојлеровата кружница ги сече AH и BH во нивните средини. ■

Во претходните разгледувања дадовме два суштнски различни докази за Ојлеровата кружница. Да разгледма неколку задачи поврзани со Ојлеровата кружница.

Задача 1. Нека H и O се ортоцентарот и центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека центарот S на Ојлеровата кружница е средината на отсечката HO.

Решение. Нека G и L се средините на страните AB и BC, соодветно и R и Q се средините на отсечките CH и BH (цртеж десно).

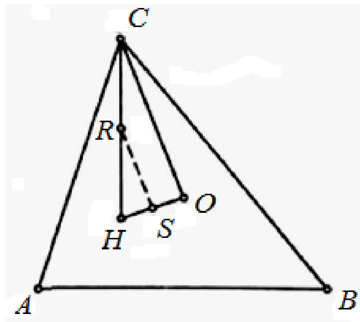
Прво ќе докажеме дека четириаголникот $GQLO$ е паралелограм. Имаме $LQ \| OG$ (OG и CH се нормални на



AB, па е $OG \| CH$, а LQ е средна линија во триаголникот CHB, па е $LQ \| CH$). Слично се докажува дека $GQ \| OL$, па затоа $GQLO$ е паралелограм и $\overline{LQ} = \overline{OG}$.

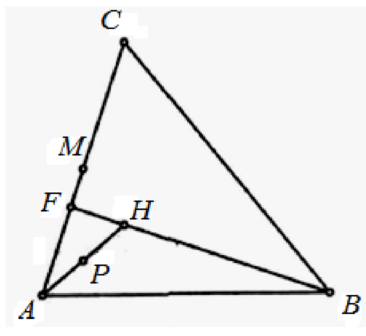
Според тоа, $\overline{LQ} = \overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{CH} = \overline{RH}$, па затоа $GORH$ е паралелограм чии дијагонали HO и RG се половат и се сечат во точката S. ■

Задача 2. Докажи дека радиусот на Ојлеровата кружница k е еднаков на половина од радиусот на опишната кружница околу триаголникот ABC.



Решение. При ознаките од задача 1, да го разгледаме триаголникот HOC (цртеж десно). Во овој триаголник SR е средна линија соодветна на страната CO, па затоа $\overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{OC}$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Докажи дека Ојлеровите кружници на триаголниците ABC, ABH, BCH и ACH се совпаѓаат.



Решение. Доволно е да докажеме дека по три точки од Ојлеровите кружници на триаголниците ABH, BCH и ACH припаѓаат на Ојлеровата кружница k на триаголникот ABC.

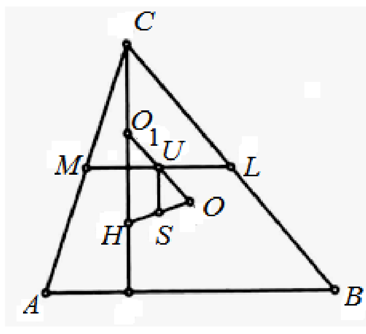
Прво да забележиме дека подножјето на висината на триаголникот ABH повлечена од темето A е истовремено и подножје на висината на триаголникот ABC повлерчена од темето B и тоа е точката F (цртеж десно). Истиот заклучок важи и за преостанатите висини, па оттука следува дека подножјата на висините на триаголнивците ABH, BCH и ACH припаѓаат на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC.

Понатаму, средината P на страната AH на триаголникот ABH е истовремено средина на отсечката AH , па затоа таа припаѓа на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC. Слично важи и за средините Q и R на BH и CH, соодветно.

Ќе докажеме дека и средините на отсечките кои ги поврзуваат ортоцентрите и темињата лежат на k. Ќе докажеме за триаголникот ABH (слично се докажува за другите два триаголници). Точката C е ортоцентар на триаголникот ABH, па за триаголникот ABH средината на отсечката која ортоцентарот го поврзува со темето A е точката M која како средина на страната AC припаѓа на k. Според тоа, три точки на Ојлеровата кружница на триаголникот ABH припаѓаат на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC, па затоа овие две кружници се совпаѓаат. ■

Задача 4. Даден е триаголник ABC со центар на опишана кружница O. Нека M и L се средини на страните AC и BC, соодветно и U е средина на отсечката ML. Докажи дека симетричната точка O_1 на точката O во однос на точката U припаѓа на висината CD на триаголникот ABC.

Решение. Бидејќи центарот S на Ојлеровата кружница k на триаголникот ABC е средината на отсечката HO, заклучуваме дека SU е средна линија за триаголникот HOO_1. Затоа $SU \parallel HO_1$. Понатаму, точките M и L припаѓаат на Ојлеровата кружница k на триаголникот ABC и како S е нејзин центар, а U е средина на ML следува $SU \perp ML$.



Но, тоа значи дека $HO_1 \perp ML$ и како $ML \parallel AB$ заклучуваме дека $HO_1 \perp AB$, што значи дека O_1 припаѓа на висината CD. ■

Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека темето на правиот агол на правоаголниот триаголник припаѓа на Ојлеровата кружница на тој триаголник.

2. Ако ортоцентарот на триаголникот ABC лежи на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC, тогаш триаголникот е правоголен. Докажи!

3. Докажи дека основата на рамнокракиот триаголник е тангента на Ојлеровата кружница на тој триаголник.

4. Докажи дека точно две страни на триаголникот не може да бидат тангенти на Ојлеровата кружница на тој триаголник.