

**Ристо Малчески
Алекса Малчески
Катерина Аневска**

**ВОВЕД ВО ЕЛЕМЕНТАРНА
ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ**

Скопје, декември 2019

Рецензенти

д-р Методи Главче,

вонреден професор на Педагошки факултет, Скопје

д-р Слаѓана Брсаковска,

вонреден професор на ПМФ, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

511.17(072.2)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Вовед во елементарна теорија на броеви / Ристо Малчески, Алекса Малчески, Катерина Аневска. - Скопје : Армаганка, 2019. - 228 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 225-226. - Регистар

ISBN 978-608-4904-92-2

1. Малчески, Алекса [автор] 2. Аневска, Катерина [автор]

а) Елементарна теорија на броеви - Задачи за основно образование

COBISS.MK-ID 111792650

Без дозвола на издавачот или авторите се забранува умножување на оваа книга или на нејзини делови.

СОДРЖИНА

Предговор	5
-----------	---

I ГЛАВА

ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ И ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

1. Поим за деливост	7
2. Општи признаци за деливост	10
3. Делење со остаток	13
4. Посебни признаци за деливост	17
5. Бројни системи	23
6. Задачи	26

II ГЛАВА

ЕВКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

1. Најголем заеднички делител	41
2. Евклидов алгоритам	45
3. Најмал заеднички содржател	50
4. Задачи	54

III ГЛАВА

ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. Поим за прост и сложен број	57
2. Ератостеново сито	59
3. Бесконечност на множеството прости броеви	61
4. Основна теорема на аритметиката	63
5. Задачи	67

IV ГЛАВА

ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Линеарна Диофантова равенка	75
--------------------------------	----

2.	Ојлеров метод	78
3.	Решавање на нелинеарни Диофантови равенки	79
4.	Задачи	83

V ГЛАВА

КОНГРУЕНЦИИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

1.	Поим за конгруенција. Основни својства	89
2.	Примена на конгруенциите	93
3.	Задачи	97

РЕШЕНИЈА

Решенија на задачите од прва глава	101
Решенија на задачите од втора глава	152
Решенија на задачите од трета глава	162
Решенија на задачите од четврта глава	189
Решенија на задачите од петта глава	212

Литература	225
Индекс на поими	227
За авторите	229

ПРЕДГОВОР

Теоријата на броеви обилува со многу интересни теврдења и задачи, дел од кои лесно се усвојуваат, но има и многу тешки и досега нерешени проблеми стари и по неколку стотици години. Може да се каже дека многу делови на современата математика настанале како резултат на решавањето и воопштувањето на навидум елементарни проблеми од теоријата на броеви. Токму едноставноста во формулациите на проблемите и елегантностa на решенијата на одделни задачи е причина за популарноста на теоријата на броеви од дамнешни времиња до денес, која популарност е особено изразена меѓу вљубениците во математиката на кои истата не им е професија. Ова придонесло, во најраните периоди од развојот на теоријата на броеви, бројни проблеми да бидат решени токму од “нематематичари”, при што историјата бележи и многу заблуди и разочарувања, кои се присутни дури и кај најголемите математички умови.

Книгава Вовед во елементарна теорија на броеви е наменета за учениците од завршните одделенија од основното, кои сакаат да ги прошират своите знаења во една од најстарите математички дисциплини. Меѓутоа, на мислење сме дека истата ќе биде од корист и на наставниците кои дел од своето време им го посветуваат на развојот на учениците надарени за математика.

Целта на оваа книга е да ги запознае најмладите читатели со основните поими од теоријата на броеви, па затоа истата е поделена во пет глави во кои посебно се обработени основните елементи од теоријата на броеви: деливоста, основната теорема на аритметиката, простите и сложените броеви, линеарната Диофантова равенка и конгруенциите. При разработката на материјалот се докажани 47 теореми, признаци и последици, за чие подобро усвојување се решени 67 примери. На крајот од секоја глава е даден поголем број задачи од национални и меѓународни натпревари за ученици од основно и средно образование. Изборот на задачите, кои ги има вкупно

431 е направен така што истите треба да допринесат за подобро усвојување на поимите и идеите на елементарната теорија на броеви. Меѓутоа, дел од задачите се во функција на подигнување на општата математичка култура на учениците и развој на нивните творечки способности. Многу домашни и меѓународни натпревари укажуваат на фактот дека решавањето на задачи од теоријата на броеви предизвикува посебни тешкотии, па затоа скоро сите задачи се комплетно решени. Сепак на читателите им препорачуваме најпрво самостојно да се обидат да ја решат секоја задача, па ако тоа не им појде од рака да го разработат решението истата. Последното е од особена важност, бидејќи при изборот како на теоријата, така и на задачите се водење од размислата читателот да усвои бројни идеи кои може да се користат при решавањето дури и на најтешките задачи кои се задаваат на меѓународните натпревари по математика.

Рецензентите доц. д-р Методи Главче и асс. м-р Емилија Камчева со своите корисни сугестии и забелешки допринесоа да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

Ќе ни биде особено задоволство ако оваа книга допринесе повеќе да ја засакате математиката, да навлезете во нејзините тајни и можда на некои од вас таа да им стане животен позив.

За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Август, 2014

Авторите

І ГЛАВА

ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ И ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

1. ПОИМ ЗА ДЕЛИВОСТ

1.1. Познати ни се множествата

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \text{ и}$$

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Операциите собирање и множење во овие множества се секогаш изводливи, т.е.

ако $m, n \in \mathbf{N}$, тогаш $m + n \in \mathbf{N}$ и $mn \in \mathbf{N}$;

ако $m, n \in \mathbf{N}_0$, тогаш $m + n \in \mathbf{N}_0$ и $mn \in \mathbf{N}_0$; и

ако $m, n \in \mathbf{Z}$, тогаш $m + n \in \mathbf{Z}$ и $mn \in \mathbf{Z}$.

Понатаму, за одземањето знаеме дека

ако $m, n \in \mathbf{N}$, тогаш $m - n \in \mathbf{N}$ ако и само ако $m > n$;

ако $m, n \in \mathbf{N}_0$, тогаш $m - n \in \mathbf{N}_0$ ако и само ако $m \geq n$; и

ако $m, n \in \mathbf{Z}$, тогаш $m - n \in \mathbf{Z}$.

Останува да ја разгледаме операцијата делење, која не е секогаш изводлива во множествата $\mathbf{N}, \mathbf{N}_0$ и $\mathbf{Z}$. Имено, ако m и $n \neq 0$ се природни или цели броеви, тогаш количникот $m:n$ не е секогаш природен или цел број. И токму тоа, прашањето кога бројот m е делив со бројот $n \neq 0$, т.е. прашањето за деливоста во множествата $\mathbf{N}, \mathbf{N}_0$ и $\mathbf{Z}$ лежи во основата на теоријата на броевите.

1.2. Дефиниција. За бројот $a \in \mathbf{Z}$ ќе велиме дека е *делив* со бројот $b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$, ако постои број $q \in \mathbf{Z}$ така што е исполнето равенството $a = bq$. Притоа ќе велиме дека b е *делител* на a , односно дека a е *содржател* на b и ќе пишуваме $b|a$.

Ако бројот $b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$ не е делител на бројот $a \in \mathbf{Z}$, т.е. ако не постои број $q \in \mathbf{Z}$ така што е исполнето равенството $a = bq$, тогаш ќе пишуваме $b \nmid a$.

Ќе велиме дека b е *вистински делител* на a ако $b|a$ и $b \neq a$.

1.3. Пример. а) Бидејќи $15 = 5 \cdot 3$, од дефиниција 1.2 следува дека $3 \mid 15$ и $5 \mid 15$. Според тоа, броевите 1, 3 и 5 се вистински делители на 15.

б) За броевите 17 и 3 имаме $17 = 5 \cdot 3 + 2$ и бидејќи

$$5 \cdot 3 < 5 \cdot 3 + 2 < 6 \cdot 3,$$

заклучуваме дека не постои природен број q таков што $17 = 3q$, што значи дека $3 \nmid 17$.

в) Ќе ги определиме сите делители на броевите 84 и 56. Имаме

$$\frac{1}{84} \quad \frac{2}{42} \quad \frac{3}{28} \quad \frac{4}{21} \quad \frac{6}{14} \quad \frac{7}{12} \quad \text{и} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{2}{28} \quad \frac{4}{14} \quad \frac{7}{8}.$$

Следствено, сите делители на бројот 84 се: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 и 84. Притоа за два различни делители чиј производ е еднаков на 84 ќе велиме дека се *заемно комплементарни делители*. Такви се паровите 1 и 84, 2 и 42, 3 и 28, 4 и 21, 6 и 14, 7 и 12.

Повтори ја претходната дискусија за бројот 56. ■

1.4. Забележуваме дека ако $a, b \in \mathbf{N}$, тогаш и $q \in \mathbf{N}$. Понатаму, ако $b \mid a$, тогаш од $a = bq$ непосредно следуваат равенствата

$$a = (-b)(-q), \quad -a = b(-q) \quad \text{и} \quad -a = (-b)q,$$

од што согласно дефиницијата 1.2 следува дека

$$(-b) \mid a, \quad b \mid (-a) \quad \text{и} \quad (-b) \mid (-a).$$

Претходно изнесеното ни дава за право, при разгледувањето на деливоста, да се ограничime на ненегативните цели броеви, т.е. на множеството $\mathbf{N}_0$.

Едно од клучните прашања во теоријата на броеви е прашањето за бројот на делителите на даден природен број. На ова прашање ќе се навратиме во натамошните разгледувања, а овде само ќе забележиме дека од равенството $a = a \cdot 1$ непосредно следува дека секој цел број различен од 0 е делив со бројот 1 и со самиот себе, т.е. $1 \mid a$ и $a \mid a$ ако $a \neq 0$. Исто така, од равенството

$$0 = 0 \cdot q, \quad \text{за секој } q \in \mathbf{N}$$

следува дека бројот 0 има бесконечно многу делители, т.е. $a \mid 0$ ако $a \neq 0$.

Да забележиме дека бројот 0 е единствен цел број кој има бесконечно многу делители. Навистина, ако $a \neq 0$ и $b \mid a$, тогаш од дефиниција 1.2 имаме $a = bq$, $a, b, q \in \mathbf{N}$, па затоа

$$a = bq \geq b \cdot 1 = b,$$

што значи дека сите делители на бројот a се помали или еднакви на a , а таквите броеви се конечно многу.

1.5. Пример. а) Докажи дека збирот на било кои три последователни природни броеви е делив со бројот 3.

б) Докажи дека збирот на три последователни степени на бројот 2, чии степенови показатели се природни броеви, е делив со бројот 7.

Решение. а) Ако со k го означиме најмалиот од трите последователни природни броеви, тогаш другите два броја се броевите $k+1$ и $k+2$. За збирот на овие броеви имаме

$$k + (k+1) + (k+2) = 3k + 3 = 3(k+1),$$

па од дефиниција 1.2 следува $3 \mid [k + (k+1) + (k+2)]$, што и требаше да се докаже.

б) Според условот на задачата имаме дека степените показатели се $k, k+1$ и $k+2$, $k \in \mathbf{N}$. Затоа, за бараниот збир имаме:

$$2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^k + 2 \cdot 2^k + 2^2 \cdot 2^k = 2^k(1 + 2 + 2^2) = 7 \cdot 2^k,$$

што според дефиниција 1.2 значи дека

$$7 \mid (2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2}). \blacksquare$$

1.6. Теорема. Нека $a, b \in \mathbf{N}$. Ако $a \mid b$ и $b \mid a$, тогаш $a = b$.

Доказ. Нека $a, b \in \mathbf{N}$, $a \mid b$ и $b \mid a$. Од $a \mid b$ следува дека постои $q \in \mathbf{N}$ таков да $b = aq$, а од $b \mid a$ следува дека постои $p \in \mathbf{N}$ таков да $a = bp$. Понатаму, од равенствата $b = aq$ и $a = bp$ добиваме

$$b = aq = (bp)q = b(pq), \quad \text{т.е.} \quad b = b(pq).$$

Ако последното равенството го поделиме со $b \neq 0$ го добиваме равенството $pq = 1$. Но, $p, q \in \mathbf{N}$, па затоа од последното равенство следува $p = q = 1$. Конечно, $a = bp = b \cdot 1 = b$. $\blacksquare$

1.7. Теорема. Нека $a, b, c \in \mathbf{N}$. Ако $a \mid b$ и $b \mid c$, тогаш $a \mid c$.

Доказ. Нека $a, b, c \in \mathbf{N}$, $a \mid b$ и $b \mid c$. Од $a \mid b$ следува дека постои $q \in \mathbf{N}$ таков да $b = aq$, а од $b \mid c$ следува дека постои $p \in \mathbf{N}$ таков да $c = bp$. Понатаму, од равенствата $c = bp$ и $b = aq$ следствено добиваме $c = bp = (aq)p = a(qp)$, што според дефиниција 1.2 значи дека $a \mid c$. $\blacksquare$

1.8. Пример. Докажи дека разликата на бројот $\overline{xabx}$ и бројот запишан со истите цифри, но по обратен редослед е делива со 9.

Решение. За бројот $\overline{xabx}$ имаме

$$\overline{xabx} = 1000x + 100a + 10b + x,$$

а за бројот запишан со истите цифри, но по обратен редослед, имаме

$$\overline{xba x} = 1000x + 100b + 10a + x.$$

Од последните две равенства наоѓаме

$$\overline{xabx} - \overline{xba x} = 1000x + 100a + 10b + x - (1000x + 100b + 10a + x) = 90(a - b),$$

што значи дека $90 \mid (\overline{xabx} - \overline{xba x})$. Понатаму, од $90 = 9 \cdot 10$ следува $9 \mid 90$ и бидејќи $90 \mid (\overline{xabx} - \overline{xba x})$, од теорема 1.7 следува дека $9 \mid (\overline{xabx} - \overline{xba x})$. ■

2. ОПШТИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

2.1. Честопати се јавува потреба да оцениме дали еден број е делив со друг број, без да го извршиме делењето на тие броеви. Притоа ги користиме таканаречените признаци за деливост на природните броеви. Тоа се тврдења преку кои заклучуваме кога еден број е делив со друг број, без да вршиме делење.

Познати ни се признаците за деливост на природен број со 2, 3, 4, 5, 8 и 9, за кои во натамошните разгледувања ќе дадеме докази. Во овој дел ќе се задржиме на признаците за деливост на збир, разлика и производ, кои со едно име ги нарекуваме општи признаци за деливост.

2.2. Теорема. Ако $b \mid a$, тогаш $b \mid (ac)$, за секој $c \in \mathbf{N}$.

Доказ. Навистина, ако $b \mid a$, тогаш постои $q \in \mathbf{N}$ таков што $a = bq$. Сега, за секој $c \in \mathbf{N}$ добиваме $ac = (bq)c = b(qc)$. Значи, за бројот $ac \in \mathbf{N}$ постои број $qc \in \mathbf{N}$ таков што $ac = b(qc)$, па од дефиниција 1.2 имаме дека $b \mid (ac)$. ■

2.3. Пример. Докажи дека $8 \mid (9^8 - 1)$.

Решение. Задачата можеме да ја решиме со пресметување на бројот $9^8 - 1$ и потоа директно да провериме дали $8 \mid (9^8 - 1)$.

Меѓутоа “поеlegantно” решение можеме да дадеме со примена на теорема 2.2. Јасно, $8 \mid 8$. Од теорема 2.2 имаме

$$8 \mid 8 \cdot (9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1) = (9 - 1)(9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1)$$

$$= 9^8 + 9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 - 9^7 - 9^6 - 9^5 - 9^4 - 9^3 - 9^2 - 9 - 1 = 9^8 - 1$$

што и требаше да се докаже. ■

2.4. Теорема. Нека $a = b + c$ и $d | b$. Тогаш $d | a$ ако и само ако $d | c$.

Доказ. Нека $a = b + c$ и $d | b$, т.е. постои q таков што $b = dq$. Ако $d | c$, тогаш постои p таков што $c = dp$. Според тоа,

$$a = b + c = dq + dp = d(q + p),$$

што според дефиниција 1.2 значи дека $d | a$.

Ако $d | a$, тогаш постои r таков што $a = dr$. Според тоа,

$$c = a - b = dr - dq = d(r - q),$$

што според дефиниција 1.2 значи дека $d | c$. ■

2.5. Пример. а) Бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Докажи дека и бројот $\overline{bca} + \overline{cab}$ е делив со 37.

б) Ако бројот од облик 2^k е најмалку четирицифрен, докажи дека не може да има четири исти последни цифри.

Решение. а) За трите броја запишани со истите цифри како дадени-от важи

$$\begin{aligned}\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10ab \\ &= 111a + 111b + 111c = 37(3a + 3b + 3c),\end{aligned}$$

односно $37 | (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$. Но од условот имаме дека $37 | \overline{abc}$, па од теорема 2.4 следува дека $37 | (\overline{bca} + \overline{cab})$.

б) Нека 2^k има четири исти последни цифри, односно нека

$$2^k = \overline{b_1 \dots b_n aaaa} = 10000b + \overline{aaaa} = 10000b + 1111a = 10000b + 11 \cdot 101a.$$

Ако бројот 2^k е најмалку четирицифрен, тогаш $k > 5$, па затоа од

$$2^k > 2^5 = 16 \cdot 2$$

следува дека овој број се дели со 16. Но, 10000 се дели со 16, а додека $11 \cdot 101a$ не се дели со 16, што противречи на теорема 2.4. Конечно, од добиената противречност следува дека бројот 2^k не може да има последни четири еднакви цифри. ■

2.6. Теорема. Ако $a | b$ и $a | c$, тогаш $a | (bx + cy)$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$.

Доказ. Нека $a|b$ и $a|c$. Од теорема 2.2 имаме дека $a|(bx)$ и $a|(cy)$ за секои $x, y \in \mathbb{Z}$. Сега од теорема 2.4 следува дека $a|(bx + cy)$ за секои $x, y \in \mathbb{Z}$. ■

2.7. Забелешка. Од теорема 2.6 непосредно следува тврдењето.

Ако $a|b$ и $a|c$, тогаш $a|(b+c)$ и $a|(b-c)$.

Навистина, за да докажеме дека $a|(b+c)$, доволно е во теорема 2.6 да земеме $x=y=1$, а за да докажеме дека $a|(b-c)$, доволно е да земеме $x=1$ и $y=-1$. ■

2.8. Пример. Ако a и b се цели броеви такви што $31|(6a+11b)$, тогаш $31|(a+7b)$. Докажи!

Решение. Од $31|(6a+11b)$ следува дека постои m таков што

$$6a+11b=31m.$$

Но, тоа значи дека

$$30a+55b=5(6a+11b)=5 \cdot 31m,$$

т.е. $31|(30a+55b)$. Од друга страна имаме

$$31a+62b=31(a+2b)=31n, \text{ т.е. } 31|(31a+62b).$$

Конечно, од забелешка 2.7 следува дека

$$31|[31a+62b-(30a+55b)]=a+7b,$$

што и требаше да се докаже. ■

2.9. Пример. Ако $13|(a^2+b^2)$, тогаш $13|(2a+3b)(3a+2b)$. Докажи!

Решение. Да забележиме дека

$$(2a+3b)(3a+2b)=6(a^2+b^2)+13ab.$$

Бидејќи $13|(a^2+b^2)$, од теорема 2.2 следува дека $13|6(a^2+b^2)$. Понатаму, $13|13ab$, па од забелешка 2.7 следува

$$13|[6(a^2+b^2)+13ab]=(2a+3b)(3a+2b). \quad \blacksquare$$

2.10. Теорема. Ако $m|a$ и $n|b$, тогаш $mn|(ab)$.

Доказ. Од $m|a$ и $n|b$ следува дека постојат p и q такви што $a=mp$ и $b=nq$. Според тоа,

$$ab = (mp)(nq) = (mn)(pq),$$

што значи дека $mn \mid (ab)$. ■

2.11. Пример. Докажи дека ако бројот n е делив со броевите 2 и 3, тогаш тој е делив со бројот 6.

Решение. Бидејќи $3 \mid 3$ и $2 \mid n$ од теорема 2.8 следува дека $2 \cdot 3 \mid 3n$, т.е. $6 \mid 3n$. Аналогно, $2 \mid 2$ и $3 \mid n$, па од теорема 2.8 имаме $2 \cdot 3 \mid 2n$, т.е. $6 \mid 2n$. Конечно, од забелешка 2.7 следува дека $6 \mid (3n - 2n) = n$. ■

2.12. Забелешка. На крајот од овој дел да забележиме дека теорема 2.8 може да се воопшти, т.е. дека важат следниве тврдења, кои ќе ги усвоиме без доказ.

а) Ако $m_1 \mid a_1, m_2 \mid a_2, \dots, m_k \mid a_k$, тогаш $m_1 m_2 \dots m_k \mid a_1 a_2 \dots a_k$.

б) Ако $m \mid a$, тогаш $m^k \mid a^k$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

3. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

3.1. На почетокот рековме дека операцијата делење не е секогаш изводлива во множествата $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Z}$. Меѓутоа, знаеме дека во множеството $\mathbf{N}$ за операцијата делење важи таканаречената *теорема за делење со остаток*.

Ако $a, b \in \mathbf{N}$, тогаш постојат $q, r \in \mathbf{N}_0$ такви што

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Притоа, како што знаеме, бројот a го нарекуваме *деленик*, b - *делител*, q - *количник* и r - *остаток*.

Така, на пример, за броевите $a=17$ и $b=3$ имаме $17=3 \cdot 5 + 2$, што значи дека $q=5$ и $r=2$, а за броевите $a=342$ и $b=38$ имаме $342=38 \cdot 9 + 0$, што значи дека $q=9$ и $r=0$.

Претходно искажаната теорема за делење со остаток важи и во следниов поопшт облик.

3.2. Теорема (за делење со остаток). За секој $a \in \mathbf{Z}$ и секој $b \in \mathbf{N}$ постојат единствени цели броеви q и r такви што

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (1)$$

Доказ. Да го разгледаме множеството

$$A = \{..., a - 3b, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, a + 3b, ...\}.$$

Ова множество содржи како негативни така и ненегативни цели броеви. Да го разгледаме множеството B од ненегативни цели броеви кои се содржат во множеството A . Како што знаеме, множеството B има најмал елемент кој е природен број или е еднаков на нула. Нека е тоа бројот $a - qb$ и да го означиме со r . Тогаш важи (1), бидејќи во спротивно, ако $r \geq b$ тогаш бројот $a - (q+1)b$, кој е помал од $a - qb$, ќе биде природен број или еднаков на нула. Со тоа докажавме дека броевите q и r постојат и дека го задоволуваат (1).

Ќе докажеме дека броевите q и r се единствени. Да претпоставиме дека за броевите q_1 и r_1 важи

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b. \quad (2)$$

Ако од (1) го одземеме (2), добиваме

$$0 = b(q - q_1) + (r - r_1). \quad (3)$$

Според тоа, $b \mid (r - r_1)$ и $b \mid (r_1 - r)$, при што или $r - r_1 \geq 0$ или $r_1 - r \geq 0$. Нека $r - r_1 \geq 0$. Ако $r - r_1 > 0$, тогаш од $b \mid (r - r_1)$ и $0 < r - r_1 < b$ добиваме дека природен број е делив со природен број кој е поголем од него, што не е можно. Значи $r - r_1 = 0$, т.е. $r = r_1$. Сега, од (3) добиваме $0 = b(q - q_1)$ и бидејќи $b \neq 0$ имаме $q - q_1 = 0$, т.е. $q = q_1$, што значи дека броевите q и r се единствени. ■

3.3. Забелешка. Од теорема 3.2 непосредно следува дека $b \mid a$ ако и само ако остатокот r од делењето на a со b е 0, т.е. $r = 0$.

Количникот q од теоремата 3.2 може да биде кој било цел број, а r е некој број од множеството $\{0, 1, \dots, b-1\}$, кое го нарекуваме *множество на остатоци на бројот b* .

Очигледно, $\{0, 1\}$ е множеството на остатоци на бројот 2, бидејќи при делење со 2 се добива остаток 0 или 1. Според тоа, секој цел број може да го претставиме во обликот: $2k$ или $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Броевите од видот $2k$ ги нарекуваме *парни броеви*, а оние од видот $2k+1$ ги нарекуваме *непарни броеви*.

Слично, при делењето со 3, можни се следниве остатоци: или 0 или 1 или 2, па затоа секој цел број може да се запише во обликот: $3k$ или

$3k+1$ или $3k+2$, $k \in \mathbf{Z}$. Во првата група (велиме уште и класа), спаѓаат сите цели броеви деливи со 3, во втората се оние кои при делење со 3 даваат остаток 1, а во третата оние кои при делење со 3 даваат остаток 2. Често пати видот $3k+2$ го запишуваме како $3m-1$, бидејќи

$$3k+2=3k+3-1=3(k+1)-1=3m-1.$$

Аналогно, при делењето со 6, можни се следниве остатоци: или 0, или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, па затоа секој цел број може да се запише во обликот: или $6k$ или $6k+1$ или $6k+2$ или $6k+3$ или $6k+4$ или $6k+5$, $k \in \mathbf{Z}$, односно во еден од видовите

$$6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k+3, k \in \mathbf{Z}.$$

Ќе решиме неколку задачи користејќи ја теоремата за делење со остаток.

3.4. Пример. а) Најди најголем природен број кој при делење со 31 дава количник 17.

б) При делење на бројот 170 е добиен остаток 11. Колку изнесува делителот и колкав е соодветниот количник?

в) При делење на бројот 237 е добиен количник 13. Колку изнесува делителот и кои остатоци се добиваат?

Решение. а) Во случајот се дадени $b=31$ и $q=17$, а се бараат a и r . Бројот a , кој при делење со 31 дава количник 17, можеме да го запишеме во обликот

$$a=31 \cdot 17 + r, 0 \leq r < 31.$$

Тој ќе биде најголем, ако остатокот r е најголем, т.е. ако $r=30$. Значи,

$$a=31 \cdot 17 + 30 = 557.$$

б) Дадено е дека: $a=170, r=11$; се бараат b и q . Треба да важи

$$170=bq+11, \text{ т.е. } bq=159.$$

Бидејќи $159=1 \cdot 159$ и $159=3 \cdot 53$, постојат четири можности:

или $b=159, q=1$ или $b=53, q=3$ или $b=3, q=53$ или $b=1, q=159$.

Последните две можности отпаѓаат, бидејќи остатокот треба да биде помал од делителот ($0 \leq r < b$). Затоа задачата има две решенија $b=159, q=1$ и $b=53, q=3$.

в) Дадено е $a=237, q=13$; се бараат b и r . Согласно теорема 3.2

$$237=13b+r, \quad 0 \leq r < b$$

и оттука заклучуваме дека $237 \geq 13b$ и $237 < 14b$, т.е.

$$\frac{237}{13} \geq b \text{ и } \frac{237}{14} < b.$$

Единствени природни броеви кои ги задоволуваат последните две неравенства се броевите 17 и 18, па затоа

$$b=17, r=237-13 \cdot 17=16 \text{ или } b=18, r=237-13 \cdot 18=3. \blacksquare$$

3.5. Пример. а) Докажи дека збирот на четири последователни природни броеви при делење со 4 дава остаток 2.

б) Природниот број a не е делив со бројот 5. Колку изнесува остатокот кој се добива при делење на бројот a^4 со бројот 5.

Решение. а) Нека $k, k+1, k+2$ и $k+3$ се четири последователни природни броеви. За нивниот збир имаме

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) = 4(k+1) + 2.$$

Од теоремата за делење со остаток следува дека остатокот при делење на $4(k+1) + 2$ со 4 е единствен и е еднаков на 2.

б) Бројот a кој не е делив со 5 може да се запише како $5k \pm 1$ или $5k \pm 2, k \in \mathbb{N}$. Квадратот на ваков број е

$$a^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 = 5m + 1$$

или

$$a^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k + 1) - 1 = 5m - 1.$$

Ако последните две равенства ги квадрираме уште еднаш добиваме

$$a^4 = (5m \pm 1)^2 = 25m^2 \pm 10m + 1 = 5(5m^2 \pm 2m) + 1 = 5n + 1.$$

Значи, остатокот при делење на бројот a^4 со бројот 5 е 1. $\blacksquare$

3.6. Пример. Ако r_1, r_2, r_3 се остатоците од делењето на бројот a со броевите 3, 5, 7 соодветно, докажи дека бројот $70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - a$ се дели со 105.

Решение. Од условот имаме $a = 3k + r_1 = 5l + r_2 = 7m + r_3$, па затоа $r_1 = a - 3k$, $r_2 = a - 5l$ и $r_3 = a - 7m$. Според тоа,

$$\begin{aligned} 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - a &= 70(a - 3k) + 21(a - 5l) + 15(a - 7m) - a \\ &= 105(a - 2k - l - m) \end{aligned}$$

па затоа $70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - a$ се дели со 105. $\blacksquare$

3.7. Теорема. Збирот на природните броеви a и b е делив со природниот број c ако и само ако збирот на остатоците на броевите a и b при делење со бројот c е делив со c .

Доказ. Според теоремата за делење со остаток, за броевите a и b имаме $a = cq_1 + r_1$ и $b = cq_2 + r_2$. Значи,

$$a + b = (cq_1 + r_1) + (cq_2 + r_2) = c(q_1 + q_2) + r_1 + r_2,$$

што значи дека $a + b$ е делив со c ако и само ако $r_1 + r_2$ е делив со c . ■

3.8. Пример. Нека a и b се два природни броја и нека се определени нивниот збир, разлика и производ. Докажи дека барем еден од овие три броја е делив со 3.

Решение. Секој природен број може да се запише во еден од следните три облици: $3k, 3k + 1, 3k + 2$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Ако еден од броевите a и b е од облик $3k$, тогаш нивниот производ сигурно е делив со 3. Ако и двата броја a и b се од облик $3k + 1$ или од облик $3k + 2$, тогаш нивната разлика е делива со 3. Ако едниот од броевите a и b е од облик $3k + 1$, а другиот е од облик $3k + 2$, тогаш нивниот збир е делив со 3. ■

3.9. Пример. Нека $a, b, c \in \mathbf{N}$. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

Решение. Од теоремата за делење со остаток следува дека секој природен број може да се запише во еден од облиците $4k, 4k + 1, 4k + 2$ или $4k + 3$, $k \in \mathbf{N}_0$. Во секој од овие случаи квадратот на бројот може да се запише како

$$16k^2 = 8 \cdot 2k^2, \quad 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1,$$

$$16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4, \quad 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1.$$

Според тоа, квадратот на произволен природен број при делење со 8 може да има остаток 0, 1 или 4. Собирајќи кои било три остатоци од наведениот облик не можеме да добиеме збир 7, па од теоремата 3.7 заклучуваме дека збирот $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7. ■

4. ПОСЕБНИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

4.1. Познати ни се признаците за деливост на природен број со 2, 3, 4, 5, 8 и 9, кои спаѓаат во групата на посебни признаци за деливост. Најчесто посебните признаци за деливост се применуваат без за истите да

се даде прецизен доказ. Во овој дел ќе се навратиме на примената на некои посебни признаци, кои и ќе ги докажеме.

Во пример 1.8 го искористивме таканаречениот декаден запис на природен број. Да се потсетиме: секој двоцифрен број $a = \overline{xy}$ можеме да го запишеме во облик $a = 10x + y$; секој трицифрен број $b = \overline{xyz}$ можеме да го запишеме во облик $b = 100x + 10y + z$ итн. Слично, ако природниот број m е составен од $(n+1)$ -на цифра, т.е. $m = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, тогаш истиот можеме да го запишеме во развиена форма:

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0. \quad (1)$$

Така, на пример

$$\begin{aligned} 13245 &= 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \text{ и} \\ 457245 &= 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5. \end{aligned}$$

4.2. Признак за деливост со 2. Природниот број m е делив со 2 ако и само ако цифрата на единиците на бројот m е 0, 2, 4, 6 или 8.

Доказ. Нека бројот m е запишан во развиена форма (1). Броевите $10, 10^2, \dots, 10^n$ се деливи со 2, па од теорема 2.6 следува дека бројот

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1$$

е делив со 2. Според тоа, од теорема 2.4 следува дека $2 \mid m$ ако и само ако $2 \mid a_0$, т.е. ако и само ако цифрата на единиците на бројот m е 0, 2, 4, 6 или 8. ■

4.3. Признак за деливост со 4. Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

е делив со 4 ако и само ако $4 \mid (2a_1 + a_0)$.

Доказ. Нека

$$m = 10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = (10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 8a_1) + (2a_1 + a_0).$$

Броевите $8, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$ се деливи со 4, па од теорема 2.6 следува дека бројот

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 8a_1$$

е делив со 4. Конечно, од теорема 2.4 следува дека $4 \mid m$ ако и само ако $4 \mid (2a_1 + a_0)$. ■

4.4. Пример. Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката за бројот $434548*6$ да биде делив со 4?

Решение. Од признакот за деливост со 4 следува дека дадениот број е делив со 4 ако и само ако $4|(2a_1 + 6)$, каде што a_1 е цифрата која стои на местото на ѕвездичката. Со непосредна проверка наоѓаме $a_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ■

4.5. Признак за деливост со 8. Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

е делив со 8 ако и само ако $8|(4a_2 + 2a_1 + a_0)$.

Доказ. Нека

$$\begin{aligned} m &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \\ &= (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^3 a_3 + 96a_2 + 8a_1) + (4a_2 + 2a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Броевите $8, 96, 10^3, \dots, 10^n$ се деливи со 8, па од теорема 2.6 следува дека бројот

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^3 a_3 + 96a_2 + 8a_1$$

е делив со 8. Според тоа, од теорема 2.4 следува дека 8 е делител на m ако и само ако

$$8|(4a_2 + 2a_1 + a_0). \quad \blacksquare$$

4.6. Пример. а) Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката за бројот $4341903*6$ да биде делив со 8?

б) Најди најмал природен број кој е делив со 4 и има збир на цифри 2002.

Решение. а) Од признакот за деливост со 8 следува дека дадениот број е делив со 8 ако и само ако $8|(4 \cdot 3 + 2a_1 + 6)$, каде што a_1 е цифрата што стои на местото на ѕвездичката. Со непосредна проверка наоѓаме $a_1 \in \{3, 7\}$.

б) Треба да се избере број со што е можно помалку цифри, па затоа е најдобро да има што е можно повеќе цифри 9. Бидејќи $2002 = 222 \cdot 9 + 4$, добиваме дека бараниот број има најмалку 223 цифри. Заради деливоста со 4, двоцифрениот завршеток на бројот мора да е делив со 4. Најповолен двоцифрен завршеток е 88, бидејќи има најголем збир на цифри $8 + 8 = 16$. Така го добиваме бројот $\underbrace{699 \dots 9988}_{220}$ со 220 цифри 9 и 2 цифри 8. Секој

друг двоцифрен завршеток или би генерирал повеќе цифри или првата цифра би била поголема од 6. Значи, бараниот број е $\underbrace{699\dots9988}_{220}$. ■

4.7. Признак за деливост со 5. Природниот број m е делив со 5 ако и само ако цифрата на единиците на бројот m е 0 или 5.

Доказ. Нека бројот m е запишан во развиена форма (1). Броевите

$$10, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$$

се деливи со 5, па од теорема 2.6 следува дека бројот

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1$$

е делив со 5. Конечно, од теорема 2.4 следува дека 5 е делител на m ако и само ако 5 е делител на a_0 , т.е. ако и само ако цифрата на единиците на бројот m е 0 или 5. ■

4.8. Пример. Докажи дека бројот $n^2 + n + 1$ не е делив со 5 за ниту еден природен број n .

б) За кои природни броеви n бројот

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

се дели со 10?

Решение. а) Според признакот за деливост со бројот 5, доволно е да докажеме дека за секој природен број n цифрата на единиците на бројот $n^2 + n + 1$ е различна од 0 и 5. За таа цел ќе ја составиме следнава табела:

број	цифра на единици									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n^2 + n + 1$	1	3	7	3	1	1	3	7	3	1

од каде што гледаме дека за секој природен број n , бројот $n^2 + n + 1$ завршува на една од цифрите 1, 3 или 7, што значи дека тој не е делив со 5.

б) Имаме

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = (2n+3)^2 + 5,$$

што значи дека дадениот број се дели со 10 ако и само ако цифрата на единиците на бројот $(2n+3)^2$ е 5, т.е. цифрата на единиците на бројот $2n+3$ е 5. Според тоа, $2n+3=10k+5$, односно бараните броеви се од облик $n=5k+1$, $k \in \mathbf{N}$. ■

4.9. Признак за деливост со 9. Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$$

е делив со 9 ако и само ако $9|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$.

Доказ. Од декадниот запис на природниот број m добиваме:

$$\begin{aligned} m &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1)a_n + \dots + (10^2 - 1)a_2 + (10 - 1)a_1 + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \\ &= \underbrace{99\dots99}_{n \text{ девет.}} a_n + \underbrace{99\dots99}_{n-1 \text{ девет.}} a_{n-1} + \dots + 99a_2 + 9a_1 + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \\ &= 9 \cdot (\underbrace{11\dots11}_n a_n + \underbrace{11\dots11}_{n-1} a_{n-1} + \dots + 11a_2 + a_1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Конечно, бројот m го запишавме како збир на два броја од кои едниот е делив со 9, па затоа $9|m$ ако и само ако $9|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$. ■

4.10. Признак за деливост со 3. Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$$

е делив со 3 ако и само ако $3|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$.

Доказ. Од декадниот запис на природниот број m добиваме:

$$\begin{aligned} m &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 \\ &= 9 \cdot (\underbrace{11\dots11}_n a_n + \underbrace{11\dots11}_{n-1} a_{n-1} + \dots + 11a_2 + a_1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Конечно, бројот m го запишавме како збир на два броја од кои едниот е делив со 9, што значи и со бројот 3, па затоа $3|m$ ако и само ако

$$3|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0). \quad \blacksquare$$

4.11. Пример. Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката за да бројот $92357*46$ биде делив со 3, а која за тој да биде делив со 9?

Решение. Од признакот за деливост со 3 следува дека бројот $92357*46$ е делив со 3 ако и само ако збирот

$$9 + 2 + 3 + 5 + 7 + a_2 + 4 + 6 = 36 + a_2$$

е делив со 3, каде што a_2 е цифрата која стои на местото на ѕвездичката. Но, $3|36$, па затоа треба $3|a_2$, од што следува дека $a_2 \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Од признакот за деливост со 9 следува дека бројот $92357*46$ е делив со 9 ако и само ако збирот $9+2+3+5+7+a_2+4+6=36+a_2$ е делив со 9, каде што a_2 е цифрата која стои на местото на ѕвездичката. Но, $9|36$ па затоа треба $9|a_2$, од што следува $a_2 \in \{0, 9\}$. ■

4.12. Пример. Даден е природен број n , кој е запишан со 60 цифри седумки и одреден број нули. Докажи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е цел број, но вредноста на дропката $\frac{n-27}{9}$ не е цел број!

Решение. Збирот на цифрите на бројот n е $60 \cdot 7 = 420$, што според признакот за деливост со 3 значи дека $3|n$. Но, $3|27$, па затоа $3|(n-27)$, што значи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е цел број.

Јасно, $9|27$ и $9 \nmid n$, па затоа $9 \nmid (n-27)$, т.е. вредноста на дропката $\frac{n-27}{9}$ не е цел број. ■

4.13. Пример. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 11 ако и само ако бројот $a-b+c-d$ е делив со 11.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d = 1001a + 99b + 11c - a + b - c + d \\ &= 11(91a + 9b + c) - (a - b + c - d).\end{aligned}$$

Конечно од теорема 2.4 следува дека $11|\overline{abcd}$ ако и само ако $11|(a-b+c-d)$, што и требаше да се докаже. ■

4.14. Пример. а) Докажи дека бројот $\overline{ababab}$ е делив со 7 и со 13.

б) Кој услов треба да го задоволуваат цифрите a и b за да бројот $\overline{ababab}$ биде делив со 11.

Решение. а) Имаме $\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, од што следува тврдењето.

б) Од решението под а) следува дека за да бројот $\overline{ababab}$ биде делив со 11 потребно е бројот $\overline{ab}$ да биде делив со 11, што значи дека за цифрите a и b треба да важи $a = b$. ■

4.15. Пример. Ако во шестцифрен број се еднакви првата и четвртата цифра, втората и петтата, третата и шестата цифра, тогаш тој број е делив со 7, 11 и 13. Докажи!

Решение. Шестцифрените броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се од облик $\overline{abcabc}$. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c \\ &= 100100a + 10010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c) \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 10b + c).\end{aligned}$$

Според тоа, $7 | \overline{abcabc}$, $11 | \overline{abcabc}$ и $13 | \overline{abcabc}$, што и требаше да се докаже. ■

4.16. Во пример 4.13 докажавме дека произволен четирицифрен број е делив со 11 ако и само ако разликата од збирот на цифрите на парните места и збирот на цифрите на непарните места во декадниот запис на бројот е делива со 11. Истото својство го докажавме во пример 4.15 и за некои шестцифрени броеви. Овој критериум може да се воопшти за произволен природен број, т.е. точен е следниов *признак за делење со 11*, кој ќе го прифатиме без истиот да го докажуваме.

Теорема. Природниот број n е делив со 11 ако и само ако разликата од збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места во декадниот запис е делива со 11. ■

5. БРОЈНИ СИСТЕМИ

5.1. При докажување на некои својства на природните броеви се користиме со записот на броевите со помош на цифри, т.е. со *декадниот систем*, со основа 10, кој користи десет цифри. Межутоа, често пати во употреба се и бројни системи со основа различна од бројот 10. Така, на пример, во информатиката најчесто користен е бинарниот броен систем, кој има основа 2.

Следнава теорема претставува основа за користење на бројни системи со различна основа.

5.2. Теорема. Нека b е природен број поголем од 1. Тогаш секој природен број m може на единствен начин да се запише во обликот

$$m = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0, \quad (1)$$

каде $0 < a_n < b$ и $0 \leq a_i < b$, за $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Доказ. Нека b и m се дадени природни броеви. Според теоремата за делење со остаток постојат q_0 и a_0 такви што

$$m = q_0 b + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b.$$

Јасно, $q_0 \geq 0$. Ако $q_0 > 0$, тогаш за q_0 и b постојат q_1 и a_1 такви што

$$q_0 = q_1 b + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b.$$

Продолжувајќи ја постапката добиваме

$$m = q_0 b + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b, \quad q_0 > 0,$$

$$q_0 = q_1 b + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b, \quad q_1 > 0$$

$$q_1 = q_2 b + a_2, \quad 0 \leq a_2 < b, \quad q_2 > 0$$

.....

$$q_{n-2} = q_{n-1} b + a_{n-1}, \quad 0 \leq a_{n-1} < b, \quad q_{n-1} > 0$$

$$q_{n-1} = q_n b + a_n, \quad 0 \leq a_n < b, \quad q_n = 0$$

Понатаму, од неравенствата $m > q_0 > q_1 > \dots > 0$ следува дека постои природен број q_{n-1} кој е позитивен и е помал од b . Сега од последното равенство следува $a_n = q_{n-1}$, што значи дека a_n е позитивен број. Со последователна замена од горната низа равенства добиваме:

$$\begin{aligned} m &= q_0 b + a_0 \\ &= (q_1 b + a_1) b + a_0 = q_1 b^2 + a_1 b + a_0 \\ &\dots\dots\dots \\ &= (q_{n-1} b + a_{n-1}) b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \\ &= q_{n-1} b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \\ &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0. \end{aligned}$$

Со тоа ја докажавме егзистенцијата на претставувањето (1). Останува уште да ја докажеме единственоста. Нека $n \geq s$ и

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = c_s b^s + c_{s-1} b^{s-1} + \dots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$$

$0 < c_s < b$ и $0 \leq c_j < b$, за $j = 0, 1, 2, \dots, s-1$. Тогаш

$$b(a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \dots + a_2 b + a_1 - c_s b^{s-1} - c_{s-1} b^{s-2} - \dots - c_2 b - c_1) = c_0 - a_0,$$

што значи дека $b \mid (c_0 - a_0)$, па затоа $c_0 = a_0$. Ако во горното равенство поделиме со b , тогаш повторувајќи ја постапката добиваме $c_1 = a_1$. Повто-

рувајќи ја постапката, добиваме дека $c_i = a_i$, за $i = 0, 1, 2, \dots, s$. Ако $n > s$ имаме

$$a_n b^{n-(s+1)} + a_{n-1} b^{n-(s+2)} + \dots + a_{s+2} b + a_{s+1} = 0,$$

и како $b > 0$ од последното равенство следува $a_i = 0$, за $i = s+1, s+2, \dots, n$.

Со тоа е докажана единственоста на претставувањето (1). ■

5.3. Последица. Секој позитивен цел број m на единствен начин може да се претстави како збир на степени бројот 2.

Доказ. Ако во теорема 5.2 земеме $b = 2$, добиваме

$$m = 2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \dots + 2^2 a_2 + 2a_1 + a_0,$$

каде $a_n = 1$ и $a_i = 0$ или 1, за $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, од што следува точноста на тврдењето. ■

5.4. Дефиниција. Ако се исполнети условите од теорема 5.2 и ако важи (1), тогаш ќе велиме дека m е претставен во *броен систем со основа b* . Бројот b го нарекуваме *основа (база)* на дадениот броен систем, а бројот m го запишуваме во видот $m = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

Ако од контекстот е јасно во кој броен систем е запишан некој број, тогаш во записот на бројот го изоставуваме индексот b . Така, на пример, во секојдневната пракса подразбираме дека записот на бројот е даден во декаден броен систем, ако не е поинаку кажано.

5.5. Пример. Имаме

$$1456_{10} = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6,$$

$$1423_7 = 1 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 3. \quad \blacksquare$$

5.6. Пример. а) Бројот 2385_{10} ќе го запишеме во систем со основа 8. Имаме

$$2385 = 298 \cdot 8 + 1, \quad a_0 = 1$$

$$298 = 37 \cdot 8 + 2, \quad a_1 = 2$$

$$37 = 4 \cdot 8 + 5, \quad a_2 = 5$$

$$4 = 0 \cdot 8 + 4, \quad a_3 = 4,$$

па затоа $2385_{10} = 4521_8$.

б) Бројот 43_{10} ќе го запишеме во систем со основа 2. Имаме

$$\begin{array}{ll}
43 = 21 \cdot 2 + 1, & a_0 = 1 \\
21 = 10 \cdot 2 + 1, & a_1 = 1 \\
10 = 5 \cdot 2 + 0, & a_2 = 0 \\
5 = 2 \cdot 2 + 1, & a_3 = 1, \\
2 = 1 \cdot 2 + 0, & a_4 = 0, \\
1 = 0 \cdot 2 + 1, & a_5 = 1,
\end{array}$$

па затоа $43_{10} = 101011_2$. ■

5.7. Забелешка. Кај бројните системи со основа поголема од 10 неопходно е да се воведат ознаки за дополнителни цифри. На пример, во систем со основа 12 за цифрите 10 и 11 можеме да ги користиме ознаките a и b . На тој начин ги добиваме цифрите за бројниот систем со основа 12: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a и b .

Во информатиката често пати се користи систем со основа 16, при што за цифрите A, B, C, D, E и F се користат за означување на броевите 10, 11, 12, 13, 14, и 15. Ово систем е познат под називот *хексадецимален систем*, а додека системот со основа 2 во литературата е познат под називот *бинарен систем*.

5.8. Пример. а) Ќе го претставиме бројот $2ba4_{12}$ во декаден броен систем. Имаме

$$2ba4_{12} = 2 \cdot 12^3 + 11 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 4 = 3456 + 1548 + 120 + 4 = 5164.$$

б) Бројот $B3FC_{16}$ претставен во декаден броен систем е:

$$B3FC_{16} = 11 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 12 = 45056 + 768 + 240 + 12 = 46076. \blacksquare$$

6. ЗАДАЧИ

- Најди природни броеви a и b такви што и броевите $x = \frac{2a+b}{3b+2}$, $y = \frac{3b+2}{8}$ и $z = \frac{8}{2a+b}$ се исто така природни броеви. Дали постојат природни броеви a и b за кои и $\frac{x}{2}, \frac{y}{4}$ и $4z$ се природни броеви?

2. Во осумцифрениот број $121****5$ најди ги непознатите цифри така да овој број е квадрат на природен број.
3. Најди го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 12345679 за да се добие број кој е запишан само со цифрата 5.
4. Најди ги сите природни броеви кои стануваат 14 пати помали ако се изостави цифрата на единиците.
5. Одреди ги цифрите a, b и c така што да важи $\overline{ab}^a = \overline{bcb}$.
6. На која цифра завршува бројот 2^{100} ?
7. Со колку нули завршува бројот $9^{999} + 1$?
8. Најди ги последните две цифри на бројот 7^{1999} .
9. Ако $a + \frac{1}{a}$ е цел број, тогаш и $a^4 + \frac{1}{a^4}$ е цел број. Докажи!
10. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900}$.
11. Во квадратна 100×100 мрежа запишани се било кои 10000 броеви. Со a_1 да го означиме збирот на броевите од првата колона, со a_2 збирот на броевите од втората колона, итн. со a_{100} збирот на броевите до стотата колона. Понатаму, со b_1 да го означиме збирот на броевите од првата редица, со b_2 збирот на броевите од втората редица, итн. со b_{100} збирот на броевите од стотата редица. Пресметај ја вредноста на изразот $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100})$.
12. Природниот број n има најмалку две цифри и завршува на цифрата 5. Ако на бројот n ја избришеме последната цифра, добиениот број го помножимо со неговиот следбеник и на добиениот број од десно му допишеме 25, тогаш го добиваме бројот n^2 . Докажи!
13. За кои цифри a и b , ($a \neq 0$) бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ е полн квадрат?
14. Докажи дека збирот на производот на четири последователни природни броеви и бројот 1 е квадрат на природен број.

15. Дали постојат природни броеви m и n такви да $m^2 + n$ и $n^2 + m$ се квадрати на природни броеви?
16. Парен број четворки, запишани една до друга, го формираат бројот A во декаден запис, а двојно помал број осумки го формираат бројот B . Докажи дека бројот $A + 2B + 4$ секогаш е полн квадрат.
17. Докажи дека бројот $\underbrace{111\dots111}_{2000} - \underbrace{222\dots222}_{1000}$ е квадрат на природен број.
18. Докажи дека бројот $k = \underbrace{11\dots11}_{n} \underbrace{22\dots22}_{n+1} 5$ е квадрат на природен број.
19. Докажи дека бројот $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ пати}}$ е производ на два последователни природни броја.
20. Докажи дека за секој природен број n бројот $2^n + 3^{n+3}$ не е квадрат на ниту еден природен број.
21. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат n различни природни броеви, такви што збирот на нивните квадрати е квадрат на природен број.
22. Магдалена во 1986 година имала толку години колку што изнесува збирот на цифрите од годината на нејзиното раѓање. Колку години имала Магдалена во 1986 година?
23. Најди ги цифрите x, y, z за кои важи $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$.
24. Во текот на петгодишното студирање Киро положил 31 испит. Тој секоја година полагал повеќе испити од претходната, а петтата година положил три пати повеќе испити отколку првата. Колку испити положил Киро во четвртата година?
25. Даден е трицифрен број. Со разместување на неговите цифри ги добиваме сите трицифрени броеви запишани со истите цифри. Збирот на сите овие броеви е еднаков на 1988. Со кои цифри е запишан дадениот трицифрен број? Најди ги сите решенија.
26. Некој трицифрен број се зголемува за 45, ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а истиот се намалува за 270 ако цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи ако цифрите на единиците и стотките ги заменат местата?

27. Најди двоцифрен број кој е еднаков на збирот на кубот на цифрата на десетките и квадратот на цифрата на единиците со кои е запишан.
28. За природните броеви a, b, c, d се исполнети равенствата $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}$. Докажи дека $a = c$ и $b = d$.
29. Дали е можно збирот $1+2+\dots+(n-1)+n$, $n \in \mathbf{N}$ да завршува на цифрите 2012? Одговорот да се образложи.
30. Збирот на сите природни броеви од 1 до n е еднаков на трицифрен број со еднакви цифри. Колку природни броеви се собрани?
31. Најди шестцифрен број чиј производ со 2, со 3, со 4, со 5 и со 6 повторно е шестцифрен број запишан со истите цифри како и почетниот број.
32. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека, ако бројот $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ е цел број, тогаш тој е полн квадрат.
33. Да се определат сите природни броеви n за кои вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ е исто така природен број.
34. Најди ги сите целобројни вредности на бројот a , за кои изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број.
35. За кои вредности на n , изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број?
36. Да се определат сите цели броеви a за кои изразот $\frac{a^2+1}{a-1}$ исто така е цел број.
37. Да се определат сите природни броеви n , такви што $5^{n-1} + 3^{n-1}$ е делител на $5^n + 3^n$.
38. Најди ги сите цели броеви n за кои $(n+1) | (n^2+1)$.
39. Најди ги сите цели броеви n за кои бројот $n^3 - 8n^2 + 2n$ е делив со $n^2 + 1$.
40. Најди го најголемиот четирицифрен број таков да кога ќе му се додаде збирот на неговите цифри се добие број делив со 2004.

41. Докажи дека разликата на произволен четирицифрен број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед е делива со 9.
42. Докажи дека разликата на произволен трицифрен број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед е делива со 9 и 11.
43. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 27. Докажи дека збирот на дадениот број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 27.
44. Нека за двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи $\overline{ab} = 5\overline{cd}$. Докажи дека бројот $\overline{abcd}$ се дели со 3.
45. За природниот број велиме дека е *палиндром* ако со запишување на цифрите во обратен редослед се добива истиот број. Најди го најголемиот петцифрен палиндром кој е делив со 101.
46. Збирот на седум последователни цели броеви е делив со 7. Докажи!
47. Збирот на осум последователни цели броеви не е делив со 8. Докажи!
48. Докажи дека збирот на $2n+1$ последователни природни броеви е делив со $2n+1$.
49. Докажи дека бројот $n^2 + 8n + 15$, $n \in \mathbf{N}$ не се дели со бројот $n+4$.
50. Докажи дека $37 \mid (333^{2003} + 555^{2003})$.
51. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $12 \mid (3^n + 3^{n+1})$.
52. Докажи дека $39 \mid (3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.
53. Докажи дека $584 \mid (8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.
54. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ се дели со 10.
55. Докажи дека за секој природен број n важи $7 \mid (8^n - 14n - 1)$.
56. Докажи дека за секој природен број n важи $19 \mid (7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n)$.
57. Докажи дека за секој природен број n важи $17 \mid (6^{2n} + 19^n - 2^{n+1})$.
58. Докажи дека $10 \mid (7^{100000} - 1)$.

59. Докажи дека за секој природен број n бројот $1^{1995} + 2^{1995} + \dots + n^{1995}$ не се дели со $n + 2$.
60. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека $a^2 + ab + b^2$ е делител на бројот $(a + b)^6 - a^6$.
61. Најди еден пар природни броеви a и b за кои важи:
 1) производот $ab(a + b)$ не е делив со 7,
 2) бројот $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ е делив со 7^7 .
62. Ако a, b, c се природни броеви такви што $a^2 + b^2 = c^2$, тогаш еден од броевите a, b, c е делив со 5. Докажи!
63. Најди ја последната цифра на бројот $a = 5^n + 6^n + 7^n, n \in \mathbf{N}$.
64. Квадратот на некој природен број има облик $\overline{...x09}$. Докажи дека цифрата x е парна.
65. Најди четирицифрен број $\overline{abcd}$ таков да $\overline{abcd} = (5c + 1)^2$.
66. Најди четирицифрен број кој е еднаков на квадратот на бројот запишан со неговите последни две цифри (во ист редослед).
67. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{xyz}$ чии цифри се различни и различни од нула и такви да $\overline{xyz} : z = \overline{yz}$.
68. Ирина замислила еден број, од десно го допишала бројот 2 и на така добиениот број му додала 14. На новодобиениот број од десно му допишала 3 и потоа додала 52. Кога така добиениот број го поделила со 60, добила количник за 6 поголем од замислениот број, а остаток двоцифрен број запишан со исти цифри и тоа такви што бројот на десетките е еднаков на замислениот број. Кој број го замислила Ирина?
69. Ако еден број се подели со 63 се добива количник n и остаток 59. Колкав ќе биде остатокот при делење на тој број со 21?
70. Ако изразот $n + 100$, каде $n \in \mathbf{N}$, при делење со 23 има остаток 17, кој е остатокот кога бројот n ќе се подели со 23?
71. Со делење на некој природен број со бројот 72 се добива количник n и остаток 68. Најди ги количникот и остатокот кога дадениот број ќе се подели со 24.

72. Најди го најголемиот трицифрен број кој при делење со 18 има остаток 11.
73. Ако бројот 1000 го поделиме со некој број, добиваме остаток 8, а ако 900 го поделиме со истиот тој број добиваме остаток 1. Кој количник е добиен во првиот, а кој во вториот случај?
74. Ако 1600 го поделиме со некој број, добиваме остаток 1, а ако 1450 го поделиме со истиот тој број, добиваме остаток 7. Кој количник го добиваме во првиот, а кој во вториот случај?
75. Најди четирицифрен природен број кој при делење со 151 дава остаток 40, а при делење со 152 дава остаток 27.
76. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се последователни природни броеви. Најди го бројот n ако збирот на сите остатоци при делењето на овие броеви со 11 изнесува 2002.
77. Нека x и y се природни броеви такви да броевите $6x + 5y$ и $5x + 6y$ се полни квадрати. Докажи дека x и y се деливи со 11.
78. Најди го остатокот при делењето на бројот 3^{100} со бројот 13.
79. Докажи дека збирот на шест последователни природни броеви од кои ниту еден не е делив со 7 е делив со 21, но не е делив со 42.
80. Дадени се пет произволни природни броеви. Докажи дека меѓу нив секогаш може да се изберат два броја m и n такви да $m^4 - n^4$ се дели со 15.
81. Збир на квадратите на произволни 2006 последователни природни броеви не е квадрат на ниту еден природен број. Докажи!
82. Докажи дека бројот $3^{2000} - 1$ се дели со 10.
83. Докажи дека бројот $1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + 4^{1988} + 5^{1988} + 6^{1988}$ е делив со 5, но не е делив со 10.
84. Докажи дека бројот $n = 1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998} + 5^{1998} + 6^{1998}$ не е делив со ниту еден од броевите 2, 4, 5, 6, 8 и 10.
85. Докажи дека производот на два последователни природни броја е делив со 2.
86. Докажи дека за секој природен број n бројот $n^3 - n$ се дели со 6.

87. Ако n е природен број, тогаш $n^3 + 1997n + 1998$ се дели со 6. Докажи!
88. Докажи дека број од облик $n^3 - n + 2^n$, $n \in \mathbf{N}$ никогаш не е делив со 2007.
89. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{1998}$ се природни броеви за кои важи
- $$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1997}^2 = a_{1998}^2.$$
- Докажи дека барем два од овие броеви се парни.
90. Докажи дека број чиј декаден запис ги содржи само цифрите 2 и 6 не е разлика на квадрати на два природни броја.
91. Ако a, b, c се непарни цели броеви, тогаш еден од броевите $ab - 1$, $bc - 1$ или $ca - 1$ е делив со 4. Докажи!
92. Природниот број n , $n > 1$ го нарекуваме *совршен* ако збирот на сите негови природни делители (заедно со 1 и n) е еднаков на $2n$. Најди ги сите совршени броеви n такви да $n - 1$ и $n + 1$ се прости броеви.
93. За три последователни непарни природни броеви важи: производот на првиот и третиот не е делив со вториот број. Докажи!
94. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни природни броеви не е делив со 100.
95. Колку пати најмалку едно по друго треба да се запише бројот 2002 за да се добие број делив со 66. Во тој случај најди го количникот.
96. Најди најмал природен број кој се дели со 42, збирот на цифрите му е еднаков на 42 и неговиот двоцифрен завршеток е 42.
97. Ако првата цифра на природниот број a се помести на последното место се добива број b кој е трипати помал од a . Докажи дека бројот a се дели со 27.
98. Најди најмал природен број запишан само со цифрата 1 таков да е делив со 33...3.
- 100
99. Најди најмал 2006-тоцифрен природен број кој се запишува само со цифрите 0, 2 и 6 и е делив со 18.
100. Најди ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 5 и со 9, а разликата на цифрите на десетките и стотките е еднаква на разликата на цифрите на единиците и десетките.

101. Производот на пет последователни природни броеви е бројот $\overline{95a4b}$.
Кои се тие броеви?
102. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што $\overline{abc} = 3(a + b + c)^2$.
103. Стави цифри на место на свездичките така што бројот $4*1*$ биде делив со 12. Најди ги сите решенија.
104. Кои цифри треба да се стават на местото на свездичките за да бројот $81**$ биде делив со 90.
105. Цифрата на единиците на трицифрениот број n кој се дели со 15 е еднаква на цифрата на стотките. Кој е тој број?
106. На местото на свездичката стави цифра така да остатоците при делењето со 3 и 5 на бројот $401512*$ бидат еднакви.
107. Во бројот $\overline{1988ab}$ одреди ги непознатите цифри, за тој се дели со 33.
108. Најди го најмалиот природен број кај кој сите цифри се единици и кој е делив со 333.
109. Најди ги сите трицифрени броеви кај кои збирот на цифрите е 18 и кои се деливи со 4 и 13.
110. Некој трицифрен број е 21 пат поголем од збирот на неговите цифри. Докажи дека тој број е делив со 9. Најди го тој трицифрен број.
111. Ако четирицифрен број $\overline{abcd}$ се подели со својот двоцифрен завршеток се добива бројот 81. Ако четирицифрениот број запишан со исти цифри, но со обратен редослед на цифрите бројот $\overline{dcba}$, со својот двоцифрен завршеток се добива бројот 225. Најди го бројот $\overline{abcd}$!
112. Даден е бројот $a = \overline{4444\dots444}$. Дали овој број е делив со 8?
 2013 четворки
113. Најди ги сите трицифрени броеви чија цифра на единици е еднаква на цифрата на стотките и кои се деливи со 15.
114. Во производот $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ одреди ги цифрите a и b така да тој биде делив со 12.
115. Во бројот $\overline{1x33y}$ одреди ги цифрите x и y така да овој број биде делив со 15.

116. Во производот $\overline{31a} \cdot \overline{62b1}$ одреди ги цифрите a и b така да тој биде делив со 15.
117. На местата на a и b во четирицифрените броеви стави цифри така што изразот $\overline{323a} + \overline{b410}$ е делив со 9.
118. Определи ги вредностите на цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 18.
119. Одреди ги непознатите броеви $\overline{64a02b}$ и $\overline{3cccd}$ ако $\overline{3cccd} \cdot 18 = \overline{64a02b}$.
120. Најди ги сите шестцифрени броеви $\overline{a2011b}$ така што збирот $2010 + \overline{a2011b}$ биде делив со 6.
121. Даден е збирот $\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a}$. Определи која цифра треба да се запише на местото на буквата a така што збирот да е делив со 9.
122. Во четирицифрен број цифрата на илјадарките и десетките е 7 и 2, соодветно. Кои цифри треба да стојат на местото на стотките и единиците, за да бројот се дели со 2 и 3, но не и со нивните степени?
123. Дадени се цифрите 0, 1, 3, 4 и 5. Со помош на дадените цифри запиши ги сите петцифрени броеви кои се деливи со 4, а не се деливи со 5 (цифрите не се повторуваат).
124. На бројот 10 допиши му по една цифра од лево и од десно, така да добиениот четирицифрен број биде делив со 36.
125. Телефонскиот број на Илија се состои од два трицифрени броја од кои секој е делив со 45, а средната цифра им е 8. Најди го бројот на телефонот, ако првиот дел од бројот е помал од вториот.
126. Најди го најмалиот природен број кој е четири пати помал од бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед.
127. На неколку листови хартија напишани се броевите $+1$ и -1 , на секој лист по еден број. Збирот на сите броеви е 0, а нивниот производ е 1. Докажи дека бројот на листовите е делив со 4.
128. Дали постојат 2014 броеви $n_1, n_2, \dots, n_{2014}$ кои имаат вредности $+1$ или -1 и такви да важи $n_1 n_2 + n_2 n_3 + \dots + n_{2013} n_{2014} + n_{2014} n_1 = 0$.
129. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n . Најди го бројот n ако $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.

130. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n . Формираме низа броеви на следниов начин: $a_1 = n$, каде n е природен број, $a_2 = a_1 - S(a_1)$, $a_3 = a_2 - S(a_2)$, Ако a_{13} е првиот член во низата кој е еднаков на нула, најди го бројот n .
131. Докажи дека претходникот на квадратот на секој непарен природен број е делив со 8.
132. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни непарни природни броеви е делива со 8
133. Докажи дека производот $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 198 \cdot 199 \cdot 200$ се дели со 2^{100} , но не се дели со 2^{101} .
134. Производот на четири парни последователни природни броеви е 13440. Кои се тие броеви?
135. Нека $a_1, a_2, \dots, a_9$ се цели броеви, а $b_1, b_2, \dots, b_9$ се истите броеви земени во поинаков редослед. Докажи дека бројот $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_9 - b_9)$ е парен.
136. Природниот број n при делење со 3 дава остаток a , при делење со 5 дава остаток b , а при делење со 7 дава остаток c . Докажи дека бројот $70a + 21b + 15c - n$ се дели со 105.
137. Докажи дека за два природни броја a и b барем еден од броевите $a, b, a - b$ или $a + b$ се дели со 3.
138. Докажи дека за секој природен број n бројот $n(2n^2 + 1)$ се дели со 3.
139. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е делив со 9.
140. Докажи дека за секој природен број n бројот $n^3 + 2012n$ се дели со 3, а ако n е парен број, тогаш тој се дели и со 6.
141. Докажи дека за секој природен број n бројот $m = n^3 + 3n^2 + 2n + 6$ се дели со 6.
142. Докажи дека за секој природен број n бројот $(n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 10)$ се дели со 24.

143. Докажи дека разликата на четвртите степени на два броја, од кои првиот при делење со 5 дава остаток 1, а вториот при делење со 5 дава остаток 2, се дели со 5.
144. Ако n е природен број, тогаш бројот $n^5 - 5n^3 + 4n$ се дели со 120. Докажи!
145. Ако n е непарен природен број, тогаш бројот $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ се дели со 512. Докажи!
146. Докажи дека, ако n е природен парен број поголем од 4, тогаш бројот $n^4 - 4n^3 - 3n^2 + 16n$ се дели со 384.
147. Нека a и b се природни броеви, такви што 5 не е делител на ab . Докажи дека разликата $a^4 - b^4$ е делива со 5.
148. За било кој природен број a , еден од броевите $a^3 - a$ или $a^3 + a$ е делив со 10. Докажи!
149. Докажи дека бројот $\underbrace{666\dots6}_{2013\text{-пати}}$ не е квадрат на природен број.
150. Докажи дека бројот $9n^2 + 3n - 2$:
- не се дели со 9 за ниту еден природен број n ,
 - се дели со 2 за секој природен број n и
 - се дели со 4 за бесконечно многу природни броеви n .
151. За секој цел број a , бројот $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$ е делив со 24. Докажи!
152. Докажи дека за секој непарен природен број x бројот
- $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$,
 - $P(x) = x^3 + 7x^2 - 5x - 75$
- се дели со 8.
153. Докажи дека за секој непарен природен број x бројот
- $$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$
- се дели со 48.
154. Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека
- $$P(x) = x^{1998} - x^{1996} - x^4 - 3kx + 2x + 3k + 1.$$
- Докажи дека за секој цел број n важи $P(n) \neq 0$.

155. Дали постојат цели броеви x и y такви што

$$(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$$

е полн квадрат на природен број.

156. Најди ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на почетниот број.

157. Во четирицифрен број цифрите на илјадарките и десетките се 7 и 2, соодветно. Кои цифри треба да стојат на местото на стотките и единиците, за да бројот се дели со 2 и 3, но не и со нивните степени?

158. Даден е бројот $a = \underbrace{19581958 \dots 1958}_{100 \text{ групи } 1958}$. Докажи дека дадениот број е делив со 22, но не е делив со 44.

159. Докажи дека $123 \mid \underbrace{1111 \dots 111}_{75 \text{ единици}}$.

160. Докажи дека $81 \mid \underbrace{1111 \dots 111}_{81 \text{ единица}}$.

161. Даден е бројот $\underbrace{212121 \dots 212121}_{1980 \text{ групи } 21}$. Докажи дека овој број е делив со 99, но не е делив со 198.

162. Ако $n \in \mathbf{N}$, тогаш $6 \mid (n^3 + 2003n + 2004)$. Докажи!

163. Најди ги сите природни броеви n за кои $3(n^2 + n) + 7$ е делив со 5.

164. Нека $x = \underbrace{11 \dots 1}_{20}$. Докажи дека $x^3 - x^2 - 2x$ е делив со 1188.

165. Производот на два последователни природни броеви е делив со 12 ако поголемиот од овие броеви е полн квадрат. Докажи!

166. Производот на три последователни природни броеви е делив со 60 ако средниот број полн квадрат. Докажи!

167. Нека A и B се два природни броја кои се напишани со исти цифри (секоја цифра се појавува ист број пати и во едниот и во другиот број, но не мора да значи дека е на истото место). Ако $A + B = 10^{10}$, докажи дека бројот A е делив со 10.

168. Докажи дека бројот $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 1988^3 + 1999^3$ се дели со 1999.

169. Докажи дека бројот $2^{198} + 1$ е делив со бројот $2^{99} + 2^{50} + 1$.
170. Докажи дека бројот $2003^{2003} - 2003$ се дели со 3.
171. Докажи дека бројот $1 + 2^{2006}$ се дели со 5.
172. Докажи дека бројот $2007^{2005} - 2007$ се дели со 90.
173. Дали збирот $1004^2 - 1003^2 + 1002^2 - 1001^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ се дели со 2008.
174. Докажи дека збирот $s = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997} + 2^{1998}$ се дели со 126.
175. Докажи дека збирот $s = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997} + 2^{1998} + 2^{1999} + 2^{2000}$ се дели со 30.
176. Докажи дека збирот $s = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2001} + 5^{2002} + 5^{2003}$ се дели со 31.
177. Докажи дека бројот $1989^{1989} + 1$ е делив со 10.
178. Докажи дека бројот $2^{1992} - 1$ се дели со 5.
179. Докажи дека $81 \mid (10^{1990} - 10)$.
180. Ако n е природен број, тогаш $6 \mid (10^n - 4)$. Докажи!
181. Ако n е природен број, тогаш 45 е делител на $10^n + 35$. Докажи!
182. Ако n е природен број поголем од 1, тогаш 36 е делител на $10^n + 8$. Докажи!
183. Докажи дека бројот $n^2 - 7$ не се дели со 5 за ниту еден природен број n .
184. Природен број n е зголемен за четирикратната реципрочна вредност и тој збир е квадриран. Ако добиениот број се намали за квадратот на четирикратната реципрочна вредност на бројот n , тогаш добиениот број не е делив со 5. Докажи!
185. Нека n е природен број таков да цифрата на единиците на бројот $n^2 + 2n$ е 4. Кои се последните две цифри на бројот $n^2 + 2n$.

186. Трифрен број n е триесет и три пати поголем од збирот на своите цифри. Докажи дека $9|n$.
187. Бројот 31322_4 запиши го во систем со основа 10.
188. Бројот $5a19_{11}$ запиши го во систем со основа 10.
189. Најди природен број b таков да во систем со основа b бројот 792 е делив со 297.
190. Напиши ги таблиците за собирање и множење на ненегативните цели броеви помали од основата за бројниот систем со основа 8.
191. Најди ги сите природни броеви b такви да во систем со основа b е исполнето равенството $11 \cdot 11 = 121$.
192. Најди ги сите $n \in \mathbf{N}$ деливи со 11, такви што сите броеви кои се добиваат со произволна прераспределба на цифрите на бројот n повторно се деливи со 11.
193. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a, b) такви што броевите $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се позитивни цели броеви.

II ГЛАВА

ЕВКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

1. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ

1.1. За бројот 24 имаме $24 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Очигледно, броевите 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24 се делители на бројот 24. Забележуваме дека сите делители на 24 се помали или еднакви на 24 и нив ги има конечно многу. Последното важи за секој природен број. Имено, делителите на секој природен број a се помали или еднакви на бројот a , па затоа секој природен број, а со тоа и секој цел број различен од нула, има конечно многу делители.

1.2. Дефиниција. Нека $a, b \in \mathbb{N}$. За бројот d ќе велиме дека е *заеднички делител* на броевите a и b ако $d \mid a$ и $d \mid b$.

Нека $d_1, d_2, \dots, d_k$ се заеднички делители на a и b , и d е најголемиот меѓу броевите $d_1, d_2, \dots, d_k$, во ознака $d = \max\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$. За бројот d ќе велиме дека е *најголем заеднички делител* на a и b .

За најголемиот заеднички делител на броевите a и b најчесто се користат ознаките (a, b) или $\text{NZD}(a, b)$. Ние ќе ја користиме ознаката $\text{NZD}(a, b)$.

За бројот d ќе велиме дека е *заеднички делител* на броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ ако $d \mid a_1, d \mid a_2, \dots, d \mid a_n$.

Нека $d_1, d_2, \dots, d_k$ се заеднички делители на $a_1, a_2, \dots, a_n$. Бројот $d = \max\{d_1, \dots, d_k\}$ го нарекуваме *најголем заеднички делител* на $a_1, a_2, \dots, a_n$ и ќе го означуваме со $\text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

1.3. Забелешка. Множеството делители на природниот број a е конечно и бидејќи тоа ги содржи заедничките делители на броевите a и b , добиваме дека множеството $d_1, d_2, \dots, d_k$ од заедничките делители на a и b е конечно. Но, тоа не е празно, бројот 1 е заеднички делител на a и b , па затоа има најголем елемент. Според тоа, за секои два природни броја a и b може да се најде $\text{NZD}(a, b)$. Од напoлно исти причини јасно е дека за секои n природни броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ може да се најде $\text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Од досега изнесеното е јасно дека за да го најдеме најголемиот заеднички делител на броевите a и b , доволно е да ги определиме сите делители на a и сите делители на b и потоа меѓу нивните заеднички делители да го земеме најголемиот број. Јасно, ваквата постапка секогаш дава резултати, но не е секогаш ефективна. Имено, ако броевите a и b се мали тогаш сè е во ред, но ако станува збор за големи броеви, тогаш може да имаме сериозни тешкотии. Така, на пример, ако $a=24$ и $b=56$, тогаш лесно се гледа дека делители на 24 се 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24, а делители на 56 се 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 и 56, па затоа $\text{NZD}(24,56)=8$. Меѓутоа, ако $a=1728$ и $b=1764$, тогаш потребен е голем број пресметувања за да со претходната постапка се констатира дека $\text{NZD}(1728,1764)=36$. Токму затоа, во овој дел ќе дадеме неколку теореми со чија помош ќе можеме полесно да определуваме NZD на броеви.

1.4. Теорема. Ако $a=bq$, тогаш $\text{NZD}(a,b)=b$.

Доказ. Од $a=bq$ следува дека $b|a$ и бидејќи $b|b$, добиваме дека b е заеднички делител на a и b . Понатаму, бидејќи $\text{NZD}(a,b) \leq b$ и b е заеднички делител на a и b , добиваме дека $\text{NZD}(a,b)=b$. ■

1.5. Теорема. а) Ако $b < a$, тогаш $\text{NZD}(a,b) = \text{NZD}(b, a-b)$.

б) За секои $a, b \in \mathbb{N}$ важи $\text{NZD}(a,b) = \text{NZD}(a, a+b)$.

Доказ. а) Од забелешка I 2.7 имаме: ако $d|a$, тогаш $d|b$ ако и само ако $d|(a-b)$. Според тоа, секој заеднички делител на a и b е заеднички делител и на b и $a-b$ и, обратно, секој заеднички делител на b и $a-b$ е заеднички делител и на a и b , па затоа $\text{NZD}(a,b) = \text{NZD}(b, a-b)$.

б) Од тврдењето под а) имаме:

$$\text{NZD}(a, a+b) = \text{NZD}(a, a+b-a) = \text{NZD}(a,b). \blacksquare$$

1.6. Пример. а) Најди $\text{NZD}(484,396)$.

б) Најди го најголемиот природен број n за кој при делење на броевите 845 и 275 со n , и во двата случаи се добива остаток 5.

Решение. а) Од теорема 1.5 а) следува:

$$\begin{aligned} \text{NZD}(484,396) &= \text{NZD}(396, 484-396) = \text{NZD}(396,88) = \text{NZD}(88, 396-88) \\ &= \text{NZD}(88,308) = \text{NZD}(88,308-88) = \text{NZD}(88,220) \\ &= \text{NZD}(88,220-88) = \text{NZD}(88,132) = \text{NZD}(88,132-88) \\ &= \text{NZD}(88,44) = 44. \end{aligned}$$

Последното равенство следува од теорема 1.4 бидејќи $88 = 2 \cdot 44$.

б) Бараниот број е заеднички делител на $845 - 5 = 840$ и $275 - 5 = 270$. Според тоа, треба да најдеме $\text{NZD}(840, 270)$. Од теорема 1.5 а) имаме:

$$\begin{aligned}\text{NZD}(840, 270) &= \text{NZD}(270, 840 - 270) = \text{NZD}(270, 570) \\ &= \text{NZD}(270, 570 - 270) = \text{NZD}(270, 300) \\ &= \text{NZD}(270, 300 - 270) = \text{NZD}(270, 30)\end{aligned}$$

и бидејќи $30 \mid 270$ од последното равенство и од теорема 1.4 добиваме

$$\text{NZD}(840, 270) = \text{NZD}(270, 30) = 30.$$

Значи, најголемиот број со бараното својство е 30. Притоа

$$845 = 30 \cdot 28 + 5 \text{ и } 275 = 30 \cdot 9 + 5. \blacksquare$$

1.7. Во претходните разгледувања видовме дека

$$\text{NZD}(24, 56) = 8 \text{ и } \text{NZD}(840, 270) = 30.$$

Забележуваме дека и во двата случаја најголемиот заеднички делител е поголем од 1. Меѓутоа, делители на бројот 10 се 1, 2, 5 и 10, а делители на бројот 3 се 1 и 3, па затоа $\text{NZD}(10, 3) = 1$. Постојат бројни примери во кои најголемиот заеднички делител на два броја е 1 и ваквите парови природни броеви се од посебна важност во теоријата на броеви, па затоа и посебно ќе ги разгледаме.

1.8. Дефиниција. За природните броеви a и b ќе велиме дека се *заемно прости* ако $\text{NZD}(a, b) = 1$.

За броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ ќе велиме дека се *заемно прости во целина* ако $\text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

За броевите $a_1, \dots, a_n$ ќе велиме дека се *заемно прости по парови* ако $\text{NZD}(a_i, a_j) = 1$, за $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$, т.е. секои два броја се заемно прости.

Јасно, ако броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се заемно прости по парови, тогаш тие се заемно прости во целина. Меѓутоа, обратното не важи. Имено, за броевите 6, 15 и 35 имаме $\text{NZD}(6, 15, 35) = 1$, т.е. тие се заемно прости во целина, но не се заемно прости по парови бидејќи $\text{NZD}(6, 15) = 3$ и $\text{NZD}(15, 35) = 5$.

1.9. Пример. а) Докажи дека броевите 77 и 96 се заемно прости.

б) Докажи дека n , $n + 1$ и $2n + 1$ се заемно прости по парови.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}\text{NZD}(96, 77) &= \text{NZD}(77, 96 - 77) = \text{NZD}(77, 19) = \text{NZD}(19, 77 - 19) \\ &= \text{NZD}(19, 58) = \text{NZD}(19, 58 - 19) = \text{NZD}(19, 39) \\ &= \text{NZD}(19, 39 - 19) = \text{NZD}(19, 20) = \text{NZD}(19, 20 - 19) = 1,\end{aligned}$$

што значи дека броевите 77 и 96 се заемно прости.

б) Од теоремата 1.5 а) следува

$$\text{NZD}(n+1, n) = \text{NZD}(n, n+1-n) = \text{NZD}(n, 1) = 1,$$

што значи дека броевите n и $n+1$ се заемно прости. Сега, од теорема 1.5 б) имаме

$$1 = \text{NZD}(n+1, n) = \text{NZD}(n+1, n+1+n) = \text{NZD}(n+1, 2n+1),$$

т.е. $n+1$ и $2n+1$ се заемно прости. Конечно, од теорема 1.5 а) и од претходното равенство имаме:

$$\text{NZD}(2n+1, n) = \text{NZD}(2n+1, 2n+1-n) = \text{NZD}(2n+1, n+1) = 1,$$

т.е. n и $2n+1$ се заемно прости. ■

1.10. Теорема. Ако $\text{NZD}(a, b) = d$, $a = dx$ и $b = dy$, тогаш $\text{NZD}(x, y) = 1$.

Доказ. Да претпоставиме дека $\text{NZD}(x, y) = k > 1$. Тогаш постојат природни броеви x_1 и y_1 такви што $x = kx_1$ и $y = ky_1$. Од $a = dx$ и $b = dy$ добиваме $a = d(kx_1) = (kd)x_1$ и $b = d(ky_1) = (dk)y_1$. Според тоа $dk | a$ и $dk | b$. Значи, бројот dk е заеднички делител на a и b поголем од d , што не е можно бидејќи $\text{NZD}(a, b) = d$.

Конечно, од добиената противречност следува дека $k = 1$, т.е. дека $\text{NZD}(x, y) = 1$, што и требаше да се докаже. ■

1.11. Пример. Збирот на два природни броја е 252, а нивниот најголем заеднички делител е 36. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се a и b . Од условот на задачата следува

$$a + b = 252, \quad a = 36x \quad \text{и} \quad b = 36y,$$

при што $\text{NZD}(x, y) = 1$. Според тоа,

$$36x + 36y = 252, \quad \text{т.е.} \quad x + y = 7.$$

Во последното равенство ставаме $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и добиваме

$$(x, y) \in \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Конечно, со замена во равенствата $a = 36x$ и $b = 36y$ наоѓаме

$$(a, b) \in \{(36, 216), (72, 180), (108, 144), (144, 108), (180, 72), (216, 36)\} . \blacksquare$$

2. ЕВКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

2.1. Во следните неколку теореми ќе разработиме алгоритам за наоѓање на NZD. Притоа ќе ја користиме теоремата за делење со остаток, со чија помош ќе го докажеме таканаречениот *Евклидов алгоритам*.

2.2. Теорема. Ако $a = bq + r$, тогаш $\text{NZD}(a, b) = \text{NZD}(b, r)$.

Доказ. Ако $\text{NZD}(a, b) = d$, тогаш постојат x и y такви што $a = dx$ и $b = dy$. Значи, $dx = dyq + r$, па од теорема I 2.4 следува $d \mid r$ и бидејќи $d \mid b$ заклучуваме дека $d \mid \text{NZD}(b, r)$. Јасно, $d = \text{NZD}(b, r)$, бидејќи ако $d < \text{NZD}(b, r) = d_1$, тогаш според теорема I 2.4, од равенството $a = bq + r$ следува $d_1 \mid a$ и бидејќи $d_1 \mid b$, добиваме дека постои заеднички делител на a и b кој е поголем од d , што е противречност. ■

2.3. Ќе докажеме како со помош на теоремата за делење со остаток и претходната теорема може да се конструира таканаречениот Евклидов алгоритам за наоѓање на НЗД на два броја a и b . Имаме

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\ b = r_1q_2 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k & 0 \leq r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1} & 0 \leq r_{k+1} < r_k \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \quad (1)$$

Бидејќи остатоците r_i опаѓаат со секој следен чекор, т.е.

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_k > r_{k+1} > \dots$$

постапката дефинирана со равенствата (1) ќе заврши по конечен број чекори, т.е. после конечен број чекори ќе добиеме равенство од видот $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$, т.е. $r_{n+1} = 0$, при што $r_n \neq 0$. Од равенството $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ следува $r_n \mid r_{n-1}$. Претходно кажаното и теорема 2.2 ни овозможуваат да ја докажеме следнава теорема.

2.4. Теорема. Последниот остаток r_n различен од нула, добиен со низата равенства (1) е еднаков на најголемиот заеднички делител на броевите a и b .

Доказ. Ако ги земеме предвид равенствата (1), тогаш од теоремата 2.2 непосредно ја добиваме следнава низа равенства

$$\text{NZD}(a, b) = \text{NZD}(b, r_1) = \text{NZD}(r_1, r_2) = \text{NZD}(r_2, r_3) = \dots = \text{NZD}(r_{n-1}, r_n).$$

Но, $r_n \mid r_{n-1}$ што според теорема 1.4 значи дека

$$\text{NZD}(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Конечно, од последните две равенства наоѓаме

$$\text{NZD}(a, b) = \text{NZD}(r_{n-1}, r_n) = r_n. \blacksquare$$

2.5. Пример. Најди $\text{NZD}(426, 312)$.

Решение. Ќе го искористиме Евклидовиот алгоритам. Имаме

$$426 = 312 \cdot 1 + 114; \quad 312 = 114 \cdot 2 + 84; \quad 114 = 84 \cdot 1 + 30,$$

$$84 = 30 \cdot 2 + 24; \quad 30 = 24 \cdot 1 + 6 \quad \text{и} \quad 24 = 6 \cdot 4$$

што значи $\text{NZD}(426, 312) = 6$. ■

2.6. Теорема. Ако $d = \text{NZD}(a, b)$, тогаш постојат цели броеви x и y такви што

$$d = ax + by.$$

Доказ. Според теоремата 2.4, во системот равенства (1) на Евклидовиот алгоритам важи $d = r_n = \text{NZD}(a, b)$, каде што r_n е последниот остаток различен од нула. Равенствата (1) ги запишуваме во видот:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2} \\ r_{n-2} &= r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3} \\ &\dots\dots\dots \\ r_2 &= b - r_1 q_2 \\ r_1 &= a - b q_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Сега, ако во првото равенство на (2) од второто равенство замениме за r_{n-1} , потоа од третото равенство во (2) во новодобиеното равенство замениме за r_{n-2} , па во секое новодобиено равенство последователно замениме за $r_{n-3}, \dots, r_3, r_2$ и r_1 , добиваме равенство од вид $d = ax + by$. ■

2.7. Забелешка. Броевите x и y во претходната теорема се заемно прости, т.е. $\text{NZD}(x, y) = 1$.

Навистина, ако претпоставиме дека $\text{NZD}(x, y) = k > 1$, тогаш постојат $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ такви што $x = kx_1$ и $y = ky_1$. Слично, од $d = \text{NZD}(a, b)$ следува дека постојат $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ такви што $a = da_1$ и $b = db_1$. Ако замениме во равенството $d = ax + by$, добиваме

$$d = (da_1)(kx_1) + (db_1)(ky_1) = kd(a_1x_1 + b_1y_1),$$

т.е. $kd \mid d$, што не е можно бидејќи $kd > d$. Од добиената противречност следува дека $\text{NZD}(x, y) = 1$.

Понатаму, ако $d = \text{NZD}(a, b)$, тогаш броевите x и y во равенството $d = ax + by$ не се еднозначно определени. Така, на пример,

$$\text{NZD}(8, 12) = 4 \text{ и } 4 = 3 \cdot 12 - 4 \cdot 8 = 5 \cdot 12 - 7 \cdot 8.$$

2.8. Пример. Запиши го $\text{NZD}(426, 312) = 6$ во вид

$$6 = 426x + 312y.$$

Решение. Од пример 2.5 и од теорема 2.6 следува:

$$\begin{aligned} 6 &= 30 - 24 = 30 - (84 - 2 \cdot 30) = 3 \cdot 30 - 84 = 3(114 - 84) - 84 \\ &= 3 \cdot 114 - 4 \cdot 84 = 3 \cdot 114 - 4(312 - 2 \cdot 114) = 11 \cdot 114 - 4 \cdot 312 \\ &= 11(426 - 312) - 4 \cdot 312 = 11 \cdot 426 - 15 \cdot 312, \end{aligned}$$

т.е. $\text{NZD}(426, 312) = 426 \cdot 11 - 312 \cdot 15$. ■

2.9. Пример. Докажи дека целите броеви m и n се заемно прости ако и само ако постојат цели броеви x и y такви што

$$mx + ny = 1. \quad (3)$$

Решение. Нека m и n се заемно прости т.е. $\text{NZD}(m, n) = 1$. Тогаш, од теорема 2.6 следува дека постојат цели броеви x и y такви што $mx + ny = 1$, т.е. важи (3).

Да претпоставиме дека за броевите m и n постојат цели броеви x и y такви што важи равенството (3). Ако $d \mid m$ и $d \mid n$, тогаш $d \mid (mx + ny)$, за секои цели броеви a и b . Земаме $a = x$ и $b = y$ и добиваме дека $d \mid (mx + ny)$, т.е. $d \mid 1$, а тоа е можно само ако $d = 1$, што значи дека m и n се заемно прости. ■

2.10. Теорема. а) Ако $c \mid a$ и $c \mid b$, тогаш $c \mid \text{NZD}(a, b)$.

б) Ако $d \mid a, d \mid b$ и $d = ax + by$, за некои цели броеви x и y , тогаш $d = \text{NZD}(a, b)$.

Доказ. а) Од теорема 2.6 следува дека постојат цели броеви x и y такви, што $\text{NZD}(a, b) = ax + by$. Понатаму, од $c \mid a$ имаме $a = cm$ за некој цел број m , а од $c \mid b$ следува $b = cn$ за некој цел број n . Заменуваме во равенството $\text{NZD}(a, b) = ax + by$ и добиваме

$$\text{NZD}(a, b) = ax + by = (cm)x + (cn)y = c(mx + ny),$$

што значи $c \mid \text{NZD}(a, b)$.

б) Да претпоставиме дека $d \mid a, d \mid b$ и $d = ax + by$, за некои цели броеви x и y . Од тврдењето под а) следува дека $d \mid \text{NZD}(a, b)$. Понатаму, постојат $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ такви што $a = a_1 \cdot \text{NZD}(a, b)$ и $b = b_1 \cdot \text{NZD}(a, b)$. Ако замениме во $d = ax + by$, добиваме

$$d = [a_1 \cdot \text{NZD}(a, b)]x + [b_1 \cdot \text{NZD}(a, b)]y = \text{NZD}(a, b) \cdot (a_1x + b_1y)$$

што значи $\text{NZD}(a, b) \mid d$.

Конечно, од $d \mid \text{NZD}(a, b)$ и $\text{NZD}(a, b) \mid d$ следува $d = \text{NZD}(a, b)$. ■

2.11. Теорема. Ако $k > 0$, тогаш $\text{NZD}(ka, kb) = k \cdot \text{NZD}(a, b)$.

Доказ. Нека $d = \text{NZD}(a, b)$. Според тоа, $d \mid a$ и $d \mid b$ и постојат x и y такви што $d = ax + by$. Но, тоа значи дека $kd \mid ka$, $kd \mid kb$ и постојат x и y такви што

$$kd = k(ax + by) = (ka)x + (kb)y.$$

Сега, од теорема 2.10 б) следува дека

$$\text{NZD}(ka, kb) = kd = k \cdot \text{NZD}(a, b). \quad \blacksquare$$

2.12. Пример. Најди $\text{NZD}(765, 1080)$.

Решение. Дадените броеви завршуваат на 5 и 0, па од признакот за деливост со 5 следува дека $5 \mid 765$ и $5 \mid 1080$. Имаме, $765 = 5 \cdot 153$ и $1080 = 5 \cdot 216$, па затоа

$$\text{NZD}(765, 1080) = 5 \cdot \text{NZD}(153, 216).$$

Збирот на цифрите на броевите 153 и 216 е еднаков на 9, па од признакот за деливост со 9 следува дека и двата броја се деливи со 9. Имаме, $153 = 9 \cdot 17$ и $216 = 9 \cdot 24$, па затоа

$$\begin{aligned} \text{NZD}(765, 1080) &= 5 \cdot \text{NZD}(153, 216) = 5 \cdot 9 \cdot \text{NZD}(17, 24) = 45 \cdot \text{NZD}(17, 7) \\ &= 45 \cdot \text{NZD}(7, 10) = 45 \cdot \text{NZD}(7, 3) = 45 \cdot \text{NZD}(3, 4) = 45. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.13. Теорема. а) Ако $q \mid ab$ и $\text{NZD}(q, b) = 1$, тогаш $q \mid a$.

б) Ако $q \mid a$, $p \mid a$ и $\text{NZD}(q, p) = 1$, тогаш $qp \mid a$.

Доказ. а) Според теорема 2.6, од $\text{NZD}(q, b) = 1$ следува дека постојат цели броеви m и n такви што $1 = bm + qn$. Ако последното равенство го помножиме со a , добиваме дека постојат цели броеви m и n такви што

$$a = abm + qan. \quad (4)$$

Од условот на теоремата имаме дека $q \mid ab$, т.е. постои природен број k таков што $ab = qk$. Со замена во равенството (4), добиваме

$$a = (qk)m + qan = q(km + an).$$

Конечно, од последното равенство следува дека $q \mid a$.

б) Од $q \mid a$ и $p \mid a$ следува дека $a = qm$ и $a = pn$ за некои $m, n \in \mathbf{N}$. Според тоа, $qm = pn$ па затоа $q \mid pn$. Но, $\text{NZD}(q, p) = 1$ и бидејќи $q \mid pn$, од тврдењето под а) следува $q \mid n$, што значи дека постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $n = qk$. Конечно, $a = pn = p(qk) = (pq)k$, од што следува дека $pq \mid a$. ■

2.14. Пример. Најди ги сите природни броеви n за кои бројот $10^n + 8$ е делив со 72!

Решение. Бидејќи збирот на цифрите на бројот $10^n + 8 = 10 \dots 08$ е еднаков на 9, заклучуваме дека $9 \mid (10^n + 8)$ за секој природен број n . Понатаму, од признакот за деливост со 8, имаме дека $8 \mid (10^n + 8)$ ако и само ако $8 \mid (4a_2 + 2a_1 + a_0)$. За $n = 1$ и $n = 2$ имаме $10^n + 8 = 18$ и $10^n + 8 = 108$ и овие броеви не се деливи со 8. Ако $n \geq 3$, тогаш $a_2 = a_1 = 0$ и $a_0 = 8$, па затоа $8 \mid (4a_2 + 2a_1 + a_0)$. Според тоа, за $n \geq 3$ имаме $8 \mid (10^n + 8)$.

Конечно, од претходно изнесеното и од фактот дека $\text{NZD}(8, 9) = 1$, со примена на теорема 2.13 б) добиваме дека $72 \mid (10^n + 8)$ за $n \geq 3$. ■

2.15. Пример. Докажи дека од $7 \mid \overline{abb}$ следува $7 \mid (a + 2b)$.

Решение. Имаме

$$\overline{abb} = 100a + 10b + b = 98a + 7b + 2a + 4b = 7(14a + b) + 2(a + b + b).$$

Понатаму, левата страна на последното равенство е делива со 7 и првиот собирик на десната страна е делив со 7, па затоа и вториот собирик е делив

со 7, т.е. $7 \mid 2(a+2b)$. Но, $\text{NZD}(7,2)=1$, па од теоремата 2.13 а) следува дека $7 \mid (a+2b)$, што и требаше да се докаже. ■

3. НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

3.1. При воведувањето на поимот за деливост рековме дека ако $a \mid b$, тогаш за бројот b велиме дека е содржател на бројот a . Јасно, ако b е содржател на a , тогаш и броевите $2b, 3b, 4b, \dots$ се содржатели на бројот a . Така, на пример:

- содржатели на бројот 9 се:

9, 18, 27, **36**, 45, 54, 63, **72**, 81, 90, 99, **108**, 117, 126, ...

- содржатели на бројот 12 се:

12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, 120, 132, 144, ...

Како што можеме да забележиме, броевите 36, 72, 108 ... се заеднички содржатели на броевите 9 и 12. Претходно изнесеното е причина за следната дефиниција.

3.2. Дефиниција. Нека $a, b \in \mathbf{N}$. За бројот $c \in \mathbf{N}$ ќе велиме дека е *заеднички содржател* на a и b ако $a \mid c$ и $b \mid c$.

3.3. Од дефиниција 3.2 непосредно следува дека за секои $a, b \in \mathbf{N}$, броевите од видот $kab, k \in \mathbf{N}$ се заеднички содржатели на a и b . Според тоа, за секои a и b множеството од нивни заеднички содржатели е бесконачно, па затоа истото нема најголем елемент. Природно е да се запрашаме дали меѓу заедничките содржатели на a и b постои најмал содржател. Одговорот на ова прашање е потврден. Навистина, бројот $c_1 = ab$ е заеднички содржател на a и b . Ако тој не е најмал, тогаш постои природен број c_2 таков што $c_2 < c_1$ и $a \mid c_2$ и $b \mid c_2$. Ако c_2 не е најмал меѓу заедничките содржатели на a и b , тогаш постои заеднички содржател c_3 на a и b таков што $c_3 < c_2$. Бидејќи природните броеви $c_1, c_2, c_3, \dots$ се намалуваат, по конечен број чекори ќе најдеме најмал природен број c за кој важи $a \mid c$ и $b \mid c$. Јасно, ова е *најмалиот заеднички содржател* на a и b и него ќе го означуваме со $c = \text{NZS}(a, b)$. Да забележиме дека во литература-

та за најмалиот заеднички содржател на броевите a и b се користи и ознаката $[a, b]$.

Како што видовме, за да го определиме најмалиот заеднички содржател на два броја a и b доволно е последователно да ги испишеме содржателите на едниот и другиот број и потоа меѓу нив да го најдеме најмалиот заеднички содржател, кој сигурно е помал или еднаков на ab . Но оваа постапка може да биде долга, па затоа ќе докажеме неколку својства за најмалиот заеднички содржател.

3.4. Теорема. Ако $\text{NZS}(a, b) = s$ и S е произволен заеднички содржател на a и b , тогаш $s \mid S$, што значи дека сите заеднички содржатели на броевите a и b се од обликот $S = sk, k \in \mathbf{N}$.

Доказ. Од теоремата за делење со остаток следува дека постојат q и r такви што $S = sq + r, 0 \leq r < s$. Ако $r \neq 0$, тогаш од $a \mid S, a \mid s$ и од претходното равенство следува дека $a \mid r$. Слично $b \mid r$, што значи дека најдовме заеднички содржател на a и b кој е помал од s . Последното му противречи на фактот дека $\text{NZS}(a, b) = s$. Од добиената противречност следува $r = 0$, т.е. $S = sq$. ■

3.5. Теорема. Ако $\text{NZD}(a, b) = 1$, тогаш $\text{NZS}(a, b) = ab$.

Доказ. Нека $\text{NZS}(a, b) = s \leq ab$. Тогаш, $s = am$, за некој $m \in \mathbf{N}$. Според тоа, $b \mid am$ и бидејќи $\text{NZD}(a, b) = 1$, од теорема 2.13 а) следува дека $b \mid m$, т.е. $m = bn$, за некој $n \in \mathbf{N}$. Од досега изнесеното имаме $s = am = a(bn) = (ab)n$ и бидејќи $s \leq ab$, од последното равенство следува $n = 1$, што значи дека $s = ab$, т.е. $\text{NZS}(a, b) = ab$. ■

3.6. Пример. Определи:

а) $\text{NZS}(20, 31)$ и б) $\text{NZS}(n, 2n + 1), n \in \mathbf{N}$.

Решение. а) Најпрво бараме $\text{NZD}(20, 31)$. Имаме

$$\begin{aligned}\text{NZD}(20, 31) &= \text{NZD}(20, 31 - 20) = \text{NZD}(20, 11) \\ &= \text{NZD}(11, 9) = \text{NZD}(9, 2) = 1,\end{aligned}$$

па затоа од теорема 3.5 следува дека $\text{NZS}(20, 31) = 20 \cdot 31 = 620$.

б) Бидејќи $\text{NZD}(n, 2n + 1) = 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$, од теоремата 3.5 заклучуваме дека $\text{NZS}(n, 2n + 1) = n(2n + 1)$. ■

3.7. Теорема. а) $\text{NZS}(na, nb) = n \cdot \text{NZS}(a, b)$, за секои $n, a, b \in \mathbf{N}$.

б) $\text{NZS}(a, b) \cdot \text{NZD}(a, b) = ab$, за секои $a, b \in \mathbf{N}$.

Доказ. а) Нека $\text{NZS}(a, b) = x$. Значи, $a | x$ и $b | x$, па затоа $na | nx$ и $nb | nx$, т.е. nx е заеднички содржател на na и nb . Од теорема 3.4 следува дека $\text{NZS}(na, nb) | nx = n \cdot \text{NZS}(a, b)$.

Нека $\text{NZS}(na, nb) = s$. Тоа значи дека $na | s$, т.е. постои $q \in \mathbf{N}$ таков што $s = (na)q = n(aq)$, односно $s = ny$, $y = aq$. Јасно, $a | y$. Понатаму, $nb | s$, па затоа постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $ny = s = (nb)k = n(bk)$, односно $y = bk$. Последното значи $b | y$, што заедно со $a | y$ повлекува дека y е заеднички содржател на a и b . Сега од теорема 3.4 следува дека $\text{NZS}(a, b) = x | y$, односно $n \cdot \text{NZS}(a, b) = nx | ny = s = \text{NZS}(na, nb)$.

Конечно, $\text{NZS}(na, nb) | n \cdot \text{NZS}(a, b)$ и $n \cdot \text{NZS}(a, b) | \text{NZS}(na, nb)$ па затоа $\text{NZS}(na, nb) = n \cdot \text{NZS}(a, b)$.

б) Нека $\text{NZD}(a, b) = d$ и m и n се такви што $a = md, b = nd$ и $\text{NZD}(m, n) = 1$. Од теорема 3.5 и од тврдењето под а) добиваме:

$$\begin{aligned} ab &= (md)(nd) = d \cdot d(mn) = \text{NZD}(a, b) \cdot [d \cdot \text{NZS}(m, n)] \\ &= \text{NZD}(a, b) \cdot \text{NZS}(md, nd) = \text{NZD}(a, b) \cdot \text{NZS}(a, b). \blacksquare \end{aligned}$$

3.8. Пример. Најди $\text{NZS}(1155, 1232)$.

Решение. Имаме,

$$\text{NZD}(1155, 1232) = \text{NZD}(1155, 1232 - 1155) = \text{NZD}(1155, 77)$$

и бидејќи $1155 = 15 \cdot 77$, добиваме дека

$$\text{NZD}(1155, 1232) = \text{NZD}(1155, 77) = 77.$$

Сега од теорема 3.7 б) следува

$$1155 \cdot 1232 = \text{NZD}(1155, 1232) \cdot \text{NZS}(1155, 1232) = 77 \cdot \text{NZS}(1155, 1232),$$

т.е. $\text{NZS}(1155, 1232) = 1155 \cdot 1232 : 77 = 18480$. ■

3.9. Пример. Стојан има повеќе од 3000 денари, а помалку од 4000 денари. Ако дневно троши или само по 150 денари или само по 180 денари, по неколку дена му остануваат 30 денари. Колку денари има Стојан?

Решение. Стојан нека има x денари. Ако троши по 150 денари дневно по неколку дена му остануваат 30 денари, па затоа $150 | (x - 30)$. Слично $180 | (x - 30)$, што значи дека $x - 30$ е заеднички содржател на 150 и 180. Но,

$$\text{NZD}(150,180) = 30,$$

па ако ја искористиме теорема 3.7 б) добиваме дека

$$150 \cdot 180 = \text{NZD}(150,180) \cdot \text{NZS}(150,180) = 30 \cdot \text{NZS}(150,180)$$

што значи $\text{NZS}(150,180) = 900$. Но, $x - 30$ е заеднички содржател на 150 и 180, па затоа од теорема 3.4 следува дека $900 \mid (x - 30)$, односно

$$x - 30 = 900k, k \in \mathbf{N}.$$

Понатаму, од условот на задачата имаме $3000 < x < 4000$, што значи

$$3000 < 900k + 30 < 4000,$$

од каде наоѓаме $k = 4$. Конечно, Стојан имал $900 \cdot 4 + 30 = 3630$ денари. ■

3.10. Пример. Најди ги сите природни броеви x и y , за кои

$$\text{NZD}(x, y) = 6 \text{ и } \text{NZS}(x, y) = 36.$$

Решение. Од $\text{NZD}(x, y) = 6$ имаме $x = 6m$, $y = 6n$ и $\text{NZD}(n, m) = 1$.

Понатаму, од теоремите 3.5 и 3.7 а) имаме

$$36 = \text{NZS}(x, y) = \text{NZS}(6m, 6n) = 6 \cdot \text{NZS}(m, n) = 6mn \text{ т.е. } mn = 6.$$

Бидејќи $\text{NZD}(n, m) = 1$, од последната равенка наоѓаме

$$(m, n) \in \{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\},$$

па затоа $(x, y) \in \{(6, 36), (36, 6), (12, 18), (18, 12)\}$. ■

3.11. Во претходните разгледувања се задржавме на најмалиот заеднички содржател на два природни броја a и b . Аналогно се дефинира и најмалиот заеднички содржател на конечно многу природни броеви $a_1, a_2, \dots, a_k$. Притоа, тој може да се определи на следниов начин:

- најпрво определуваме $\text{NZS}(a_1, a_2) = s_1$,

- потоа определуваме $\text{NZS}(s_1, a_3) = s_2$ итн.

Последниот елемент s_{k-1} во низата $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ е *најмалиот заеднички содржател* на броевите $a_1, a_2, \dots, a_k$.

3.12. Пример. Најди го најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3, поделен со 5 дава остаток 4 и поделен со 6 дава остаток 5.

Решение. Ако на бараниот број му додадеме 1, тогаш новодобиениот број се дели со 2, 3, 4, 5 и 6. Бидејќи се бара најмалиот можен број со даденото својство, добиваме дека новиот број е $\text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$. Според тоа, бараниот број е $60 - 1 = 59$. ■

4. ЗАДАЧИ

1. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите 11111111 и $\underbrace{111 \dots 11}_{100}$.
2. Најди го најголемиот четирицифрен број кој при делење со 3,4,5,6 и 7 дава остаток 2.
3. Марија има сума пари кои може да ги подели на делови, така што секој дел да има или 18, или 24, или 30 денари и притоа секогаш да и останане еден денар. Која е најмалата можна сума со која располага Марија?
4. На бројот 1972 допиши му од десно четири цифри така да добиениот број биде делив со 7, 5 и 72.
5. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 7 даваат остаток 2, при делење со 9 даваат остаток 5 а при делење со 12 даваат остаток 7.
6. Производот на два природни броја 34560, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Определи ги сите парови природни броеви кои го задоволуваат тоа својство.
7. За кои природни броеви m и n важи $\text{NZD}(m,n)=8$ и $\text{NZS}(m,n)=168$?
8. Во множеството природни броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} x+y=150 \\ \text{NZD}(x,y)=30. \end{cases}$$
9. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека $\text{NZD}(a,b)=\text{NZD}(5a+3b,13a+8b)$.
10. Нека a и b се два последователни природни броја и нека n е произволен природен број. Докажи дека $\text{NZD}(an+b,bn+a)$ е непарен број.
11. Докажи дека меѓу пет последователни цели броеви секогаш може да се избере еден, заемно прост со сите останати.
12. Докажи, ако $\text{NZD}(x,z)=1$ и $\text{NZD}(y,z)=1$, тогаш $\text{NZD}(xy,z)=1$.
13. Нека x,y и z се природни броеви такви што $\text{NZD}(x,y,z)=1$ и $z=\frac{xy}{x-y}$. Докажи дека $x-y$ е квадрат на природен број.

14. Најди ги сите едноцифрени броеви a, b и c , такви што $\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}$.
15. Нека е даден полиномот $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$. Докажи дека најголемиот заеднички делител на броевите $P(1), P(2), P(3), \dots$ е делив со 6.
16. За најголемиот заеднички делител d и најмалиот заеднички содржател v на природните броеви m и n е исполнето равенството $3m + n = 3v + d$. Докажи дека m е делител на n .
17. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати за ниту еден природен број n .
18. Болва се наоѓа на координатната рамнина. Од точката (m, n) болвата може да скокне во една од точките (n, m) , $(m - n, n)$ или $(m + n, n)$. Дали болвата може да дојде во точката $(12, 32)$, ако на почетокот се наоѓала во точката
 - а) $(7, 12)$,
 - б) $(8, 12)$?
19. На бројот 264 од десно допиши му три цифри така што добиениот шестцифрен број биде делив со 5, со 7 и со 9.
20. Кој најголем трицифрен број треба да се собере со бројот 184952 за да добиениот збир биде делив со 2, 3 и 7?
21. Нека $n = \underbrace{444 \dots 444}_{1 \text{ Четворки}}$. Докажи дека бројот $n^2 - n - 2$ се дели со 270.
22. Ако од два последователни природни броја поголемиот е полн квадрат, тогаш нивниот производ се дели со 12. Докажи!
23. Најди го најголемиот трицифрен број кој при делење со 5 и со 6 дава остаток 2, а при делење со 11 дава остаток 8.
24. Најди ги сите седумцифрени природни броеви кои започнуваат со 7002, а се деливи со 5, 7 и 11.
25. За природните броеви a и b важи $19a = 97b$. Докажи дека $a + b$ се дели со 116.
26. Киро заборавил да напише знак за множење помеѓу два трицифрени броја и така добил шестцифрен број, кој е седум пати поголем од производот на двата броја. Кои броеви сакал да ги помножи Киро?
27. Нека a е произволен природен број. Со b да го означиме бројот кој од бројот a го добиваме со испуштање на цифрата на единиците и на така

добиеениот број му ја додаваме четирикратната вредност на цифрата на единиците на a . На пример, ако $a = 328$, тогаш $b = 23 + 4 \cdot 8 = 55$. Докажи дека 13 е делител на a ако и само ако 13 е делител на b .

28. Најди ги сите парови заемно прости броеви (x, y) такви да бројот $x^2(x + y)$ е делив со бројот $y^2(x - y)^2$.
29. Најди го најмалиот природен број кој има својство да се намали 57 пати ако му ја избришеме првата цифра од лево.
30. Претстави го $\text{NZD}(252, 180)$ во облик $252x + 180y$, каде x и y се цели броеви.
31. Ако $\text{NZD}(a, b) = 1$, тогаш $\text{NZD}(a + b, a - b) = 1$ или 2. Докажи!
32. Нека m и n се заемно прости броеви. Познато е дека дробката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број. Кој е тој број?
33. Докажи дека од $\text{NZD}(a, b) = 1$ следува $\text{NZD}(ac, b) = \text{NZD}(c, b)$
34. Ако $a, m \in \mathbb{N}$, $a > 1$, тогаш $\text{NZD}(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1) = \text{NZD}(a-1, m)$. Докажи!
35. Определи $\text{NZD}(2n+3, n+7)$, каде n е природен број.
36. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{5n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
37. Кој број помал од 100 при делење со 4 и при делење со 26 дава остаток 1?
38. На бројот 1998 допиши му три цифри така што добиениот седумцифрен број е делив со 7, 8 и 9.
39. Дали постои природен број n , таков што бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?
40. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека $5|x$, $5|y$ или $5|z$.
41. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека $3|x$ или $3|y$.
42. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека $4|x$ или $4|y$.

III ГЛАВА

ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. ПОИМ ЗА ПРОСТ И СЛОЖЕН БРОЈ

1.1. Да се потсетиме дека секој природен број има барем еден делител. Поточно, бројот 1 има само еден делител, а секој друг природен број има два или повеќе делители. Така на пример, броевите 2, 3, 7 и 13 имаат точно два природни делители, а броевите 4, 6, 10, 15 и 20 имаат повеќе од два природни делители. Претходните размислувања укажуваат на можноста во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да извршиме поделба на дисјунктни подмножества според бројот на делителите и да ги проучуваме овие подмножества. Во таа смисла ја имаме следнава дефиниција.

1.2. Дефиниција. За природниот број p ќе велиме дека е *прост* ако p има точно два природни делители, т.е. единствени делители на p се 1 и p . Природниот број m кој има повеќе од два природни делители го нарекуваме *сложен број*.

1.3. Пример. Дадени се четири различни едноцифрени броеви a, b, c и d . При соодветно подредување се добива еден најголем и еден најмал четирицифрен број. Докажи дека разликата на вака добиените четирицифрени броеви не е прост број.

Решение. Нека претпоставиме дека $a < b < c < d$. Тогаш најголемиот четирицифрен број е $\overline{dcba}$, а најмалиот е $\overline{abcd}$. Ниваната разлика е

$$\begin{aligned}\overline{dcba} - \overline{abcd} &= 1000d + 100c + 10b + a - 1000a - 100b - 10c - 9 \\ &= 9(111d + 10c - 10b - 111a).\end{aligned}$$

Бидејќи изразот во заградата е поголем од 1 (зошто?), добиваме дека $9 | (\overline{dcba} - \overline{abcd})$, што значи дека бројот $\overline{dcba} - \overline{abcd}$ има најмалку три природни делители. Конечно, од дефиниција 1.2 следува дека бројот $\overline{dcba} - \overline{abcd}$ е сложен. ■

1.4. Пример. Докажи дека бројот $2^{10} + 5^{12}$ е сложен.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 2^{10} + 5^{12} &= (2^5 + 5^6)^2 - 2 \cdot 2^5 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - 10^6 \\ &= (2^5 + 5^6)^2 - (10^3)^2 = (2^5 + 5^6 - 10^3)(2^5 + 5^6 + 10^3). \end{aligned}$$

Бидејќи двата броја во заградата се поголеми од 1 заклучуваме дека дадениот број е сложен. ■

1.5. Коментар. Според бројот на делителите, разликуваме три вида на природни броеви: броеви со еден делител (тоа е бројот 1), броеви со два делители (прости броеви) и броеви со повеќе од два делители (сложени броеви).

Во врска со простите и сложените броеви од посебен интерес се прашањата:

- Колку прости, а колку сложени броеви постојат?
- Како да ги одредиме сите прости броеви помали од даден број?

Што се однесува до сложените броеви, одговорот на прашањето: “Колку сложени броеви има?” е познат. Имено, постојат бесконечно многу сложени броеви, за што доволно е да ги разгледаме броевите од видот $6k$, $k \geq 1$. Навистина, сите овие броеви се деливи со 1, 2, 3 и 6, што значи дека тие се сложени, а нив ги има бесконечно многу. Малку потешко е да се одговори на прашањето колку прости броеви има. На ова прашање ќе се навратиме подоцна, а сега ќе докажеме две тврдења со чија помош можеме да ги распознаваме простите и сложените броеви.

1.6. Теорема. Секој природен број n , поголем од 1, е делив барем со еден прост број.

Доказ. Ако природниот број n е прост, тогаш тврдењето е докажано. Имено, тој е делив со самиот себе, што значи барем со еден прост број.

Да претпоставиме дека n е произволен сложен број. Тогаш, тој мора да има барем еден делител различен од 1 и n , бидејќи во спротивно ќе биде прост број. Нека најмалиот од сите делители на n , различни од 1 и n , го означиме со p . Ќе докажеме дека p е прост број. Навистина, ако p е сложен број, тогаш тој има делител q , $1 < q < p$. Но, тогаш бројот q е делител на n , помал од p , што му противречи на изборот на p . Од добиената противречност следува дека p е прост број. Конечно, сложениот број n е делив со простиот број p , што значи барем со еден прост број. ■

2. ЕРАТОСТЕНОВО СИТО

2.1. Според дефиниција 1.2 прости броеви се, на пример: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и 37. Да забележиме дека единствен парен прост број е бројот 2. Имено, секој парен број поголем од 2 има најмалку три делители, и тоа 1, 2 и самиот број, значи е сложен број.

Според теорема 1.6, за да утврдиме дали еден природен број, поголем од 1, е прост или сложен, доволно е да провериме дали тој е делив со последователните прости броеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, Природно е да се запрашаме дали треба да делиме со сите прости броеви кои се помали од разгледуваниот број. Одговорот на ова прашање го дава следнава теорема.

2.2. Теорема. Ако природниот број p , $p > 1$ не се дели со простите броеви чии квадрати се помали од p , тогаш p е прост број.

Доказ. Нека p е сложен број. Постои природен број $a \neq p$ и 1 таков што $a | p$. Значи, $p = ab$ каде a и b се природни броеви помали од p . Нека $a \leq b$. Тогаш, $a^2 \leq ab = p$.

Можни се два случаи: a е прост број или a не е прост број.

Ако a е прост број, тогаш p се дели со прост број чиј квадрат е помал од p и во овој случај тврдењето е докажано.

Ако a не е прост број, тогаш постои прост број $q < a$ таков што $q | a$, па затоа $q | p$. Притоа $q^2 < a^2 \leq p$. Според тоа, p се дели со прост број чиј квадрат е помал од p , па и во овој случај тврдењето е докажано. ■

2.3. Пример. Испитај го видот на бројот:

а) 323 и

б) 503.

Решение. а) Очигледно, според признаците за деливост, бројот 323 не е делив ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5. Со непосредно делење се убедуваме дека бројот 323 не е делив ниту со 7, ниту со 11, ниту со 13, но е делив со 17, бидејќи $323 = 17 \cdot 19$. Според тоа, бројот 323 е сложен и неговите делители се 1, 17, 19 и 323.

б) Лесно заклучуваме дека бројот 503 не е делив ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5, а со непосредно делење заклучуваме дека не е делив ниту со 7, 11, 13, 17 и 19. Следниот прост број е 23, но бидејќи $23^2 = 529 > 503$, од теоремата 2.2 следува дека бројот 503 е прост број. ■

2.4. Коментар. Од решените примери воочуваме дека постапката за одредување на видот на еден природен број бара до толку поголем труд, до колку е бројот поголем. Затоа се изготвуваат таблица на прости броеви. Едноставна постапка за изготвување на таблиците на прости броеви предложил Ератостен (III век пред н.е.) и според него оваа постапка е наречена *Ератостеново сито*. Таа се состои во следното.

Ги испишуваме сите природни броеви помали или еднакви на бројот N . Најпрво ја прецртуваме единицата. Бидејќи првиот прост број е 2, ги прецртуваме сите природни броеви деливи со 2 и поголеми од 2 (тие се сложени). Следниот непрецртан број, кој е прост е бројот 3 и ги прецртуваме сите природни броеви деливи со 3 и поголеми од 3. Следниот непрецртан број е 5. Тој е прост, бидејќи ако не е ќе биде прецртан. Повторувајќи ја постапката јасно е дека можат да се определат сите прости броеви помали од даден природен број N . Според теоремата 2.2 доволно е проверката да ја направиме со прецртување на содржателите на простите броеви кои се помали или еднакви на $\sqrt{N}$.

2.5. Пример. Да се најдат простите броеви кои се помали или еднакви на 66.

Решение. Имаме

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ~~9~~, 10, 11, 12, 13, 14, ~~15~~, 16, 17, 18, 19, 20, ~~21~~, 22, 23, 24, ~~25~~, 26,
~~27~~, 28, 29, 30, 31, 32, ~~33~~, 34, 35, 36, 37, 38, ~~39~~, 40, 41, 42, 43, 44, ~~45~~, 46, 47,
48, ~~49~~, 50, ~~51~~, 52, 53, 54, 55, 56, ~~57~~, 58, 59, 60, 61, 62, ~~63~~, 64, 65, 66.

Значи, прости броеви помали од 66 се:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 и 61. ■

2.6. Забелешка. Како што гледаме, простите броеви се многу неправилно распоредени, а единствен парен прост број е бројот 2. Меѓутоа, сепак во оваа неправилност на распоредот на простите броеви постојат некои класи на броеви кои ги содржат сите прости броеви поголеми од даден број, што може да се види од следниот пример.

2.7. Пример. Докажи дека секој прост број поголем од 3 е од видот $6k + 1$ или $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Од теоремата за делење со остаток следува дека секој природен број може да се запише во еден од следниве облици:

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Јасно, $6 \mid 6k$, $2 \mid (6k+2)$, $3 \mid (6k+3)$ и $2 \mid (6k+4)$, па затоа овие броеви се сложени. Според тоа, ако p , $p > 3$ е прост број, тогаш или $p = 6k+1$ или $p = 6k-1$, $k \in \mathbb{N}$.

Да забележиме, дека обратното тврдење не важи. Навистина, $25 = 6 \cdot 4 + 1$ и $35 = 6 \cdot 6 - 1$ се сложени броеви од видовите $6k+1$ и $6k-1$, соодветно. ■

2.8. Пример. Нека p е прост број поголем од 3, таков што и $2p+1$ е прост број. Дали бројот $4p+1$ е прост?

Решение. Според пример 2.7 или $p = 6k+1$ или $p = 6k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Ако $p = 6k+1$, тогаш

$$2p+1 = 2(6k+1)+1 = 3(4k+1),$$

што противречи на фактот дека $2p+1$ е прост број. Значи, $p = 6k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Но, тогаш

$$4p+1 = 4(6k-1)+1 = 3(8k-1),$$

што според дефиниција 1.2 значи дека бројот $4p+1$ не е прост. ■

3. БЕСКОНЕЧНОСТ НА МНОЖЕСТВОТО ПРОСТИ БРОЕВИ

3.1. Во коментар 1.5 видовме дека множеството сложени броеви е бесконечно, што може да се заклучи и од фактот дека множеството $A = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 2k, \dots\}$, во кое сите броеви се сложени е бесконечно.

Меѓутоа, одговорот на прашањето колку прости броеви има не е така едноставен. На ова прашање, во своето дело *Елементи*, дал одговор Евклид, III век пне. Имено, Евклид ја докажал следнава теорема.

3.2. Теорема (Евклид). Постојат бесконечно многу прости броеви.

Доказ. Да претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви и да ги нумерираме по растечки редослед

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n = p. \quad (1)$$

Да го разгледаме бројот $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$. Имаме, $N = p_i N_i + 1$, за $i = 1, 2, \dots, n$ од што следува дека ниту еден од простите броеви во (1) не е дели-

тел на бројот N . Значи, или бројот N е прост број или има прост делител кој не е меѓу броевите во (1). И во двата случаи заклучуваме дека постои прост број кој е поголем од најголемиот претпоставен прост број p , од што следува дека постојат бесконечно многу прости броеви. ■

3.3. Пример. Ако p е прост број, $p > 3$, тогаш $24 \mid (p^2 - 1)$. Докажи!

Решение. Ако $p > 3$ и p е прост број, тогаш според пример 2.7 важи $p = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$ и ако го искористиме тврдењето $k(k \pm 1) = 2m$, добиваме:

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 24k^2 + 12k^2 \pm 12k \\ &= 24k^2 + 12k(k \pm 1) = 24k^2 + 12 \cdot 2m = 24(k^2 + m), \end{aligned}$$

што значи $24 \mid (p^2 - 1)$. ♦

3.4. Коментар. Во теорема 3.2 докажавме дека множеството прости борови е бесконечно, какво што е и множеството сложени борови. Сепак, иако овие две множества имаат ист број на елементи, факт чиј доказ излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, сепак може да се каже дека простите борови се некако “премалку” во однос на сложените борови. Имено, ќе ја докажеме следнава теорема.

3.5. Теорема. За произволен природен број k постојат k последователни сложени броеви.

Доказ. Да ги разгледаме броевите

[illegible]

Јасно, ова се k последователни природни броеви поголеми од $k+1$ и сите се сложени, бидејќи

$$2 \mid a_1, 3 \mid a_2, 4 \mid a_3, \dots, k \mid a_{k-1}, (k+1) \mid a_k. \blacksquare$$

3.6. Пример. Определете 5 последователни сложени броеви.

Решение. Според теорема 3.5 броевите

$$a_1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2 = 722 = 2 \cdot 361$$

$$a_2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 = 723 = 3 \cdot 241$$

$$a_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 = 724 = 4 \cdot 181$$

$$a_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 = 725 = 5 \cdot 145$$

$$a_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 = 726 = 6 \cdot 121$$

се сложени. ■

4. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АРИТМЕТИКАТА

4.1. Честопати одделни аритметички задачи можеме едноставно да ги решиме ако даден природен број го разложиме на производ од прости множители. Притоа, се поставува прашањето дали секој природен број може да се претстави како производ од прости броеви. Се покажува дека секој сложен број е производ од прости броеви. За мали броеви тоа лесно се проверува: $4 = 2 \cdot 2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ итн. Пред да го докажеме ова тврдење, кое е познато како *основна теорема на аритметиката*, ќе ја докажеме следнава теорема.

4.2. Теорема . Ако p е прост број и $p|ab$, тогаш $p|a$ или $p|b$.

Доказ. Да претпоставиме дека $p \nmid a$. Тогаш a и p се заемно прости броеви. Но, $p|ab$, па од теорема II 2.13 а) следува дека $p|b$.

Аналогно се докажува дека ако $p \nmid b$, тогаш $p|a$. ■

4.3. Пример. а) Нека x, y се природни броеви. Ако производот

$$(x + 6y)(2x + 5y)(3x + 4y)$$

е делив со 7, тогаш тој е делив со 7^3 . Докажи!

б) Еден четирицифрен број ги има следниве својства: неговата прва цифра е еднаква на втората, а третата е еднаква на четвртата и тој четирицифрен број е квадрат на двоцифрен број. Кој е тој број?

Решение. а) Дадениот израз можеже да го запишеме во обликот:

$$(x + 6y)(2x + 5y)(3x + 4y) = [(x - y) + 7y][2(x - y) + 7y][3(x - y) + 7y].$$

Според условот, овој производ е делив со 7, и бидејќи 7 е прост број од теорема 4.2 следува дека еден од множителите е делив со 7. Но, во случајов

и разликата $x-y$ е делива со 7, па затоа со 7 се деливи и збирите $(x-y)+7y$, $2(x-y)+7y$ и $3(x-y)+7y$, што значи дека производот $(x+6y)(2x+5y)(3x+4y)$ се дели со 7^3 .

б) Бараниот број е од облик $\overline{xxuy}$ и тој го задоволува условот $\overline{xxuy} = \overline{ab}^2$, односно $1100x+11y = \overline{ab}^2$. Оттука $11(100x+y) = \overline{ab}^2$, што значи дека бројот $\overline{ab}$ се дели со 11, т.е. $a=b$. Значи, бараниот број е 11^2 или 22^2 или 33^2 или ... или 99^2 . Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение на задачата е $7744 = 88^2$. ■

4.4. Теорема (основна теорема на аритметиката). Секој природен број N на единствен начин може да се запише како производ на прости множители, (редоследот на множителите не е битен).

Доказ. Најпрво ќе докажеме дека природниот број N може да се запише како производ на прости множители.

Ако N е прост број, тогаш $N = p$ и теоремата е докажана.

Да претпоставиме дека N не е прост број. Тогаш $N = n_1 n_2$. Ако n_1 и n_2 се прости броеви, тогаш доказот е завршен. Ако n_1 или n_2 не е прост број, тогаш постапката ја повторуваме и по конечен број чекори (според теоремата 2.2 сложен број е делив само со простите броеви чии квадрати се помали или еднакви на самиот број) го добиваме претставувањето

$$N = p_1 p_2 \dots p_n, \quad (1)$$

каде што $p_i, i=1, 2, \dots, n$ се прости броеви.

Да претпоставиме дека постојат две претставувања:

$$N = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_k, \quad n \leq k.$$

Тогаш $p_1 \mid q_1 q_2 \dots q_k$ и бидејќи два прости броеви се или меѓусебно еднакви или се заемно прости, од теоремата 4.2 следува дека $p_1 = q_j$ за некој $j=1, 2, \dots, k$. Повторувајќи ја постапката за $p_2, \dots, p_n$ добиваме дека

$$N = p_1 p_2 \dots p_n = (p_1 p_2 \dots p_n) q_{n+1} \dots q_k,$$

од што следува $q_{n+1} = \dots = q_k = 1$, па значи $n = k$ и претставувањето е единствено со точност до редоследот на множителите. ■

4.5. Пример. Запиши ги броевите 6930 и 32340 како производ на прости множители.

Решение. Најпрво ги разложуваме дадените броеви

6930	2		32340	2
3465	3		16170	2
1155	3		8085	3
385	5	и	2695	5
77	7		539	7
11	11		77	7
1			11	11
			1	

од што добиваме $6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. ■

4.6. Пример. а) Најди го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие број кој е квадрат на природен број, а потоа определи го бројот кој се добива како производ.

б) Најди го најмалиот природен четирицифрен број кој е делив со 9 и чиј производ на цифри е еднаков на 180.

Решение. а) За да се помножи бројот 8316 со број со што ќе се добие полн квадрат потребно е сите степени на простите множители да се парни броеви. Бидејќи $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$, добиваме дека најмалиот природен број со кој треба да множиме е бројот $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Така ќе се добие бројот

$$8316 \cdot 231 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2.$$

б) Бројот 180 го разложуваме на множители и добиваме $180 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Според тоа, четири цифри кои даваат производ 180, можат да бидат: 1, 4, 5, 9 или 1, 6, 6, 5 или 2, 2, 5, 9 или 2, 3, 5, 6 или 3, 3, 4, 5. Збирот на цифрите е делив со 9 во случаите 1, 6, 6, 5 и 2, 2, 5, 9, па затоа најмалиот број е 1566. ■

4.7. Како што видовме во претходните два примери, при разложувањето на даден број на прости множители, некои од множителите може повеќекратно да се повторуваат. Ако во разложувањето (1) некои од множителите се еднакви меѓу себе, на пример p_1 се јавува a_1 пати, p_2 се јавува a_2 пати итн., p_k се јавува a_k пати, тогаш за n добиваме

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}. \quad (2)$$

Ваквиот запис на бројот n го нарекуваме *каноничен запис*. Како што видовме во пример 4.5, каноничните записи на броевите 6930 и 32340 се

$$6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \text{ и } 32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

Да забележиме дека со помош на каноничниот запис можеме да дадеме едноставен критериум кога еден природен број е полн квадрат. Имено, од теорема 4.3 и од својствата на степените, следува дека:

Природниот број n е полн квадрат ако степените показатели a_i , $i=1,2,\dots,k$ во каноничниот запис (2) се парни броеви.

4.8. Пример. Со кој најмал природен број k треба да се помножи бројот 720 за да добиеме точен квадрат.

Решение. Бројот 720 го разложуваме на прости множители:

$$720 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Простите броеви 2 и 3 имаат парни степените показатели, а 5 има непарен степен показател. Следствено, за да добиеме точен квадрат, треба бројот 720 да го помножиме со 5. Навистина

$$720 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2.$$

Значи, бараниот број е $k = 5$. ■

4.9. Пример. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни природни броеви не може да биде квадрат на природен број.

Решение. За $n > 2$ збирот на квадратите пет последователни природни броеви $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$. За да овој израз биде квадрат на природен број, потребно е $5 | (n^2 + 2)$. Меѓутоа квадрат на природен број нема последна цифра 3 или 8, па затоа $n^2 + 2$ не може да завршува на цифрата 5 или 0, што значи дека $n^2 + 2$ не се дели со 5. ■

4.10. Со помош на каноничниот запис на дадени природни броеви n и m лесно се определуваат најголемиот заеднички делител и најмалиот заеднички содржател на n и m . Имено, ако

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \text{ и } m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$$

(некои од броевите a_i и b_j можат да бидат еднакви на нула), тогаш

$$\text{NZD}(m, n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}, \text{ каде што } c_i = \min\{a_i, b_i\}, i=1,2,\dots,k \text{ и}$$

$$\text{NZS}(m, n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k}, \text{ каде што } d_i = \max\{a_i, b_i\}, i=1,2,\dots,k.$$

Така на пример, ако се искористат каноничните записи на броевите

$6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$,
 со помош на претходните формули наоѓаме
 $NZD(6930, 32340) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ и
 $NZS(6930, 32340) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 97020$.

4.11. Следнава теорема е последица од каноничниот запис и истата често пати се користи при решавање на задачи.

Теорема. Ако производот на два заемно прости броеви е полн квадрат, т.е. ако $ac = b^2$, $NZD(a, b) = 1$, тогаш a и c се квадрати на природни броеви, т.е. $a = x^2$ и $c = y^2$.

Доказ. За да бројот биде полн квадрат потребно и доволно е сите степенови показатели во каноничниот запис да бидат парни. Бидејќи a и b се заемно прости, секој прост делител на c^2 се јавува или во a или во b , но не и во двата броја. Затоа простите фактори на броевите a и b мораат да имаат парни показатели, па затоа броевите a и b се полни квадрати. ■

6. ЗАДАЧИ

- Дадени се пет различни цели броеви a, b, c, d, e така што
 $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$.
 Пресметај $a + b + c + d + e$.
- Во Гинисовата книга на рекорди запишано е дека најголемиот прост број е еднаков на $23021^{377} - 1$. Дали можеби има печатна грешка?
- Збирот на кои било пет последователни природни броеви е сложен број. Докажи!
- Ако p е прост број, тогаш
 $p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+2012) + (p+2013)$
 е сложен број. Докажи!
- Нека a е произволен природен број. Докажи дека $ax + 1$ е сложен број за барем еден природен број x .

6. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $z = n^4 + a$ е сложен.
7. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $8n^3 - 12n^2 + 6n + 63$ е сложен.
8. За произволни природни броеви m и n , бројот $m^2n^2 + 4n^2 + 7m^2 + 28$ е сложен. Докажи!
9. Ако x, y, z и u се природни броеви поголеми од 1, за кои важи $xy = zu$, докажи дека бројот

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$$
 е сложен природен број.
10. Докажи дека бројот $2003^2 + 2^{2003}$ сложен.
11. Ако p е прост број, докажи дека бројот $1997^p + p^{1997}$ е сложен.
12. Нека a, b, c се ненулти цели броеви, такви што $a \neq c$ и $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ не може да биде прост број.
13. Нека a, b, c, d се природни броеви кои го исполнуваат следниов услов $ab = cd$. Докажи дека бројот $n = a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + d^{2006}$ е сложен.
14. Збирот на 2013 различни прости природни броеви е парен. Дали производот на овие 2013 прости броеви е парен или непарен? Докажи дека меѓу нив постојат 2012 броеви чиј збир е парен. Докажи дека меѓу нив постојат 2012 броеви чиј збир е непарен.
15. Цифрите a, b, c, d се различни и секоја од нив е прост број. Запиши ги сите броеви од облик $\overline{ab10cd}$ кои се деливи со 264.
16. Квадрат на природен број n е шестцифрен број, кој ако засебно се разгледуваат две по две цифри, се состои од три двоцифрени броеви. Првиот и третиот се еднакви, а средниот број е двапати помал од секој од нив. Најди ги сите броеви со ова својство.
17. Најди дробка која е еднаква на дробката $\frac{73}{95}$, а збирот на броителот и именителот е квадрат на најмалиот можен природен број.

18. Најди дробка која е еднаква на дробката $\frac{163}{101}$, а збирот на броителот и именителот е квадрат на најмалиот можен природен број.
19. Во секој од два проекти за изградба на блок згради, секоја зграда треба да има еднаков број станови. Според вториот проект бројот на станови во секоја зграда е поголем отколку во првиот. Според првиот проект бројот на зградите е за 8 помал отколку во вториот. Вкупниот број на станови во првиот проект е 12096, а во вториот 23625. Колку згради треба да се изградат според вториот проект?
20. Нека a, b, c се природни броеви такви што $a^2 + b^2 + c^2$ се дели со 6 и $ab + bc + ca$ се дели со 3. Докажи дека $a^3 + b^3 + c^3$ се дели со 6.
21. Нека p е прост број различен од 3 и нека a и b се цели броеви такви да $p \mid (a + b)$ и $p^2 \mid (a^3 + b^3)$. Докажи дека $p^2 \mid (a + b)$ или $p^3 \mid (a^3 + b^3)$.
22. Најди го најмалиот природен број n , кој има број на делители колку и бројот 1988, (делители на природен број се бројот 1 и самиот тој број).
23. Најди го природниот број n ако $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.
24. Производот на два трицифрени броја е запишан само со цифрата 3. Кои се тие броеви?
25. Најди ги сите прости трицифрени броеви чиј производ на цифри е 252.
26. Најди ги сите природни броеви n за кои бројот $a = n^2 + n + 1$ се дели со 13.
27. Најди го најмалиот природен број n таков да $\sqrt{1998n}$ е исто така природен број.
28. Најди го најмалиот природен број n за кој вредноста на изразот $\frac{\sqrt{1998} + \sqrt{n}}{\sqrt{1998} - \sqrt{n}}$ е исто така природен број.
29. Докажи дека за секој сложен број n , $n > 4$, бројот $2n$ е делител на производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1)$.
30. Ако p е прост број, тогаш $p^4 + p^2 + 1$ е сложен број. Докажи!
31. Запиши ги сите петцифрени броеви од облик $\overline{abcda}$ деливи со 45, при што цифрата на местото на стотките е најголемиот едноцифрен прост број.

32. Бројот 1000002000001 разложи го на множители ако се знае дека еден негов прост множител е поголем од 9000.
33. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.
34. Докажи дека при делење на произволен прост број p со 30, остатокот е или прост број или бројто 1.
35. Ако $p > 5$ е прост број, тогаш остатокот од делењето на p^2 со 30 е 1 или 19. Докажи!
36. Сите прости броеви кои се помали или еднакви на даден прост број p ги делиме на две групи $a, b, \dots, c; k, m, \dots, n$ така што бројот
- $$x = ab \dots c - km \dots n$$
- е поголем од 1 и е помал или еднаков на p^2 . Докажи дека x е прост број.
37. Непарниот природен број $n > 1$ е прост ако и само ако може на единствен начин да се претстави како разлика од квадрати на два природни броја. Докажи!
38. Докажи дека за $n > 2$ меѓу броевите n и $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ постои барем еден прост број.
39. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви од облик $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.
40. Докажи дека непарен број од облик $6k + 1$ не може да се претстави како разлика на два прости броја.
41. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n , кои не може да се претстават во облик $n = a^2 + p$, каде a е природен број, а p е прост број.
42. Нека a, b и c се природни броеви такви што $b - a$ е прост број и $3c^2 = c(a + b) + ab$. Докажи дека $8c + 1$ е полн квадрат.
43. Најди ги сите прости броеви p , за кои бројот $p + 9$ е прост број.
44. Ако p и $8p - 1$ се прости броеви, тогаш $8p + 1$ е сложен број. Докажи!

45. Најди прост број p таков што и броевите $p+10$ и $p+14$ се прости.
46. Најди прост број p таков што и броевите $p+10$ и $p+20$ се прости.
47. Дали постојат прости броеви p и q такви што $3p+5q=67$?
48. Ако n е прост број поголем од 3, тогаш бројот $(9n+1)^2 - (n+9)^2$ е делив со 1920. Докажи!
49. Нека p и q се два последователни непарни прости броеви. Докажи дека $p+q$ е производ на најмалку 3 природни броеви поголеми од 1 (не мора да се различни).
50. Најди три прости броја такви да нивниот производ е петпати поголем од нивниот збир.
51. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?
52. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n така да е исполнето равенството $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$.
53. Ако p е прост број, тогаш бројот $p^{11}+1989$ е сложен број. Докажи!
54. Ако p е прост број, тогаш бројот $p^{2012}-1$ е сложен број. Докажи!
55. Докажи дека за секој прост број p бројот $p^{2014}+1$ е сложен.
56. Најди ги сите прости броеви p за кои бројот p^2+3 е прост број.
57. Ако p и $8p^2+1$ се прости броеви, тогаш и $8p^2-1$ е прост број. Докажи!
58. Ако еден од броевите 2^n-1 и 2^n+1 , $n>2$ е прост, тогаш другиот број е сложен. Докажи!
59. Најди ги сите прости броеви p , за кои $2p^2+1=k^5$, $k \in \mathbb{N}$.
60. Најди ги сите прости броеви од обликот $\frac{11 \dots 1}{11}$, каде n е природен број.

61. Нека $p, q \in \mathbf{N}$ и $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажи дека $1979 \mid p$.
62. Најди ги сите парови прости броеви p и q , такви што
- $$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$
63. Да се најде прост број N од облик $N = a^4 + b^4 + c^4 - 3$, каде a, b, c се исто така прости броеви.
64. Дали постојат прости броеви p, q, r , ($p \neq q \neq r$) такви да
- $$pq + qr + rp = 2002?$$
65. Најди ги сите прости броеви p такви што бројот $p^2 + 11$ има точно 6 природни делители (вклучувајќи го бројот 1 и самиот број).
66. Да се најдат сите прости броеви p, q и r кои го задоволуваат условот
- $$r = p^q + q^p.$$
67. Најди ги сите прости броеви p и q такви што
- $$(p + q)^p = (q - p)^{2q-1}.$$
68. Најди ги сите прости броеви p за кои бројот $7p + 1$ е квадрат на природен број.
69. Одреди прост број p , таков што бројот $2p + 1$ да е точен куб на некој природен број.
70. Нека a, b и c се различни природни броеви, такви што a е делител на $b + c + bc$, b е делител на $a + c + ac$ и c е делител на $a + b + ab$. Докажи дека броевите a, b и c истовремено не може да бидат прости броеви.
71. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.
72. Најди ги сите тројки природни броеви (x, y, z) , кои го задоволуваат условот
- $$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 1986.$$
73. Најди ги сите прости броеви p, q, r за кои $p = q^3 - r^3$.

74. Најди ги сите прости броеви кои истовремено може да се претстават како збир и разлика на два прости броја.
75. За кои природни броеви p броевите p , $p+2$ и p^2+2 се прости?
76. Ако броевите p и $8p^2+1$ се прости, тогаш и $8p^2+2p+1$ е прост број. Докажи!
77. Ако p и p^2+2 се прости броеви, тогаш и p^3+2 е прост број. Докажи!
78. Најди ги сите прости броеви p за кои и броевите $4p^2+1$ и $6p^2+1$ се исто така прости броеви.
79. Најди ги сите прости броеви p и q такви да $p^2-2q^2=1$.
80. Најди ги сите прости броеви p и q такви да бројот $p^2+3pq+q^2$ е степен на бројот 5.
81. Трицифрениот број $\overline{abc}$ е прост, а бројот $\overline{cba}$ е куб на природен број. Кои се тие броеви?
82. Најди прости броеви p, q, r такви да
- $$2p+3q+4r=2006.$$
83. Дали постојат прости броеви p, q, r такви да
- $$pqr+pq+qr+rp+p+q+r=2006?$$
84. Најди ги сите прости броеви p , q и r такви да
- $$p(264q+4r)=2008.$$
85. Најди ги сите прости броеви p, q, r такви да $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$.
86. Да се најдат сите прости броеви p , за кои постојат природни броеви x и y кои се решенија на равенката $x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p$.
87. Разликата на два двоцифрени прости броја, кои се запишани со исти цифри е квадрат на природен број. Кои се тие броеви?
88. Најди ги сите природни броеви n за кои бројот n^5+n+1 е прост број?

89. Нека a и b се цели броеви за кои бројот $a^2 + 9ab + b^2$ се дели со 11. Докажи дека и бројот $a^2 - b^2$ се дели со 11.
90. Најди природен број кој има точно четири различни природни делители, вклучувајќи го бројот 1 и самиот број, таков да збирот на делителите е за 2000 поголем од самиот број.
91. Најди ги сите прости броеви n за кои множеството
- $$A = \{n + 2, n^2 + 4, 6n + 1, n^3 + 2\}$$
- содржи само прости броеви.
92. Најди ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:
- N има точно 16 делители $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{15} < d_{16} = N$;
 - делителот со индекс d_5 (тоа е d_{d_5}) е еднаков на $(d_2 + d_4)d_6$.
93. Ако a и b се цифри, покажи дека во низата броеви $\overline{b}$, $\overline{ab}$, $\overline{aab}$, $\overline{aaab}$, ..., постојат бесконечно многу сложени броеви.
94. Најди ги сите броеви p , q и r , такви што p и r се прости, q е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:
- $$(p + q + r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$

III ГЛАВА

ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА РАВЕНКА

1.1. Дефиниција. Нека $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $ab \neq 0$. Линеарната равенка од видот

$$ax + by = c, \quad (1)$$

чии решение (x, y) се подредени парови цели броеви ја нарекуваме *линеарна Диофантова равенка со две непознати*.

1.2. Коментар. Токму барањето решенијата x и y на равенката (1) да се целобројни е клучниот проблем при решавањето на овие равенки. Така на пример, очигледно е дека равенката $x + y = 11$ има бесконечно многу решенија. Меѓутоа, равенката $6x + 15y = 17$ нема целобројни решенија. Навистина, за секои цели броеви x и y левата страна на последната равенка е делива со 3 и бидејќи $3 \nmid 17$ заклучуваме дека оваа равенка нема целобројни решенија.

Во врска со прашањето кога една линеарна Диофантова равенка со две непознати има решение ќе ја докажеме следната теорема.

1.3. Теорема. Линеарната Диофантова равенка (1) има решение ако и само ако $d \mid c$, каде што $d = \text{NZD}(a, b)$.

Доказ. Нека $d = \text{NZD}(a, b)$. Да претпоставиме дека (x_0, y_0) е решение на равенката (1). Тогаш $ax_0 + by_0 = c$ и бидејќи $d \mid a$ и $d \mid b$, добиваме $d \mid c$.

Обратно, да претпоставиме дека $d \mid c$. Тогаш постои цел број k таков што $c = kd$. Од друга страна, бидејќи $d = \text{NZD}(a, b)$ постојат цели броеви x' и y' такви што $ax' + by' = d$. Ако последното равенство го помножиме со k , добиваме

$$akx' + bky' = dk, \text{ т.е. } a(kx') + b(ky') = c.$$

Според тоа, подредениот пар $(x_0, y_0) = (kx', ky')$ е решение на равенката (1). ■

1.4. Очигледно, доказот на теорема 1.3 и Евклидовиот алгоритам го даваат и методот за решавање на линеарната Диофантова равенка со две непознати.

Пример А. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$16x - 34y = 7.$$

Решение. Бидејќи $\text{NZD}(16, 34) = 2 \nmid 7$, од теорема 1.3 следува дека разгледуваната равенка нема целобројни решенија. Навистина, за секои цели броеви x и y левата страна

$$16x - 34y = 2(8x - 17y)$$

е делива со 2, а десната страна не е делива со 2, $2 \nmid 7$. ■

Пример Б. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$13x + 32y = 5.$$

Решение. Имаме $a = 13$ и $b = 32$. Бидејќи $\text{NZD}(13, 32) = 1$, од теоремата 1.3 следува дека равенката има решение. Сега, користејќи го Евклидовиот алгоритам, имаме

$$32 = 2 \cdot 13 + 6$$

$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$

$$6 = 6 \cdot 1$$

па затоа

$$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2 \cdot (32 - 2 \cdot 13) = 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32, \text{ т.е. } 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32 = 1.$$

Ако последното равенство го помножиме со 5, добиваме

$$13 \cdot 25 + 32 \cdot (-10) = 5$$

што значи дека едно решение на равенката $13x + 32y = 5$ е подредениот пар $(25, -10)$. Лесно се проверува дека решенија на равенката се и подредените парови $(25 + 32t, -10 - 13t)$, за $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. ■

1.5. Во претходната теорема одговоривме кога линеарна Диофантова равенка со две непознати има решение, а во пример 1.4 Б покажавме како се наоѓа едно нејзино решение. Во следната теорема ќе ги окарактеризираме решенијата на равенката (1) во случај кога истите постојат.

1.6. Теорема. Ако $d = \text{NZD}(a, b)$, $d \mid c$ и (x_0, y_0) е едно решение на Диофантовата равенка $ax + by = c$, тогаш сите нејзини решенија се дадени со:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2)$$

Доказ. Ако (x_0, y_0) е решение на равенката $ax + by = c$, тогаш со замена на $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ и $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ добиваме

$$ax + by = a(x_0 + \frac{b}{d}t) + b(y_0 - \frac{a}{d}t) = ax_0 + by_0 = c, \text{ за секој } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

т.е. со (2) се дадени решенија на равенката $ax + by = c$.

Ќе докажеме дека секое решение на равенката $ax + by = c$ може да се запише во облик (2). Ако (x, y) е произволно решение на $ax + by = c$, тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned} ax + by &= ax_0 + by_0, \\ a(x - x_0) &= b(y_0 - y), \\ \frac{a}{d}(x - x_0) &= \frac{b}{d}(y_0 - y). \end{aligned}$$

Имаме $d = \text{NZD}(a, b)$, па затоа $\text{NZD}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Сега, од последната равенка следува $\frac{a}{d} \mid (y_0 - y)$ и $\frac{b}{d} \mid (x - x_0)$, т.е. $x - x_0 = \frac{b}{d}t$ и $y_0 - y = \frac{a}{d}t$, каде што t е цел број. Според тоа, решението (x, y) е во видот (2). ■

1.7. Пример. Во множеството на целите броеви реши ја равенката $69x + 111y = 9000$.

Решение. Бидејќи $\text{NZD}(69, 111) = 3$, дадената равенка ја делиме со 3 и ја добиваме еквивалентната равенка $23x + 37y = 3000$. Користејќи го Евклидовиот алгоритам наоѓаме $23 \cdot (-8) + 37 \cdot 5 = 1$. Последното равенство го множиме со 3000 и добиваме $23 \cdot (-24000) + 37 \cdot 15000 = 3000$, па затоа $(x_0, y_0) = (-24000, 15000)$. Конечно, од претходната теорема следува дека сите решенија на Диофантовата равенка $69x + 111y = 9000$ се дадени со

$$x = -24000 + 37t, \quad y = 15000 - 23t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \blacksquare$$

1.8. Пример. Марко му рекол на својот пријател Александар: Помножи го со бројот 31 редниот број на месецот во кој си роден, а потоа помножи го со 12 редниот број на денот во месецот во кој си роден. Собери ги двата броја и кажи ми го добиениот збир, а јас ќе ти го кажам датумот на твојот роденден.

По кратко пресметување Александар го кажал бројот 292 и Марко го исполнил ветувањето. Како?

Решение. Ако со x и y ги означиме денот и месецот на раѓањето на Александар, тогаш добиваме $12x + 31y = 292$, при што важи $1 \leq x \leq 31$ и $1 \leq y \leq 12$. Понатаму, 12 и 31 се заемно прости броеви, па затоа дадената равенка има решение во множеството $\mathbf{Z}$.

Општото решение на равенката е $x = 14 + 31k$, $y = 4 - 12k$, $k \in \mathbf{Z}$. Лесно се гледа дека само за $k = 0$ се исполнети дополнителните ограничувања $1 \leq x \leq 31$ и $1 \leq y \leq 12$. Но, тоа значи дека $x = 14$, $y = 4$ е решение на задачата, што значи дека Александар е роден на 14. април. ■

2. ОЈЛЕРОВ МЕТОД

2.1. Во претходниот дел видовме кога линеарната Диофантова равенка со две непознати има решение и дадовме постапка за нејзино решавање. Овде ќе презентираме уште еден метод за решавање на ваков тип равенка. Овој метод му припаѓа на швајцарскиот математичар Леонард Ојлер (1707-1783 год.) и затоа е наречен *Ојлеров метод*. Ојлеровиот метод ќе го објасниме со следниов пример.

2.2. Пример. Во множеството на целите броеви реши ја равенката $738x + 621y = 45$.

Решение. Нека (x, y) е решение на дадената равенка. Бидејќи $621 < 738$, го изразуваме y преку x . Ако ги искористиме равенствата $738 = 621 + 117$ и $45 = 0 \cdot 621 + 45$, добиваме

$$y = \frac{-738x + 45}{621} = -x + \frac{-117x + 45}{621}.$$

Понатаму, бидејќи x и y се цели броеви добиваме дека и $\frac{-117x + 45}{621}$ треба да биде цел број, односно $\frac{-117x + 45}{621} = t$, од што ја наоѓаме Диофантовата равенка $621t = -117x + 45$, која има помали коефициенти од почетната равенка. Ја повторуваме постапката и го изразуваме x со помош на t . Добиваме

$$x = \frac{-621t + 45}{117} = -5t + \frac{-36t + 45}{117},$$

односно $x = -5t + u$, каде што $u = \frac{-36t + 45}{117}$. Ја повторуваме постапката и го изразуваме t со помош на u . Имаме

$$t = \frac{-117u+45}{36} = -3u+1 + \frac{-9u+9}{36} = -3u+1+v,$$

каде што $v = \frac{-9u+9}{36}$. Од последното равенство добиваме $u = -4v+1$, $v \in \mathbf{Z}$.

Ако сега последователно се вратиме наназад добиваме:

$$t = -3u+1+v = -3(-4v+1)+1+v = 13v-2,$$

$$x = -5t+u = -5(13v-2)+(-4v+1) = -69v+11,$$

$$y = -x+t = -(-69v+11)+(13v-2) = 82v-13, \quad v \in \mathbf{Z}.$$

Всушност, со последните две равенства се дадени сите решенија (x, y) на равенката $738x+621y=45$. ■

2.3. Пример. Илија требало да реши 73 задачи за 19 дена. Првите 11 дена тој решавал еднаков број задачи секој ден, а останатите 8 дена повторно решавал еднаков број задачи. Колку задачи решавал Илија секој ден?

Решение. Нека бројот на задачите кои ги решавал Илија во секој од првите 11 дена го означиме со x , а бројот на задачите кои ги решавал во секој од преостанатите 8 дена со y . Од условот на задачата имаме $11x+8y=73$. Бидејќи $\text{NZD}(8,11)=1$, заклучуваме дека последната равенка има решение во множеството на целите броеви.

Ако го искористиме методот на Ојлер, за решението на равенката наоѓаме

$$x=3-8k, \quad y=5+11k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Од условот на задачата следува дека $x, y \in \mathbf{N}$, а тоа е можно само за $k=0$. Конечно, $x=3, y=5$ е решение на задачата, што значи дека Илија првите 11 дена решавал по 3, а вторите 8 дена по 5 задачи дневно. ♦

3. РЕШАВАЊЕ НА НЕЛИНЕАРНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

3.1. Диофантовите равенки се еден од најбогатите и најразновидните делови на теоријата на броеви. Претходно видовме како се решава линеарна Диофантова равенка со две непознати. Меѓутоа, решавањето на нелинеарните Диофантови равенки не е така едноставно, па затоа не треба да не чуди што за да се докаже дека Диофантовата равенката $x^n + y^n = z^n$,

$n > 2$ (голема теорема на Ферма), која ја поставил францускиот математичар Пјер Ферма, нема решение во множеството природни броеви, биле потребни повеќе од триста години.

Што се однесува до решавањето на нелинеарните Диофантови равенки, треба да споменеме дека не постојат универзални алгоритми. Сепак да споменеме дека некои елементарни, но доста важни постапки даваат решение на голем број нелинеарни Диофантови равенки. Овие постапки најчесто се засноваат на следниве идеи:

- разложување на множители,
- дискусија на количник,
- дискусија на последната цифра и
- разгледување на остатоци при делење со даден број.

3.2. Пример. Во множеството на целите броеви реши ја Диофантовата равенка $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = -11$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3.$$

Последната равенка во множеството на целите броеви има решение ако секој од квадратите е еднаков на 1, па затоа сите тројки решенија ги добиваме со комбинирање на решенијата

$$x-1=1, \quad y+2=1, \quad z-3=1, \quad x-1=-1, \quad y+2=-1, \quad z-3=-1.$$

Според тоа, решенија се:

$$(x, y, z) \in \{(0, -1, 2); (0, -1, 4); (0, -3, 2); (0, -3, 4);$$

$$(2, -1, 2); (2, -1, 4); (2, -3, 2); (2, -3, 4)\} . \blacksquare$$

3.3. Пример. Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки

$$\text{а) } x^2 - 4y^2 = 17,$$

$$\text{б) } xy - 4x - 2y + 5 = 0$$

Решение. а) Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(x-2y)(x+2y) = 17. \tag{1}$$

Бидејќи 17 е прост број, од (1) ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=17 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+2y=-17 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=17 \\ x+2y=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2y=-17 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

чиј решенија соодветно се подредените парови:

$$(9, 4), (-9, -4), (9, -4) \text{ и } (-9, 4).$$

б) Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(x-2)(y-4)=3. \quad (2)$$

Бидејќи 3 е прост број, од (2) ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y-4=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-1 \\ y-4=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=3 \\ y-4=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2=-3 \\ y-4=-1, \end{cases}$$

од што следува дека $(x, y) \in \{(3, 7), (1, 1), (5, 5), (-1, 3)\}$. ■

3.4. Пример. Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки

а) $xy + 7x - 3y = 23,$

б) $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$

Решение. Равенките од оваа задача ќе ги решиме со дискусија на количник.

а) Последователно, еквивалентно ја трансформираме равенката и добиваме

$$x(y+7) = 3y + 23,$$

$$x = \frac{3y+23}{y+7},$$

$$x = 3 + \frac{2}{y+7}.$$

Но, x е цел број, па затоа последната равенка има решение ако и само ако $(y+7) \mid 2$, односно ако и само ако $y+7 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, од што следува $y \in \{-9, -8, -6, -5\}$. Конечно, ако најдените вредности за y ги замениме во $x = 3 + \frac{2}{y+7}$, за решението на почетната равенка добиваме

$$(x, y) \in \{(2, -9), (1, -8), (5, -6), (4, -5)\}.$$

б) Од $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$, имаме

$$y = \frac{x^2+2x-6}{x+3} = \frac{x^2+3x-x-3-3}{x+3} = x - 1 - \frac{3}{x+3}.$$

Значи, $(x+3) \mid 3$, т.е. $x+3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Според тоа, множеството решенија на дадената равенка е $\{(-6, -6), (-4, -2), (-2, -6), (0, -2)\}$. ■

3.5. Пример. Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки

а) $x^2 + 5y = 2002$ и

б) $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$, каде што $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)k$.

Решение. а) За секој цел број y , цифрата на единиците на бројот $5y$ е 0 или 5. Понатаму, за секој цел број x , цифрата на единиците на не-

говиот квадрат x^2 е една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Според тоа, ако $5y \geq 0$, тогаш цифрата на единиците на бројот $x^2 + 5y$ е една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Аналогно се добива дека во случај кога $5y < 0$, цифрата на единиците на бројот $x^2 + 5y$ е една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

Конечно, за секои $x, y \in \mathbf{Z}$ цифрата на единиците на бројот $x^2 + 5y$ е 0, 1, 4, 5, 6 или 9 и таа е различна од цифрата на единиците на бројот 2002. Значи, равенката нема решение во множеството на целите броеви.

б) Ако $x = 1$, тогаш $y = \pm 1$.

Ако $x = 2$, тогаш $y^2 = 3$, па y не е цел број.

Ако $x = 3$, тогаш $y^2 = 1 + 2 + 6$, што значи $y = \pm 3$.

Ако $x = 4$, тогаш $y^2 = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$, па y не е цел број.

Нека $m \geq 5$. Тогаш $m!$ е делив со 10, па затоа $m! = 10t$, од што следува

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + x! = 33 + 10k.$$

Бројот $33 + 10k$ завршува на цифрата 3, а бројот y^2 завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствени решенија на дадената равенка се подредените парови $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(3, -3)$, $(3, 3)$. ■

3.6. Пример. Во множеството на целите броеви реши ја Диофантовата равенка

$$x^2 = 9y + 5.$$

Решение. Секој природен број може да се запише во еден од видовите

$$3k, 3k + 1 \text{ или } 3k + 2.$$

Според тоа, неговиот квадрат има вид

$$3 \cdot 3k^2, 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ или } 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

т.е. при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Од друга страна

$$9y + 5 = 3(3y + 1) + 2,$$

т.е. остатокот при делење со 3 е 2. Значи, на двете страни на равенката, при делење со 3 секогаш добиваме различни остатоци, па затоа дадената равенка нема решение. ■

4. ЗАДАЧИ

1. Најди го најмалиот петцифрен природен број кој при делење со 17 дава остаток 5, а при делење со 24 дава остаток 3.
2. Реши ја Диофантовата равенка
а) $3x + 7y = 1988$, б) $3x + 15y = 1235$.
3. Марко имал 99 марки со вредност 2, 3 и 5 денари. Колку имал Марко од секоја марка поединечно ако вкупно имал 22 марки?
4. Пекарот Теодор треба да направи 100 векни леб тешки $5kg$, $3kg$ и $0,5kg$. Колку векни треба Теодор да направи ако нивната вкупна тежина е $100kg$?
5. Една група девојчиња и момчиња собрале 1700 денари како роденденски поклон за свој другар. Секое девојче дало по 200 денари, а секое момче по 300 денари. Колку момчиња и колку девојчиња имало, ако групата имала непарен број членови?
6. Марко се движи по права линија така да за една минута прави или 47 чекори на десно или 37 чекори на лево. После секоја минута се мери оддалеченоста на Марко од почетната положба. Како треба да се движи Марко и по колку најмалку цели минути за да тој се најде еден чекор на десно од почетната положба?
7. Кифла чини половина денар, погачица 2 денари, а ѓеврек 5 денари. Дали може со 100 денари да се купат 100 пецива?
8. Петар и Иван живеат во иста зграда во која на секој кат има по 10 станови. Становите почнуваат од првиот спрат и се нумерирани со броевите 1, 2, 3, 4, ... Петар живее на кат чиј број е еднаков на бројот на станот во кој живее Иван. Збирот на броевите на становите на Иван и Петар е 239. Кој е бројот на станот во кој живее Петар?
9. Најди ги сите трицифрени броеви кои го имаат следново својство: ако пред дадениот број се запише цифрата на единиците на бројот, се добива четирицифрен број кој е за 246 поголем од производот на дадениот број и бројот 23.
10. Најди трицифрен број $\overline{abc}$ таков што $49a + 7b + c = 286$.
11. Равенката $2m^2 + n^2 = 2mn + 3n$ реши ја во множеството цели броеви.

12. Определи ги сите цели броеви x и y такви што

$$x^2 - 6x + 4y^2 - 4y + 5 = 0.$$

13. Најди ги сите цели броеви x, y такви што

$$x^4 + y^{2008} = 2x^2.$$

14. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz - 2y - 4yz + 1 = 0.$$

15. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3(x^2 + y^2) + 2xy = 88.$$

16. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}.$$

17. Равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, ($p > 1$ е даден прост број), да се реши во множеството природни броеви.

18. Реша ги Диофантовата равенка:

а) $3x + xy = 11$,

б) $xy - 2x + 3y = 13$,

в) $5(x + y) = xy$,

г) $x^4 + 4y^4 = p$, p е прост број, $x, y \in \mathbf{N}$,

д) $x^2 + 2x + 13 = y^2$,

ѓ) $7p + 1 = n^2$, p е прост број, $n \in \mathbf{N}$,

е) $x^2 - 7xy + 12y^2 = 7$,

ж) $8x^2 + 10x + 3 = p$, p е прост број.

19. Најди природен број n кој кога ќе се зголеми за 5 или ќе се намали за 11 е квадрат на некој број.

20. Во множеството на целите броеви реши ја равенката:

$$x^2 - xy - 2y^2 = 27.$$

21. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

а) $x^2 - y^2 = 61$,

б) $x^3 - y^3 = 61$,

в) $x^4 - y^4 = 61$.

22. Дали постојат цели броеви x и y такви да $x^2 + 2012 = y^2$? Одговорот да се образложи и ако постојат да се најдат сите парови такви броеви.

23. Најди ги сите парови цели броеви (x, y) кои го задоволуваат условот

$$2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1).$$

24. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$xy + 7x - 3y = 25.$$
25. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^2 - x^2 = 4x + 11.$$
26. Најди три прости броја чиј производ е седум пати поголем од нивниот збир.
27. Најди ги сите цели броеви n за кои и $\sqrt{n^2 + 6n - 7}$ е цел број.
28. Најди ги сите цели броеви n за кои и $\sqrt{n^2 + 4n - 5}$ е цел број.
29. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$m^2 - n^2 = 101010.$$
30. Докажи дека равенката $n(n-5) = 408408408$ нема решение во множеството цели броеви!
31. Дадено е множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Ова множество е поделено на две подмножества, така да првото подмножество содржи три елементи, a, b, c , а сите останати елементи го формираат второто подмножество. Дали е можно вредноста на изразот $ab + bc + ca$ да биде еднаква на разликата на производот на елементите од првото множество и зборот на елементите од второто множество, ако:
а) $n = 12$, б) $n = 17$?
32. Дали постојат природни броеви a, b, c кои го задоволуваат условот
$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340.$$
33. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2 - xy + x - 2y = 2000.$$
34. Определи ги целите броеви x и y такви што
$$x^2 y = y^3 + 10.$$
35. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2(y+1) + y^2(x+1) = 11.$$
36. Во множеството цели броеви реши ги следниве равенки:
а) $y^4 + x = xy + 9,$

б) $x^2 + y^4 = 2x - 1$,

в) $x^2 + xy + y^2 = 1$.

37. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy - 7x - y = 3.$$

38. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$xy - 3x + y = 5.$$

39. Најди најголем природен број n таков да $n^2 + 2006n$ биде квадрат на некој природен број.

40. Најди ги сите двоцифрени броеви $\overline{xy}$ такви да $\sqrt{\frac{xy+24}{xy-24}}$ е природен број.

41. Во множеството природни броеви реши ги Диофантовите равенки:

а) $x^4 + y^4 = 33333$,

б) $5^n + 6^m = 123329$,

в) $x! + 2y = 5555$,

г) $x! + 2 = p^2$, p е прост број,

д) $x^2 + y^2 + z^2 = 1988$,

ѓ) $x! + y^2 = 987654$.

42. Покажи дека равенката

$$x! + y! = 10z + 9$$

нема решение во множеството природни броеви.

43. Да се реши во множеството прости броеви равенката

$$3p^2 + 3p = 166 + q.$$

44. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5a - ab = 9b^2.$$

45. Во множеството $\mathbf{Z}$ реши ја равенката

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

46. Да се најдат сите природни броеви n за кои постои цел број x таков што

$$499(1997^n + 1) = x^2 + x.$$

47. Најди ги сите цели броеви x, y и z такви што

$$x + y + z = 1 \text{ и } x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

48. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$4n(n+1) = m(m+1).$$

49. Покажи дека равенката

$$2x^2 - 5y^2 = 7$$

нема решение во множеството природни броеви.

50. Дали постојат цели броеви x, y такви да

$$x^5 + y^5 - 5x^3 + 4x - y = 2008.$$

51. Докажи дека не постојат цели броеви a, b, c такви да

$$a^2 + b^2 - 8c = 6.$$

52. Докажи дека равенката

$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 = 0$$

нема решение во множеството природни броеви.

53. Најди ги сите трицифрени броеви кои се пет пати поголеми од производот на нивните цифри.

54. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}.$$

55. Да се најдат сите природни броеви x, y, z такви што

$$x > y + 1, y > z + 1 \text{ и } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} = 1.$$

56. Реша ја Диофантовата равенка

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1.$$

57. Нека $a, b \in \mathbf{N}$ и при делење на $a^2 + b^2$ со $a + b$ се добива количник q и остаток r . Најди ги сите (a, b) за кои е $q^2 + r = 1977$.

58. Докажи дека равенката

$$x^n + y^n = z^n, n \in \mathbf{N}$$

нема решенија во множеството природни броеви, такви што $z \leq n$.

59. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^{2013} = x^{2012} + 2013.$$

61. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^y = y^{x-y}.$$

62. Најди три прости броја такви да нивниот производ е пет пати поголем од нивниот збир.

63. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2^x + 1 = y^2.$$

64. Најди ги сите природни броеви x и n такви да

$$x^{2n} - 4 = 3(4 + 4^2 + \dots + 4^{2001}).$$

65. Мерните броеви на страните на правоаголен триаголник се природни броеви и притоа $2P = 3L$, каде P е плоштината и L е периметарот на триаголникот. Најди ги сите такви триаголници.

66. Најди ги сите правоаголни паралелопипеди со цели должини на рабовите a, b, c кај кои мерните броеви на волуменот и плоштината се еднакви.

67. Најди ги сите четворки природни броеви (x, y, z, t) такви да

$$x + y = zt,$$

$$z + t = xy.$$

IV ГЛАВА

КОНГРУЕНЦИИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

1. ПОИМ ЗА КОНГРУЕНЦИЈА. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Во претходните разгледувања видовме дека броевите кои при делење со еден ист број даваат ист остаток се од посебен интерес во теоријата на броеви. Токму затоа тие биле предмет на разработка на многу познати математичари, што довело до воведување и користење поимот конгруенција во множеството на целите броеви, т.е. методот на конгруенции во множеството на целите броеви. Овој метод е формален аритметички метод базиран на разгледување на својствата на целите броеви кои имаат еднакви остатоци при делење со еден ист број. Методот прв го разработил германскиот математичар Гаус (1777-1855) иако многу резултати биле познати и претходно.

1.2. Дефиниција. Нека $a, b \in \mathbf{Z}$ и $m \in \mathbf{N}$. Ако $m \mid (a - b)$, тогаш ќе велиме дека бројот a е конгруентен со бројот b по модул m и ќе пишуваме $a \equiv b \pmod{m}$.

Ако $m \nmid (a - b)$, тогаш ќе велиме дека бројот a не е конгруентен (неконгруентен) со бројот b по модул m и ќе пишуваме $a \not\equiv b \pmod{m}$.

1.3. Пример. а) Да ги разгледаме броевите $a = 78, b = 85$ и $m = 7$. Бидејќи $a - b = 78 - 85 = -7 = 7 \cdot (-1)$, од дефиниција 1.2 добиваме

$$78 \equiv 85 \pmod{7}.$$

б) За броевите $a = 123, b = 97$ важи $a - b = 123 - 97 = 26$ и бидејќи $3 \nmid 26$ заклучуваме дека $123 \not\equiv 97 \pmod{3}$. ■

1.4. Теорема. Нека $a, b \in \mathbf{Z}$ и $m \in \mathbf{N}$. Тогаш:

а) $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако постои цел број k таков што $a = b + km$.

б) $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако при делење со m , броевите a и b имаат еднакви остатоци.

Доказ. а) Од дефиниција 1.2 следува дека $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (a - b)$. Понатаму, $m \mid (a - b)$ ако и само ако постои цел број k таков што $a - b = km$, т.е. постои цел број k таков што $a = b + km$.

б) Нека $a = mp + r$ и $b = mq + s$, $p, q, r, s \in \mathbf{Z}$ и $0 \leq r, s < m$. Тогаш $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (a - b)$, што значи ако и само ако

$$m \mid [(mp + r) - (mq + s)].$$

Според тоа, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако

$$m \mid [m(p - q) + (r - s)].$$

Значи, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (r - s)$. Но, $-m < r - s < m$, па затоа $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $r - s = 0$, т.е. ако и само ако $r = s$. ■

1.5. Пример. а) При делење на броевите 63, 64, 65, 66, 67, 68 и 69 со бројот 7 се добива количник 9 и остатоци 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соодветно. Од теорема 1.4 б) следува дека

$$63 \equiv 0 \pmod{7}, 64 \equiv 1 \pmod{7}, 65 \equiv 2 \pmod{7}, 66 \equiv 3 \pmod{7},$$

$$67 \equiv 4 \pmod{7}, 68 \equiv 5 \pmod{7} \text{ и } 69 \equiv 6 \pmod{7}.$$

б) Од теорема 1.4 б) имаме дека $37 \equiv 25 \pmod{12}$. Навистина, при делењето на 37 и 25 со 12 се добива остаток 1. ■

Во следниве теореми ќе докажеме неколку важни својства на конгруенциите. Притоа ќе сметаме дека бројот m е природен број.

1.6. Теорема. а) За секој $a \in \mathbf{Z}$ важи $a \equiv a \pmod{m}$.

б) Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $b \equiv a \pmod{m}$.

в) Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогаш $a \equiv c \pmod{m}$

Доказ. а) Од $a - a = 0$, за секој $a \in \mathbf{Z}$ следува $a \equiv a \pmod{m}$, за секој $a \in \mathbf{Z}$.

б) Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $m \mid (a - b)$. Од $b - a = (-1)(a - b)$ следува $m \mid (b - a)$, па од дефиниција 1.2 заклучуваме дека $b \equiv a \pmod{m}$.

в) Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогаш $m \mid (a - b)$ и $m \mid (b - c)$.

Според тоа, $m \mid [(a - b) + (b - c)] = a - c$, па затоа $a \equiv c \pmod{m}$. ■

1.7. Теорема. Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, тогаш

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}, a - c \equiv b - d \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Доказ. Нека $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$. Според дефиниција 1.2 $m \mid (a-b)$ и $m \mid (c-d)$. Според тоа

$$m \mid [(a-b) + (c-d)] = (a+c) - (b+d),$$

$$m \mid [(a-b) - (c-d)] = (a-c) - (b-d)$$

и

$$m \mid [c(a-b) + b(c-d)] = ac - bd,$$

што значи дека

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}, \quad a - c \equiv b - d \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bd \pmod{m}. \blacksquare$$

1.8. Коментар. Да забележиме дека претходната теорема всушност покажува дека релацијата $\equiv$ по даден модул е согласна со операциите собирање, одземање и множење на конгруенции.

Меѓутоа, релацијата $\equiv$ не е согласна со релацијата делење на цели броеви (дури и кога последната е дефинирана). Имено, во конгруенцијата

$$8 \equiv -4 \pmod{12}$$

броевите 8 и -4 се деливи со 2 и со 4, меѓутоа ако поделиме со 2, односно со 4 добиваме $4 \equiv -2 \pmod{12}$ односно $2 \equiv -1 \pmod{12}$, што не е точно.

Од теоремите 1.6 а) и 1.7 непосредно следува точноста на следнава теорема.

1.9. Теорема. а) Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш

$$a + c \equiv b + c \pmod{m}, \quad a - c \equiv b - c \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bc \pmod{m},$$

за секој $c \in \mathbb{Z}$.

б) Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

1.10. Пример. Докажи дека за секои прости броеви p и q , $p, q > 3$, важи или

$$p \equiv q \pmod{6} \text{ или } p + q \equiv 0 \pmod{6}.$$

Решение. Како што знаеме, секој прост број поголем од 3 е од видот или $6k + 1$ или $6t - 1$. Ќе разгледаме три случаи:

а) ако $p = 6k + 1$ и $q = 6t + 1$, тогаш од теорема 1.4 б) следува дека $p \equiv q \pmod{6}$;

б) ако $p = 6k - 1$ и $q = 6t - 1$, тогаш од теорема 1.4 б) следува дека $p \equiv q \pmod{6}$; и

в) ако $p = 6k + 1$ и $q = 6t - 1$, тогаш $p \equiv 1 \pmod{6}$ и $q \equiv -1 \pmod{6}$ и од теорема 1.7 следува дека

$$p + q \equiv 1 + (-1) \pmod{6}, \text{ т.е. } p + q \equiv 0 \pmod{6}. \blacklozenge$$

1.11. Пример. а) Докажи дека $10 \mid (3^{1988} - 1)$.

б) Најди го остатокот од делењето на бројот 4^{56} со 9.

Решение. а) Од $3^4 = 81$ следува $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Сега од теорема 1.9 б) добиваме

$$(3^4)^{497} \equiv 1^{497} \pmod{10}, \text{ т.е. } 3^{1988} \equiv 1 \pmod{10},$$

што значи $10 \mid (3^{1988} - 1)$.

б) Ќе го побараме оној степен на бројот 4 кој е конгруентен со 1 по модул 9. Последователно имаме

$$4 \equiv 4 \pmod{9},$$

$$4^2 \equiv 7 \pmod{9} \text{ бидејќи } 16 = 9 \cdot 1 + 7,$$

$$4^3 \equiv 1 \pmod{9} \text{ бидејќи } 64 = 9 \cdot 7 + 1.$$

Бидејќи $56 = 18 \cdot 3 + 2$, последната конгруенција ја степенуваме со 18 и добиваме

$$4^{54} \equiv 1 \pmod{9}.$$

Понатаму, ако ги помножиме конгруенциите

$$4^2 \equiv 7 \pmod{9} \text{ и } 4^{54} \equiv 1 \pmod{9}$$

добиваме $4^{54} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 7 \pmod{9}$, т.е. $4^{56} \equiv 7 \pmod{9}$.

Значи, остатокот од делењето на бројот 4^{56} со 9 е 7. ■

Како што рековме, релацијата $\equiv$ не е согласна со релацијата делење на цели броеви (дури и кога последната е дефинирана). Во следната теорема ќе докажеме кога двете страни во една конгруенција може да се поделат со некој број.

1.12. Теорема. а) Ако $\text{NZD}(a, m) = 1$ и $ab \equiv ac \pmod{m}$, тогаш $b \equiv c \pmod{m}$.

б) Ако $\text{NZD}(a, m) = d$ и $ab \equiv ac \pmod{m}$, тогаш $b \equiv c \pmod{q}$ каде што $q = \frac{m}{d}$.

в) Ако $\text{NZD}(a, m) = d$, $q = \frac{m}{d}$ и $b \equiv c \pmod{q}$, тогаш

$$ab \equiv ac \pmod{m}.$$

Доказ. б) Нека $\text{NZD}(a, m) = d$ и $ab \equiv ac \pmod{m}$. Постојат цели броеви p и q такви што $m = dq$ и $a = dp$ и важи $\text{NZD}(p, q) = 1$. Од $ab \equiv ac \pmod{m}$ следува дека постои $k \in \mathbb{Z}$ таков што $ab = ac + mk$. Ако последното равенство го поделиме со d го добиваме равенството $pb = pc + qk$ од што следува $p(b - c) = qk$. Но, $\text{NZD}(p, q) = 1$, па затоа од последното равенство следува $q \mid (b - c)$, т.е. $b \equiv c \pmod{q}$, каде што $q = \frac{m}{d}$.

а) Следува од тврдењето под б) за $d = 1$.

в) Бидејќи $\text{NZD}(a, m) = d$, добиваме $a = dp$ и $m = dq$, за некои цели броеви p и q . Понатаму, од $b \equiv c \pmod{q}$ следува дека постои $k \in \mathbb{Z}$ таков што $b = c + qk$. Последното равенство го множиме со a и добиваме дека $ab = ac + aqk$ и ако замениме за $a = dp$ добиваме дека

$$ab = ac + (dq)(pk) = ac + m(pk),$$

односно $ab - ac = m(pk)$. Според тоа, $m \mid (ab - ac)$, т.е. $ab \equiv ac \pmod{m}$. ■

1.13. Теорема. Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$ и $\text{NZS}(m, n) = k$, тогаш $a \equiv b \pmod{k}$.

Доказ. Нека $\text{NZD}(m, n) = t$. Тогаш $n = pt$ и $m = qt$, каде што $\text{NZD}(p, q) = 1$ и $\text{NZS}(m, n) = pqt$. Од $n \mid (a - b)$ и $m \mid (a - b)$ следува дека $pt \mid (a - b)$ и $qt \mid (a - b)$, т.е. $a - b = ptr$ и $a - b = qts$. Значи, $ptr = qts$, т.е. $pr = qs$ и бидејќи $\text{NZD}(p, q) = 1$ добиваме $p \mid s$ т.е. $s = pu$. Со замена во $a - b = qts$ добиваме $a - b = qtpu$, т.е. $pqt \mid (a - b)$. Но, $\text{NZS}(m, n) = pqt = k$, па затоа $a \equiv b \pmod{k}$. ■

2. ПРИМЕНА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ

2.1. При проучувањето на деливоста на целите броеви се задржавме на некои посебни признаци за деливост, а во претходниот дел ги разгледаваме конгруенциите и ги докажавме нивните својства. Овде ќе пока-

жеме како конгруенциите можат да се искористат за наоѓање на посебните признаци за деливост. За таа цел прво ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема. Нека $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$, каде што $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ се цели броеви. Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{m}.$$

Доказ. Од теорема 1.9 б) следува $a^t \equiv b^t \pmod{m}$ за $t = 0, 1, \dots, k$. Сега од теорема 1.9 а) следствено добиваме

$$a_t a^t \equiv a_t b^t \pmod{m} \text{ за } t = 0, 1, \dots, k$$

$$a_k a^k + a_{k-1} a^{k-1} + \dots + a_1 a + a_0 \equiv a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0 \pmod{m}$$

односно $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$. ■

2.2. Признак за деливост со 9. Секој природен број е конгруентен со збирот на своите цифри по модул 9.

Доказ. Нека n е природен број чиј декаден запис е

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0,$$

каде што $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Ставаме

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Тогаш, бидејќи $10 \equiv 1 \pmod{9}$ од теорема 2.1 следува

$$f(10) \equiv f(1) \pmod{9}, \text{ т.е. } n \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}. \blacksquare$$

2.3. Пример. Од

$$56786457455 \equiv 5 + 6 + 7 + 8 + 6 + 4 + 5 + 7 + 4 + 5 + 5 \equiv 62 \equiv 6 + 2 \equiv 8 \pmod{9}$$

следува дека бројот 56786457455 не е делив со бројот 9. Но,

$$5673897567 \equiv 5 + 6 + 7 + 3 + 8 + 9 + 7 + 5 + 6 + 7 \equiv 63 \equiv 6 + 3 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

па затоа бројот 5673897567 е делив со бројот 9. ■

2.4. Признак за деливост со 11. Ако природниот број n има декаден запис

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

тогаш

$$n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}.$$

Доказ. Нека n е природен број чиј декаден запис е

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0,$$

каде што $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Ставаме

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Тогаш, бидејќи $10 \equiv -1 \pmod{11}$, од теорема 2.1 следува

$$f(10) \equiv f(-1) \pmod{11},$$

т.е.

$$n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}. \blacksquare$$

2.5. Пример. Од

$$43419027549 \equiv 9 - 4 + 5 - 7 + 2 - 0 + 9 - 1 + 4 - 3 + 4 \equiv 18 \equiv 8 - 1 \equiv 7 \pmod{11}$$

следува дека бројот 43419027549 е конгруентен со 7 по модул 11, т.е. не е делив со 11.

Бидејќи

$$47859679 \equiv 9 - 7 + 6 - 9 + 5 - 8 + 7 - 4 \equiv -1 \pmod{11}$$

добиваме дека бројот 47859679 е конгруентен со -1 по модул 11, т.е. овој број не е делив со 11. ■

2.6. Признак за деливост со 7. Ако природниот број n има декаден запис

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0,$$

тогаш n е делив со 7 ако и само ако збирот

$$\{(a_0 + 3a_1 + 2a_2) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) + \dots\} - \\ - \{(a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_9 + 3a_{10} + 2a_{11}) + \dots\}$$

е делив со 7.

Доказ. Нека n е природен број чиј декаден запис е

$$n = a_k 10^k + \dots + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

каде што $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Бидејќи

$$10^0 \equiv 1 \pmod{7}, 10^1 \equiv 3 \pmod{7}, 10^2 \equiv 2 \pmod{7}, 10^3 \equiv 6 \equiv (-1) \pmod{7},$$

$$10^4 \equiv 4 \equiv (-3) \pmod{7}, 10^5 \equiv 5 \equiv (-2) \pmod{7}, 10^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ итн.}$$

следува дека

$$10^{6k} \equiv 1 \pmod{7}, 10^{6k+1} \equiv 3 \pmod{7}, 10^{6k+2} \equiv 2 \pmod{7},$$

$$10^{6k+3} \equiv (-1) \pmod{7}, 10^{6k+4} \equiv (-3) \pmod{7}, 10^{6k+5} \equiv (-2) \pmod{7}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}
n &= a_k 10^k + \dots + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\
&= a_0 + 10a_1 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + a_4 10^4 + a_5 10^5 + a_6 10^6 + a_7 10^7 + \dots \\
&\equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 + (-1)a_3 + (-3)a_4 + (-2)a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + \dots \pmod{11}
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

2.7. Пример. Од

$$\begin{aligned}
43419027549 &\equiv 9 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 7 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 9 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 3 - 3 \cdot 4 \\
&\equiv 23 \equiv 3 + 3 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}
\end{aligned}$$

следува дека бројот 43419027549 е конгруентен со 2 по модул 7, т.е. не е делив со 7.

Но, бидејќи

$$959679 \equiv 9 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 - 9 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{7},$$

добиваме дека бројот 959679 е конгруентен со 0 по модул 7, т.е. овој број е делив со 7. ■

2.8. Пример. Докажи дека ако бројот n е делив со 99, тогаш збирот на неговите цифри не е помал од 18.

Решение. Нека $99 \mid n$ и нека збирот на неговите цифри A е помал од 18. Тогаш $9 \mid n$, па затоа и збирот на цифрите A на n е делив со 9. Бидејќи n е природен број, $A > 0$, па единствен број кој е делив со 9 и е помал од 18 е 9. Ако $A = 9$, тогаш од

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

следува

$$A = a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

Од друга страна, бидејќи $11 \mid n$ следува

$$11 \mid \{(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_1 + a_0\}$$

и бидејќи

$$-9 \leq (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_1 + a_0 \leq 9$$

добиваме дека

$$(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_1 + a_0 = 0,$$

т.е. $a_0 + a_2 + \dots = a_1 + a_3 + \dots$. Според тоа

$$9 = 2(a_0 + a_2 + \dots),$$

што е противречност. ■

3. ЗАДАЧИ

1. Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $d \mid m$, тогаш $a \equiv b \pmod{d}$. Докажи!
2. Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $c > 0$, тогаш $ac \equiv bc \pmod{mc}$. Докажи!
3. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.
4. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.
5. Докажи дека за $c = 2$, $m = 7$, $a = 2$ и $b = 9$ иако $a \equiv b \pmod{m}$, не е точно дека $c^a \equiv c^b \pmod{m}$.
6. На која цифра завршува бројот
 - а) 6^{811} ,
 - б) 2^{1000} ,
 - в) 3^{9999} .
7. За секој природен број k и за секој цели броеви a и b , $a \neq b$ важи $(a-b) \mid (a^k - b^k)$. Докажи!
8. За секој природен број k и за секој цели броеви a и b , $a \neq -b$ важи $(a+b) \mid (a^{2k-1} + b^{2k-1})$. Докажи!
9. Најди го остатокот при делењето на бројот:
 - а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24,
 - б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9,
 - в) $(17^{17} + 116)^{21}$ со 8.
10. Нека $p > 2$ е прост број. Докажи дека секој делител на бројот $2^p - 1$ е од облик $2kp + 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$.
11. Нека k е природен број. Докажи дека бројот $2^{2k-1} + 2^k - 1$ не е делив со 7.
12. Докажи дека бројот $13^{101} - 13^{95}$ се дели со 7.
13. Докажи дека бројот $2222^{5555} + 5555^{2222}$ се дели со 7.
14. За секои природни броеви k, t, m збирот $3^{5k} + 4^{5t+2} + 5^{5m+1}$ се дели со 11. Докажи!
15. Докажи дека за секој $n \geq 0$:

- а) $49 \mid (5 \cdot 3^{4n+2} + 53 \cdot 2^{5n})$, б) $14 \mid (2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3})$,
 в) $11 \mid (2^{6n+1} + 3^{2n+2})$, г) $57 \mid (7^{n+2} + 8^{2n+1})$,
 д) $37 \mid (2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1})$, ѓ) $17 \mid (2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2})$.

16. Докажи дека Ферматовиот број $f_5 = 2^{2^5} + 1$ е сложен.

17. Нека p е прост број и $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Докажи дека

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

18. Докажи дека меѓу броевите $2^n - 3$, $n = 0, 1, 2, \dots$ има бесконечно многу кои се деливи со 5 и бесконечно многу кои се деливи со 13.

19. Најди ги сите природни броеви n , такви што $7 \mid (2^n - 1)$.

20. Докажи дека $7 \nmid (2^n + 1)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

21. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на броевите 1978^m и 1978^n (во декаден запис) се еднакви. Најди ги броевите m и n за кои збирот $m + n$ е најмал.

22. Нека d е природен број различен од 2, 5 и 13. Докажи дека во множеството $\{2, 5, 13, d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така да $ab - 1$ не е квадрат на цел број.

23. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{10}^4 = 2011.$$

24. Најди ги сите прости броеви p и q такви да бројот $p^2 + 3pq + q^2$ е квадрат на некој природен број.

25. Најди ги сите природни броеви a, b, c такви да $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

26. За секој број $n = 0, 1, 2, \dots, 1999$ бројот A_n е дефиниран со

$$A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}.$$

Најди го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, \dots, A_{1999}$.

27. Докажи дека бројот 2001 не може да биде збир на кубови на два природни броја.

28. Докажи дека не постојат природни броеви x и y такви да

$$x^3 + y^3 = 2^{2006}.$$

29. Ако природниот број n не се дели со 4, докажи дека 5 е делител на бројот $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$.
30. Ако p е прост број, докажи дека $7p + 3^p - 4$ не е квадрат на природен број.
31. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите $4^n + 15n - 1$, $n \in \mathbf{N}$.
32. Дали можат броевите $1^1, 2^2, \dots, 2008^{2008}$ да се запишат еден по друг, во произволен редослед, така што добиениот број да биде точен квадрат.
33. Нека C е множество од ненегативни цели броеви кои може да се претстават во обликот: $2007t + 2008s$, каде t, s , се ненегативни цели броеви
 - а) Докажи дека 4026041 не припаѓа во C ,
 - б) Ако n е цел број таков што $0 \leq n \leq 4026041$ и $n \notin C$, тогаш $(4026041 - n) \in C$.
34. Најди го најмалиот збир на цифрите на број од облик $3n^2 + n + 1$, $n \in \mathbf{N}$.
35. Одреди ги сите природни броеви n за кои бројот $2^n + 3^n + 4^n$ е квадрат на природен број.

РЕШЕНИЈА

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ПРВА ГЛАВА

1. Најди природни броеви a и b такви што и броевите $x = \frac{2a+b}{3b+2}$, $y = \frac{3b+2}{8}$ и $z = \frac{8}{2a+b}$ се исто така природни броеви. Дали постојат природни броеви a и b за кои и $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{4}$ и $4z$ се природни броеви?

Решение. Забележуваме дека $xyz=1$, што е можно ако и само ако $x=y=z=1$, т.е. ако $3b+2=8$ и $2a+b=8$. Според тоа, $b=2$ и $a=3$. Но, за $xyz=1$ имаме $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{4} \cdot 4z = \frac{1}{2}$, па затоа броевите $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{4}$ и $4z$ не може да бидат природни.

2. Во осумцифрениот број 121****5 најди ги непознатите цифри така да овој број е квадрат на природен број.

Решение. Дадениот број завршува на цифрата 5, па затоа тој е квадрат на природен број n чија цифра на единици е 5. Од друга страна

$$3500^2 = 12250000 \text{ и } 3450^2 = 11902500.$$

Според тоа, $3450 < n < 3500$. Со непосредна проверка на броевите чија цифра на единици е 5, а кои се помали од 3500 и се поголеми од 3450 добиваме:

$$3455^2 = 11937025, \quad 3465^2 = 12006225, \quad 3475^2 = 12075625,$$

$$3485^2 = 12145225 \text{ и } 3495^2 = 12215025.$$

Значи, бараниот број е $3485^2 = 12145225$.

3. Најди го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 12345679 за да се добие број кој е запишан само со цифрата 5.

Решение. Јасно, производот на дадениот и бараниот број ќе биде запишан со повеќе од осум цифри 5. Ако тој број го поделиме со бројот 12345679, (делењето ќе биде завршено кога ќе добиеме остаток 0), добиваме

$$55555555 \dots : 12345679 = 45$$

$$\underline{-49382716}$$

$$61728395$$

$$\underline{-61728395}$$

$$0$$

Според тоа, $12345679 \cdot 45 = 555555555$ и бараниот број е 45.

4. Најди ги сите природни броеви кои стануваат 14 пати помали ако се изостави цифрата на единиците.

Решение. Нека бараниот број го запишеме во облик $10b + a$, каде a е цифрата на единиците, а b е бројот кој останува после бришењето на истата. Од условот на задачата имаме $14b = 10b + a$, односно $4b = a$. Но, a е едноцифрен број, па затоа $b = 1$ или $b = 2$, од што следува $a = 4$ или $a = 8$, соодветно. Според тоа, бараните броеви се 14 и 28.

5. Одреди ги цифрите a, b и c така што да важи $\overline{ab}^a = \overline{bcb}$.

Решение. За $a = 1$ бројот $\overline{ab}^a$ е двоцифрен, па $a = 1$ не го исполнува условот на задачата. За $a \geq 3$ бројот $\overline{ab}^a \geq 1000$, што значи дека повторно не е исполнет условот на задачата. За $a = 2$ следува дека $\overline{2b}^2 = (2 \cdot 10 + b)^2$ т.е. $400 + 40b + b^2 = \overline{bcb}$. Бидејќи $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ и последната цифра на b^2 треба да биде иста со b , мора $b = 1$, $b = 5$ или $b = 6$. Ако $b = 1$, тогаш $21^2 \neq \overline{1c1}$. Ако $b = 5$, тогаш $25^2 \neq \overline{5c5}$. За $b = 6$ имаме $26^2 = 676$ и тоа е единственото решение.

6. На која цифра завршува бројот 2^{100} ?

Решение. Да забележиме дека $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512$ итн. Очигледно последната цифра на степените периодично се менува, при што се повторуваат четири цифри, и тоа по следниов редослед: 2, 4, 8, 6. Гледаме дека секој степен, чиј степен показател се дели со 4, завршува на цифрата 6, што значи дека на оваа цифра завршува и бројот 2^{100} .

7. Со колку нули завршува бројот $9^{999} + 1$?

Решение. Последните две цифри на производот на два броја се одредени со последните две цифри на множителите. Ова следува од

$$(100a + b)(100c + d) = 100(100ac + ad + bc) + bd,$$

каде b и d се броевите составени од последните две цифри на множителите. Да ги запишеме последните две цифри на првите 11 степени на деветката: 09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09. Бидејќи 9^{10} завршува на 01, следува дека сите степени на 9^{10} завршуваат на 01, што значи дека $9^{990} = (9^{10})^{99}$ завршува на 01. Затоа $9^{999} = 9^{990}9^9$ завршува на 89. Значи $9^{999} + 1$ завршува на 90, т.е. $9^{999} + 1$ завршува на една нула.

8. Најди ги последните две цифри на бројот 7^{1999} .

Решение. Од $7^4 = 2401$ следува

$$7^{1999} = 7^{1996+3} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = \overline{2401}^{499} \cdot 7^3 = \overline{...01} \cdot 343 = \overline{...43}.$$

9. Ако $a + \frac{1}{a}$ е цел број, тогаш и $a^4 + \frac{1}{a^4}$ е цел број. Докажи!

Решение. Ако $a + \frac{1}{a}$ е цел број, тогаш и $(a + \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$ е цел број, па затоа $a^2 + \frac{1}{a^2}$ е цел број. Конечно $(a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = a^4 + \frac{1}{a^4} + 2$ е цел број, од што следува дека $a^4 + \frac{1}{a^4}$ е цел број.

10. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3)}{1 \cdot 3 \cdot 9(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{8}{27}.$$

11. Во квадратна 100×100 мрежа запишани се било кои 10000 броеви. Со a_1 да го означиме збирот на броевите од првата колона, со a_2 збирот на броевите од втората колона, итн. со a_{100} збирот на броевите до стотата колона. Понатаму, со b_1 да го означиме збирот на броевите од првата редица, со b_2 збирот на броевите од втората редица, итн. со b_{100} збирот на броевите од стотата редица. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100}).$$

Решение. Дадениот израз може да се запише во облик

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{100}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{100}),$$

и тој е еднаков на 0, бидејќи збирот во правата заграда е еднаков на збирот на броевите запишани во целата таблица, а толкав е и збирот на зброевите во втората заграда.

12. Природниот број n има најмалку две цифри и завршува на цифрата 5. Ако на бројот n ја избришеме последната цифра, добиениот број го помножаме со неговиот следбеник и на добиениот број од десно му допишеме 25, тогаш го добиваме бројот n^2 . Докажи!

Решение. Имаме $n = 10a + 5$. Со бришење на цифрата 5 го добиваме бројот a . Ако овој број го помножаме со неговиот следбеник го добиваме бројот $a(a+1)$ и кога од десно ќе допишеме 25 го добиваме бројот

$$100a(a+1) + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = (10a + 5)^2 = n^2,$$

што и требаше да се докаже.

13. За кои цифри a и b , ($a \neq 0$) бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ е полн квадрат?

Решение. За било кои цифри a и b ($a \neq 0$) бројот

$$A = 9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$$

можеме да го запишеме во облик

$$A = 9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4 = 9(10 \cdot \overline{ab} + 5 - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$$

$$\begin{aligned}
&= 9(9 \cdot \overline{ab} + 5)(\overline{ab} + 1) + 4 \\
&= 81 \cdot \overline{ab}^2 + 126 \cdot \overline{ab} + 49 \\
&= (9 \cdot \overline{ab} + 7)^2.
\end{aligned}$$

Значи, за било кои цифри a и b ($a \neq 0$), бројот A е полн квадрат.

14. Докажи дека збирот на производот на четири последователни природни броеви и бројот 1 е квадрат на природен број.

Решение. Нека $n, n+1, n+2$ и $n+3$ се четири последователни природни броеви. Имаме,

$$\begin{aligned}
n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3) \cdot [n(n+3)+2]+1 \\
&= [n(n+3)]^2 + 2n(n+3)+1 \\
&= [n(n+3)+1]^2 = (n^2+3n+1)^2,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

15. Дали постојат природни броеви m и n такви да m^2+n и n^2+m се квадрати на природни броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека $m=n$. Тогаш, $m^2+n=k^2$, па затоа

$$m^2 < k^2 = m^2 + n = m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

што не е можно бидејќи од последното неравенство би следувало дека постои природен број k таков да $m < k < m+1$. Ако $m > n$ и $m^2+n=k^2$, тогаш

$$m^2 < k^2 = m^2 + n < m^2 + m < (m+1)^2,$$

што повторно доведува до противречност. Аналогно се заклучува и во случај кога $m < n$. Според тоа, бараните природни броеви не постојат.

16. Парен број четворки, запишани една до друга, го формираат бројот A во декаден запис, а двојно помал број осумки го формираат бројот B . Докажи дека бројот $A+2B+4$ секогаш е полн квадрат.

Решение. Да претпоставиме дека бројот A е запишан со $2n$ цифри, а бројот B е запишан со n цифри. Имаме,

$$\begin{aligned}
A &= \underbrace{444\dots44}_{2n} = \underbrace{44\dots4}_n \underbrace{44\dots4}_n = \underbrace{44\dots4}_{n-1} \underbrace{400\dots0}_n - \underbrace{44\dots4}_n + \underbrace{88\dots8}_n \\
&= \underbrace{44\dots4}_n \cdot (10^n - 1) + B = \underbrace{4 \cdot 11\dots1}_n \cdot \underbrace{99\dots9}_n + B \\
&= \underbrace{2^2 \cdot 11\dots1}_n \cdot \underbrace{3^2 \cdot 11\dots1}_n + B = \underbrace{66\dots6}_n \cdot \underbrace{66\dots6}_n + B \\
&= [\underbrace{3 \cdot 22\dots2}_n]^2 + B = [\underbrace{\frac{3}{4} \cdot 88\dots8}_n]^2 + B = (\frac{3}{4}B)^2 + B.
\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}
A+2B+4 &= (\frac{3}{4}B)^2 + B + 2B + 4 = (\frac{3}{4}B)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}B \cdot 2 + 2^2 \\
&= (\frac{3}{4}B+2)^2 = (\frac{3}{4} \cdot \underbrace{88\dots8}_n + 2)^2 = (\underbrace{3 \cdot 22\dots2}_n + 2)^2 = \underbrace{66\dots68}_{n-1}^2,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

17. Докажи дека бројот $\underbrace{111\dots111}_{2000} - \underbrace{222\dots222}_{1000}$ е квадрат на природен број.

Решение. Од

$$\underbrace{111\dots111}_{2000} = \frac{1}{9} \underbrace{999\dots999}_{2000} = \frac{1}{9}(10^{2000} - 1) \text{ и } \underbrace{222\dots222}_{1000} = \frac{2}{9}(10^{1000} - 1)$$

следува

$$\begin{aligned} \underbrace{111\dots111}_{2000} - \underbrace{222\dots222}_{1000} &= \frac{1}{9}(10^{2000} - 1 - 2(10^{1000} - 1)) = \frac{1}{9}(10^{2000} - 2 \cdot 10^{1000} + 1) \\ &= \left(\frac{10^{1000} - 1}{3}\right)^2 = \underbrace{333\dots333^2}_{1000}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

18. Докажи дека бројот $k = \underbrace{11\dots11}_{n+1} \underbrace{22\dots22}_{n+1}$ е квадрат на природен број.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} k = \underbrace{11\dots11}_{n+1} \underbrace{22\dots22}_{n+1} &= 10^2(\underbrace{11\dots11}_{2n+1} + \underbrace{11\dots11}_n) + 25 = \frac{10^2}{9}(10^{2n} + 10^n - 2) + 25 \\ &= \frac{1}{9}(10^{2(n+1)} + 10^{n+2} - 200) + 25 \\ &= \frac{1}{9}(10^{2(n+1)} + 10^{n+2} + 25) = \left[\frac{1}{3}(10^{n+1} + 5)\right]^2. \end{aligned}$$

19. Докажи дека бројот $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ пати}}$ е производ на два последователни

природни броја.

Решение. За дадениот број имаме

$$\begin{aligned} \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ пати}} &= \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{000\dots000}_{100 \text{ пати}} + \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ пати}} \\ &= \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} (\underbrace{999\dots999}_{100 \text{ пати}} + 1) + 2 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \\ &= \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} (9 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} + 1) + 2 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}}. \end{aligned}$$

Ако ставиме $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} = x$, тогаш добиваме

$$\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ пати}} = x(9x + 1) + 2x = 9x^2 + 3x = 3x(3x + 1).$$

Броевите $3x$ и $3x+1$ се последователни природни броеви, што значи $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ пати}}$ е производ на два последователни природни броеви.

20. Докажи дека за секој природен број n бројот $2^n + 3^{n+3}$ не е квадрат на ниту еден природен број.

Решение. Степените од облик 2^n се: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., што значи дека за цифрата на единиците на степените имаме периодично менување на цифрите 2, 4, 8, 6. Слично, за цифрата на единиците на степените од облик 3^{n+3} имаме периодично менување на цифрите 1, 3, 9, 7. Според тоа, цифрата на единиците на бројот $2^n + 3^{n+3}$ може да биде или 3 или 7. Меѓутоа квадрат на природен број може да има цифра на единици 0, 1, 4, 6, 5 или 9, па затоа за секој природен број n бројот $2^n + 3^{n+3}$ не е квадрат на природен број.

21. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат n различни природни броеви, такви што збирот на нивните квадрати е квадрат на природен број.

Решение. Нека $n \geq 2$ е произволен природен број, $a_1 \geq 3$ е произволен непарен број, а $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ се произволни парни броеви, такви што $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1}$. Тогаш,

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 2k + 1,$$

за некој природен број k . Ако избереме $a_n = k$, тогаш

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Покрај тоа, од

$$(a_{n-1} - 1)^2 \geq (3 - 1)^2 > 2$$

се добива дека

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2 + (a_{n-1} - 1)^2 > 2,$$

што е еквивалентно со

$$a_n = k = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 1 \right) > a_{n-1},$$

па сите броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ се меѓусебно различни.

22. Магдалена во 1986 година имала толку години колку што изнесува збирот на цифрите од годината на нејзиното раѓање. Колку години имала Магдалена во 1986 година?

Решение. Годината на раѓање на Магдалена е $1900 + 10x + y$. Според условот имаме $1986 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y$, односно $76 = 11x + 2y$. Но, x и y се природни броеви помали или еднакви на 9. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $x = 6$, $y = 5$. Според тоа, Магдалена е родена во 1965 година и во 1986 година таа имала 21 година.

23. Најди ги цифрите x, y, z за кои важи $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$.

Решение. Дадената равенка ја множиме со $1000(x+y+z)$ и ја добиваме равенката $1000 = (x+y+z)\overline{xyz}$, каде $x+y+z \leq 27$, $\overline{xyz} \leq 999$ и $x+y+z < \overline{xyz}$. При дадените ограничувања бројот 1000 може да се запише како производ:

$2 \cdot 500, 4 \cdot 250, 8 \cdot 125, 10 \cdot 100, 20 \cdot 50$ и $25 \cdot 40$. Од наведените случаи само производот $8 \cdot 125$ ги задоволува условите и притоа имаме $\frac{1}{1+2+5} = 0,125$.

24. Во текот на петгодишното студирање Киро положил 31 испит. Тој секоја година полагал повеќе испити од претходната, а петтата година положил три пати повеќе испити отколку првата. Колку испити положил Киро во четвртата година?

Решение. Нека a, b, c, d, e се бројот на положени испити од првата до петтата година соодветно. Тогаш, $a < b < c < d < e$, $a + b + c + d + e = 31$ и $e = 3a$. Ако $a \geq 4$, тогаш $b \geq a + 1 \geq 5$, $c \geq b + 1 \geq 6$, $d \geq c + 1 \geq 7$, $e = 3a \geq 12$, па $a + b + c + d + e \geq 34 > 31$, што не е возможно. Ако $a = 1$, тогаш $e = 3$, па не постојат природни броеви b, c, d така што $1 < b < c < d < 3$. Ако $a = 2$, тогаш $e = 6$, па од $2 < b < c < d < 6$ следи дека $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, односно $a + b + c + d + e = 20 \neq 31$, кое исто така не е возможно. Значи, $a = 3$ и $e = 9$. Ако $d \leq 7$, тогаш $c \leq 6$, $b \leq 5$, па $a + b + c + d + e \leq 30 < 31$. Значи, мора $d = 8$. Ова е можно, на пример за $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 8$, $e = 9$ или $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 9$.

25. Даден е трицифрен број. Со разместување на неговите цифри ги добиваме сите трицифрени броеви запишани со истите цифри. Збирот на сите овие броеви е еднаков на 1988. Со кои цифри е запишан дадениот трицифрен број? Најди ги сите решенија.

Решение. Дадениот број може да има три различни цифри, или две еднакви, а третата да е различна, при што во секој случај цифрите се различни од нула.

а) Ако цифрите се различни, да кажеме a, b, c , тогаш ги добиваме броевите $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$. Ако броевите ги запишеме во развиена форма, тогаш од условот на задачата добиваме

$$222(a + b + c) = 1988, \text{ т.е. } a + b + c = 9.$$

Но, a, b, c се различни цифри, па со непосредна проверка од последната равенка добиваме дека бројот може да се запише со цифрите: 1, 2, 6 или 1, 3, 5 или 2, 3, 4.

б) Ако бројот има две исти цифри a, b , тогаш ги добиваме броевите $\overline{aab}, \overline{aba}, \overline{baa}$. Ако броевите ги запишеме во развиена форма, тогаш од условот на задачата добиваме

$$222a + 111b = 1998, \text{ т.е. } 2a + b = 18.$$

Но, a, b се различни цифри, па со непосредна проверка од последната равенка добиваме дека бројот може да се запише со цифрите: 5, 5, 8 или 7, 7, 4 или 8, 8, 2.

26. Некој трицифрен број се зголемува за 45, ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а истиот се намалува за 270 ако цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи ако цифрите на единиците и стотките ги заменат местата?

Решение. Нека бројот е $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Тогаш со замена на цифрите на десетките и единиците се добива $100a + 10b + c + 45 = 100a + 10c + b$, односно $b - c + 5 = 0$, а со замена на цифрите на десетките и стотките се добива $100a + 10b + c - 270 = 100b + 10a + c$, односно $a - b - 3 = 0$. Ако ги собереме равенствата $b - c + 5 = 0$ и $a - b - 3 = 0$ добиваме $a - c + 2 = 0$, т.е. $a - c = -2$.

Ако цифрите на стотките и единиците ги заменат местата добиваме

$$100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c) = 99 \cdot (-2) = -198,$$

што значи дека во овој случај бројот се зголемува за 198.

27. Најди двоцифрен број кој е еднаков на збирот на кубот на цифрата на десетките и квадратот на цифрата на единиците со кои е запишан.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{ab}$, $a \neq 0$. Од условот на задачата следува $10a + b = a^3 + b^2$, т.е. $10a - a^3 = b^2 - b$, од каде добиваме

$$a(10 - a^2) = b(b - 1) \text{ и } a \in \{1, 2, 3\}.$$

За $a = 1$ добиваме $9 = b(b - 1)$, а за $a = 3$ добиваме $3 = b(b - 1)$. Од друга страна $b(b - 1)$ е производ на два последователни едноцифрени броеви, а тоа не се 9 и 3. Значи, $a \neq 1$ и $a \neq 3$. За $a = 2$ имаме $12 = b(b - 1)$, од каде добиваме $b = 4$. Конечно, бараниот број е 24.

28. За природните броеви a, b, c, d се исполнети равенствата $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}$.

Докажи дека $a = c$ и $b = d$.

Решение. Бидејќи $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, постои рационален број α таков што $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1} = \alpha$. Тогаш $a = \alpha c$, $b = \alpha d$ и $ab + 1 = \alpha(cd + 1)$. Ако во последното равенство замениме $a = \alpha c$ и $b = \alpha d$, последователно добиваме

$$\begin{aligned} \alpha^2 cd - \alpha cd - \alpha + 1 &= 0 \\ \alpha cd(\alpha - 1) - (\alpha - 1) &= 0 \\ (\alpha - 1)(\alpha cd - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Можни се два случаи:

а) $\alpha - 1 = 0$, т.е. $\alpha = 1$. Тогаш $a = c$, $b = d$.

б) $\alpha cd - 1 = 0$ и тогаш добиваме $(\alpha c)d - 1 = 0$, т.е. $ad = 1$. Бидејќи $a, d \in \mathbb{N}$, последното равенство е можно ако и само ако $a = d = 1$. Но, тогаш $\frac{1}{c} = \frac{b}{1}$, односно $bc = 1$. Повторно, бидејќи $b, c \in \mathbb{N}$, добиваме $b = c = 1$. Значи, во овој случај $a = b = c = d = 1$.

29. Дали е можно збирот $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$, $n \in \mathbb{N}$ да завршува на цифрите 2012? Одговорот да се образложи.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 2[1 + 2 + \dots + (n - 1) + n] &= \underbrace{(n + 1) + (n - 1 + 2) + \dots + (n - 1 + 2) + (n + 1)}_{n \text{ собирци}} \\ &= \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1)}_{n \text{ собирци}} = n(n + 1) \end{aligned}$$

па затоа $1+2+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Ако збирот завршува на цифрите 2012, тогаш производот $n(n+1)$ завршува на цифрата 4, што не е можно бидејќи производ на два последователни природни броја завршува на една од цифрите 0, 2 или 6.

30. Збирот на сите природни броеви од 1 до n е еднаков на трицифрен број со еднакви цифри. Колку природни броеви се собрани?

Решение. Го користиме познатото равенство $1+2+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Да ја означиме со k цифрата на едениците (десетките и стотките) на добиениот трицифрен број.

Јасно, $\frac{n(n+1)}{2}=111k$, т.е. $n(n+1)=222k=6\cdot 37k$. Левата страна на последното равенство е производ на два последователни броја чија цифра на единиците може да биде 0, 2 или 6. Понатаму, $222k=6\cdot 37k$ завршува на 0, 2 или 6 ако и само ако цифрата k е 0, 1, 3, 5, 6 или 8. Јасно, $k=0$, не е можно. Понатаму, за $k=1$ имаме $n(n+1)=6\cdot 37$, што не е можно. За $k=3$ имаме $n(n+1)=18\cdot 37$, што не е можно. За $k=5$ имаме $n(n+1)=30\cdot 37$, што не е можно. За $k=6$ имаме $n(n+1)=36\cdot 37$ и тоа е едно решение. За $k=8$ имаме $n(n+1)=48\cdot 37$, што не е можно. Конечно, единствено решение е $k=6$, што значи дека сме собрале $n=36$ природни броеви, при што добиениот збир е $\frac{n(n+1)}{2}=666$.

31. Најди шестцифрен број чиј производ со 2, со 3, со 4, со 5 и со 6 повторно е шестцифрен број запишан со истите цифри како и почетниот број.

Решение. Со n да го означиме бараниот број. Бројот n почнува со цифрата 1, бидејќи во спротивно $6n$ нема да биде шестцифрен број. Понатаму, првите цифри на броевите $n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n$ се сите различни од нула и сите се меѓу себе различни. Навистина, ако два броја почнуваат со иста цифра, на пример $4n$ и n , тогаш бројот $3n=4n-n$ е петцифрен број, што не е можно. Според тоа, почетните цифри на броевите $n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n$ се точно цифрите на бараниот број (ги има шест и се различни меѓу себе). Од досега изнесеното следува дека крајните цифри на $n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n$ се различни и дека меѓу нив нема 0. Јасно, последната цифра на n не е парна, бидејќи во тој случај $5n$ ќе завршува на 0. Но, последната цифра на n не е 5, бидејќи во тој случај $2n$ ќе завршува на 0, а не е ниту 1 бидејќи тоа е првата цифра. Понатаму, крајната цифра на n не е ниту 3, бидејќи во тој случај ниту еден од броевите $2n, 3n, 4n, 5n, 6n$ нема да завршува на 1. Значи, крајната цифра на n мора да биде 7 и во тој случај имаме

$$\begin{aligned} n &= 1****7, \quad 2n = *****4, \quad 3n = *****1, \\ 4n &= *****8, \quad 5n = *****5 \quad \text{и} \quad 6n = *****2, \end{aligned}$$

од што следува дека бројот n е запишан со цифрите 7, 4, 1, 8, 5 и 2.

За да го определиме бројот n , ќе го определиме збирот на разгледуваните шест броја на два начина. Најпрвин

$$n + 2n + 3n + 4n + 5n + 6n = 21n.$$

Од друга страна, бидејќи збирот на цифрите со кои се запишани броевите е

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$$

добиваме дека збирот на шесте броеви е

$$27 \cdot 10^5 + 27 \cdot 10^4 + 27 \cdot 10^3 + 27 \cdot 10^2 + 27 \cdot 10 + 27 = 2999997,$$

па затоа $21n = 2999997$, т.е. $n = 142857$.

32. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека, ако бројот $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ е цел број, тогаш тој е полн квадрат.

Решение. Нека $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = k \in \mathbf{Z}$, тогаш $a^2b + b^2 - a = kab$, од каде следува дека $b | a$, па нека $a = bq, q > 0, q \in \mathbf{Z}$. Со замена во последното равенство и по делењето со b се добива $b^2q^2 + b - q = kbq$, од каде следува дека $q | b$, па нека $b = qt, t > 0, t \in \mathbf{Z}$. Со замена во последното равенство и по делењето со q , се добива $q^3t^2 + t - 1 = kqt$, од каде следува дека $t | 1$, па заклучуваме дека $t = 1$. Со замена добиваме $b = q \Rightarrow a = b^2 \Rightarrow k = b^2$.

33. Да се определат сите природни броеви n за кои вредноста на дробката $\frac{24}{3n-4}$ е исто така природен број.

Решение. Дробката $\frac{24}{3n-4}$ е природен број ако и само ако $(3n-4) | 24$, т.е. ако и само ако

$$3n - 4 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Но, тогаш

$$3n \in \{5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 28\}$$

и од тоа што n е природен број добиваме дека $3n$ може да биде само 6 или 12, па затоа $n = 2$ или $n = 4$.

34. Најди ги сите целобројни вредности на бројот a , за кои изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$\frac{2a-5}{a+2} = \frac{2a+4-9}{a+2} = \frac{2(a+2)-9}{a+2} = 2 - \frac{9}{a+2},$$

па затоа изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број ако и само ако $(a+2) | 9$, од што следува дека $a+2 \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$, т.е. $a \in \{-11, -5, -3, -1, 1, 7\}$.

35. За кои вредности на n , изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број?

Решение. Бидејќи

$$\frac{n^2+1}{n+2} = \frac{n^2-4+5}{n+2} = \frac{(n-2)(n+2)+5}{n+2} = n - 2 + \frac{5}{n+2},$$

добиваме дека изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број ако и само ако $\frac{5}{n+2}$ е цел број, односно $(n+2) | 5$, т.е. ако и само ако $n+2 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, што значи ако и само ако

$$n \in \{-7, -3, -1, 3\}.$$

36. Да се определат сите цели броеви a за кои изразот $\frac{a^2+1}{a-1}$ е исто така цел број.

Решение. Имаме $\frac{a^2+1}{a-1} = \frac{a^2-1+2}{a-1} = \frac{(a-1)(a+1)+2}{a-1} = a+1 + \frac{2}{a-1}$, па затоа дадениот израз е цел број ако и само ако 2 се дели со $a-1$, т.е. ако и само ако $a-1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Според тоа, решение е $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$.

37. Да се определат сите природни броеви n , такви што $5^{n-1} + 3^{n-1}$ е делител на $5^n + 3^n$.

Решение. За произволен природен број $n \in \mathbf{N}$, имаме

$$5(5^{n-1} + 3^{n-1}) = 5^n + (3+2)3^{n-1} = 5^n + 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} > 5^n + 3^n.$$

Според тоа $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}} < 5$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Од друга страна, на сличен начин

$$3(5^{n-1} + 3^{n-1}) = 3 \cdot 5^{n-1} + 3^n < 5^n + 3^n,$$

па според тоа $3 < \frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}$ за секој $n \in \mathbf{N}$.

Бидејќи $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}} \in \mathbf{N}$ и $3 < \frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}} < 5$ се добива $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}} = 4$. Последната равенка е еквивалентна со $5^{n-1} = 3^{n-1}$, од каде следува $n = 1$.

38. Најди ги сите цели броеви n за кои $(n+1)|(n^2+1)$.

Решение. Нека n е цел број таков што $(n+1)|(n^2+1)$. Од равенството

$$n^2+1 = (n-1)(n+1)+2$$

следува дека $(n+1)|2$, па затоа $n+1 = \pm 1, \pm 2$, т.е. бараните броеви се $-3, -2, 0, 1$.

39. Најди ги сите цели броеви n за кои бројот $n^3 - 8n^2 + 2n$ е делив со $n^2 + 1$.

Решение. Од равенството $n^3 - 8n^2 + 2n = (n^2 + 1)(n - 8) + (n + 8)$ следува дека $(n^2 + 1)|(n + 8)$. Очигледно $n = -8$ е едно решение. Нека $n + 8 \neq 0$. Од $(n^2 + 1)|(n + 8)$ следува дека $n^2 + 1 \leq |n + 8|$, т.е. $n^2 + 1 \leq -n - 8$ или $n^2 + 1 \leq n + 8$. Првиот случај не е можен бидејќи $n^2 + n + 9 > 0$, за секој $n \in \mathbf{Z}$, а од вториот следува дека $n^2 - n - 7 \leq 0$, од што добиваме дека n е некој од броевите $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Со непосредна проверка се добива дека само броевите 0 и 2 го имаат бараното својство. Конечно решенија на задачата се $-8, 0, 2$.

40. Најди го најголемиот четирицифрен број таков да кога ќе му се додаде збирот на неговите цифри се добие број делив со 2004.

Решение. Најголемиот број кој може да се добие кога на четирицифрен број ќе му се додаде збирот на неговите цифри е бројот

$$9999 + 9 + 9 + 9 + 9 = 10035.$$

Четирицифрени броеви помали од 10036 и деливи со 2004 се 2004, 4008, 6012, 8016 и 10020. Ако бараниот број е $\overline{999x}$, тогаш

$$10020 = \overline{999x} + 9 + 9 + 9 + x = 10017 + 2x,$$

т.е. $x = 1,5$ што не е можно. А исто така не може да биде 8016, 6012, 4008 и 2004. Ако бараниот број е $\overline{999x}$, тогаш

$$10020 = \overline{998x} + 9 + 9 + 8 + x = 10006 + 2x,$$

и тогаш $x = 7$, па затоа бараниот број е 9987.

41. Докажи дека разликата на произволен четирицифрен број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед е делива со 9.

Решение. Нека $\overline{xyzt}$ е произволен четирицифрен број. Тој може да се запише на следниов начин

$$\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t.$$

Бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е

$$\overline{tzyx} = 1000t + 100z + 10y + x.$$

За нивната разлика имаме

$$\begin{aligned}\overline{xyzt} - \overline{tzyx} &= 1000x + 100y + 10z + t - 1000t - 100z - 10y - x \\ &= 999x + 90y - 90z - 999t = 9(111x + 10y - 10z - 111t),\end{aligned}$$

па затоа $9 | (\overline{xyzt} - \overline{tzyx})$.

42. Докажи дека разликата на произволен трицифрен број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед е делива со 9 и 11.

Решение. Нека $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ е произволен трицифрен број. Бројот запишан со истите цифри, во обратен редослед е $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$. За разликата се добива $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99(x - z)$. Од $9 | 99$ и $11 | 99$ следува дека $9 | (\overline{xyz} - \overline{zyx})$ и $11 | (\overline{xyz} - \overline{zyx})$.

43. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 27. Докажи дека збирот на дадениот број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 27.

Решение. Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број со бараното својство, т.е. таков да $a + b + c + d = 27$. Имаме

$$\begin{aligned}S &= \overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001(a + d) + 110(b + c) \\ &= 110(a + d) + 110(b + c) + 891(a + d) \\ &= 110(a + b + c + d) + 891(a + d) \\ &= 110 \cdot 27 + 27 \cdot 33(a + d) = 27[110 + 33(a + d)],\end{aligned}$$

што значи дека $27 | S$, што и требаше да се докаже.

44. Нека за двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи $\overline{ab} = 5\overline{cd}$. Докажи дека бројот $\overline{abcd}$ се дели со 3.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 500\overline{cd} + \overline{cd} = 501\overline{cd}$$

и бидејќи $3 \mid 501$ добиваме дека $3 \mid \overline{abcd}$.

45. За природниот број велиме дека е *палиндром* ако со запишување на цифрите во обратен редослед се добива истиот број. Најди го најголемиот петцифрен палиндром кој е делив со 101.

Решение. Треба да најдеме најголема цифра a така да бројот $\overline{abcba}$ е делив со 101. Да забележиме дека

$$\begin{aligned}\overline{abcba} &= 10001a + 1010b + 100c = 9999a + 1010b + 101c + 2a - c \\ &= 101(99a + 10b + c) + 2a - c.\end{aligned}$$

Бидејќи a и c се цифри, бројот на десната страна во последното равенство е делив со 101 ако и само ако $2a - c = 0$. Најголема цифра a за која е исполнето ова равенство е $a = 4$ и притоа $c = 8$. Но, бараме најголем број, па затоа $b = 9$ и добиваме дека бараниот број е 49894.

46. Збирот на седум последователни цели броеви е делив со 7. Докажи!

Решение. Седум последователни цели броеви се од облик

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6,$$

а нивниот збир е

$$\begin{aligned}A &= n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) \\ &= 7n + (1+2+3+4+5+6) \\ &= 7n + 3 \cdot 7 = 7(n+3).\end{aligned}$$

Според тоа, $7 \mid A$.

47. Збирот на осум последователни цели броеви не е делив со 8. Докажи!

Решение. Осум последователни цели броеви се од облик

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7.$$

Нивниот збир е

$$\begin{aligned}A &= n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) + (n+7) \\ &= 8n + (1+2+3+4+5+6+7) \\ &= 8n + 3 \cdot 8 + 4 = 8(n+3) + 4.\end{aligned}$$

Јасно е дека остатокот при делење на A со 8 е 4, т.е. $8 \nmid A$.

48. Докажи дека збирот на $2n+1$ последователни природни броеви е делив со $2n+1$.

Решение. Нека $k, k+1, k+2, \dots, k+2n$ се $2n+1$ последователни природни броеви. Тогаш за нивниот збир важи

$$\begin{aligned}k + (k+1) + (k+2) + \dots + (k+2n) &= k(2n+1) + (1+2+3+\dots+2n) \\ &= k(2n+1) + \frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= (2n+1)(k+n),\end{aligned}$$

од што следува тврдењето на задачата.

49. Нека $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека бројот $n^2 + 8n + 15$ не се дели со бројот $n + 4$.

Решение. Имаме

$$n^2 + 8n + 15 = (n + 4)^2 - 1 = (n + 5)(n + 3) = (n + 3)(n + 4) + (n + 3),$$

од што следува дека при делење на бројот $n^2 + 8n + 15$ со $n + 4$ се добива остаток $n + 3$, што значи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $n^2 + 8n + 15$ не се дели со бројот $n + 4$.

50. Докажи дека $37 \mid (333^{2003} + 555^{2003})$.

Решение. Од тоа што $37 \mid 333$ и $37 \mid 555$ следува дека $37 \mid 333^{2003}$ и $37 \mid 555^{2003}$, па затоа $37 \mid (333^{2003} + 555^{2003})$.

51. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $12 \mid (3^n + 3^{n+1})$.

Решение. Од тоа што

$$3^n + 3^{n+1} = 3^n + 3^n \cdot 3 = 3^n(1 + 3) = 4 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} = 12 \cdot 3^{n-1}$$

и $3^{n-1} \in \mathbf{N}$, за секој $n \in \mathbf{N}$, следува дека $12 \mid (3^n + 3^{n+1})$.

52. Докажи дека $39 \mid (3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Имаме

$$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n(1 + 3 + 3^2) = 13 \cdot 3^n = 39 \cdot 3^{n-1}$$

и бидејќи $3^{n-1} \geq 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека $39 \mid (3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

53. Докажи дека $584 \mid (8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Имаме

$$8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2} = 8^n(1 + 8 + 8^2) = 73 \cdot 8^n = 584 \cdot 8^{n-1}$$

и бидејќи $8^{n-1} \geq 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека $584 \mid (8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

54. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ се дели со 10.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n 3^2 + 3^n - (2^n 2^2 + 2^n) \\ &= 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10(3^n - 2^{n-1}), \end{aligned}$$

и бидејќи $3^n - 2^{n-1} \in \mathbf{N}$ од последното равенство следува дека 10 е делител на $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$.

55. Докажи дека за секој природен број n важи $7|(8^n - 14n - 1)$.

Решение. Ако го искористиме равенството

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

во чија точност можеме да се убедиме со непосредна проверка, добиваме

$$8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1) = 7(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1),$$

па затоа за секој природен број n важи $7|(8^n - 1)$ и уште $7|14n$. Од последните две тврдења следува дека $7|(8^n - 14n - 1)$.

56. Докажи дека за секој природен број n важи $19|(7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n)$.

Решение. Ако го искористиме идентитетот

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

во чија точност можеме да се убедиме со непосредна проверка, добиваме

$$\begin{aligned} 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n &= 7 \cdot (5^2)^n + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n \\ &= 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n = 7(25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n \\ &= 7(25 - 6)(25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) + 19 \cdot 6^n \\ &= 7 \cdot 19(25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) + 19 \cdot 6^n, \end{aligned}$$

од каде следува дека $19|(7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n)$, за секој природен број n .

57. Докажи дека за секој природен број n важи $17|(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1})$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} &= (6^2)^n + 19^n - 2 \cdot 2^n = 36^n - 19^n + 2 \cdot 19^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 36^n - 19^n + 2(19^n - 2^n). \end{aligned}$$

Понатаму, слично како во претходната задача, лесно се проверува дека $17|(36^n - 19^n)$ и $17|(19^n - 2^n)$, па затоа $17|(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1})$.

58. Докажи дека $10|(7^{100000} - 1)$.

Решение. Производот на два броја кои завршуваат на цифрата 1 повторно завршува на цифрата 1, бидејќи

$$(10m + 1)(10n + 1) = 100mn + 10m + 10n + 1 = 10(10mn + m + n) + 1.$$

Бидејќи

$$7^{100000} = (7^4)^{25000} = 2401^{25000},$$

заклучуваме дека бројот 7^{100000} завршува на цифрата 1, па затоа бројот $7^{100000} - 1$ завршува на цифрата 0, што значи $10|(7^{100000} - 1)$.

59. Докажи дека за секој природен број n бројот

$$1^{1995} + 2^{1995} + 3^{1995} + \dots + n^{1995}$$

не се дели со $n + 2$.

Решение. Ако искористиме дека за секој природен број k и за секои броеви a и b важи

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

добиваме

$$\begin{aligned} 2(1^{1995} + 2^{1995} + \dots + n^{1995}) &= 2 + (2^{1995} + n^{1995}) + (3^{1995} + (n-1)^{1995}) \\ &\quad + \dots + ((n-1)^{1995} + 3^{1995}) + (n^{1995} + 2^{1995}) \\ &= 2 + (n+2)M. \end{aligned}$$

Конечно, тврдењето на задачата следува од последното равенство. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

60. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека $a^2 + ab + b^2$ е делител на бројот $(a+b)^6 - a^6$.

Решение. Од формулите за скратено множење

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3), \\ x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \text{ и} \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2), \end{aligned}$$

следува

$$\begin{aligned} (a+b)^6 - a^6 &= [(a+b)^3 + a^3][(a+b)^3 - a^3] \\ &= [(a+b) + a][(a+b)^2 + a(a+b) + a^2] \cdot \\ &\quad \cdot [(a+b) - a][(a+b)^2 - a(a+b) + a^2] \\ &= b(2a+b)(a^2 + ab + b^2)(3a^2 + 3ab + b^2), \end{aligned}$$

што значи $(a^2 + ab + b^2) | (a+b)^6 - a^6$, што и требаше да се докаже.

61. Определи природни броеви a и b за кои:

- 1) производот $ab(a+b)$ не е делив со 7,
- 2) бројот $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ е делив со 7^7 .

Решение. Изразот $A = (a+b)^7 - a^7 - b^7$, го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} A &= 7ab[(a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a+b)] \\ &= 7ab(a+b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) \\ &= 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2. \end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи производот $ab(a+b)$ не е делив со 7, од последното равенство следува дека $7 | (a^2 + ab + b^2)$, па од условот 2) добиваме

$$a^2 + ab + b^2 = 7^3 k.$$

За $k=1$ и $b=1$ добиваме $a^2 + a + 1 = 343$, т.е.

$$(a-18)(a+19) = 0,$$

од каде што добиваме $a = 18$ и $a = -19$. Според тоа, $a = 18$, $b = 1$ е еден пар природни броеви кој го задоволува условот на задачата.

62. Ако a, b, c се природни броеви такви да $a^2 + b^2 = c^2$, тогаш еден од броевите a, b, c е делив со 5. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите a, b не е делив со 5, т.е. дека тоа се броеви од облик $5m \pm 1$ или $5n \pm 2$. Тогаш a^2 и b^2 се од облик $5k + 1$ или $5k + 4$. Ако a^2 е од облик $5k + 1$, а b^2 е од облик $5n + 4$, тогаш $c^2 = a^2 + b^2 = 5(k + n + 1)$, што значи $5 | c^2$, па затоа $5 | c$. Ако a^2 и b^2 се од облик $5k + 1$, тогаш $a^2 + b^2$ е од облик $5p + 2$, што не е можно, бидејќи c^2 мора да е од облик $5p + 1$ или $5p + 4$. Слично, ако a^2 и b^2 се од облик $5k + 4$, тогаш $a^2 + b^2$ е од облик $5p + 3$, што повторно не е можно. Значи, не е можно сите три броја a, b, c да не се деливи со 5.

63. Најди ја последната цифра на бројот $a = 5^n + 6^n + 7^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Бројот 5^n секогаш завршува на цифрата 5, а бројот 6^n се когаш завршува на цифрата 6. Според тоа, бројот $5^n + 6^n$ секогаш завршува на цифрата 1. Лесно се гледа дека последната цифра на бројот 7^n периодично се повторува и тоа: 7, 9, 3, 1, 7, 9, ... Според тоа, последната цифра на бројот a е: 8 за $n = 4k + 1$, 0 за $n = 4k + 2$, 4 за $n = 4k + 3$ или 2 за $n = 4k$.

64. Квадратот на некој природен број има облик $\overline{\dots x09}$. Докажи дека цифрата x е парна.

Решение. Нека претпоставиме дека цифрата x е непарна. Тогаш

$$n^2 = \overline{\dots x09} = 200a + 109 = 8 \cdot 25a + 8 \cdot 13 + 5 = 8m + 5, \quad (1)$$

што значи дека n^2 при делење со 8 дава остаток 5. Но, бројот n^2 е непарен, па затоа $n = 2k + 1$, од што следува дека

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1 = 8p + 1,$$

што противречи на равенството (1). Од добиената противречност следува дека цифрата x не е непарна, т.е. таа е парна, што може да се види ако се земе квадратот на секој број од видот $n = \overline{\dots 03}$.

65. Најди четирицифрен број $\overline{abcd}$ таков да $\overline{abcd} = (5c + 1)^2$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$1000a + 100b + 10c + d = 25c^2 + 10c + 1$$

$$25(40a + 4b - c^2) = 1 - d$$

Левата страна на последното равенство е делива со 25, па мора $1 - d$ да се дели со 25, а тоа е можно само ако $d = 1$. Тогаш важи $40a + 4b - c^2 = 0$,

односно $4(10a+b)=c^2$, што значи дека c^2 се дели со 4. Но, a, b, c се цифри и $a \neq 0$, па затоа $4(10a+b) > 40$ и оттука следува дека $c^2 = 64$, т.е. $c = 8$. Значи, $10a+b=16$, па затоа $a=1, b=6$ и бараниот број е $\overline{abcd} = 1681$.

66. Најди четирицифрен број кој е еднаков на квадратот на бројот запишан со неговите последни две цифри (во ист редослед).

Решение. Од условот на задачата добиваме $\overline{abcd} = \overline{cd}^2$, т.е.

$$1000a + 100b + 10c + d = (10c + d)^2$$

$$100(10a + b) = (10c + d)^2 - (10c + d).$$

Ако во последното равенство воведеме замена $10c + d = k$, $k < 100$, добиваме $100(10a + b) = k^2 - k$, т.е. $100(10a + b) = k(k-1)$. Според тоа, производот $k(k-1)$ мора да е делив со 100, што е можно ако од двата последователни броја помали од 100 едниот е делив со 4, а другиот со 25. Постојат само две можности: или $k = 25$ или $k = 76$.

- 1) Ако $k = 25$, т.е. $100(10a + b) = 25 \cdot 24$, тогаш $10a + b = 6$, од каде следува $a = 0$, што противречи на фактот дека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број.
 2) Ако $k = 76$, т.е. $100(10a + b) = 75 \cdot 76$, тогаш $10a + b = 57$, од каде следува $a = 5$ и $b = 7$. Но, тогаш $76 = 10c + d$, па затоа $c = 7$ и $d = 6$. Според тоа, во овој случај решение е бројот $\overline{abcd} = 5776 = 76^2$.

67. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{xyz}$ чии цифри се различни и различни од нула и такви да $\overline{xyz} : z = \overline{yz}$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $\overline{xyz} = \overline{yz} \cdot z$, од каде е јасно дека $z = 1, z = 5$ или $z = 6$. Ако $z = 1$, тогаш од $\overline{xy1} = \overline{y1} \cdot 1$ следува дека $x = 0$, што противречи на условот. Ако $z = 5$, тогаш ја добиваме равенката $\overline{xy5} = \overline{y5} \cdot 5$, т.е. $100x + 10y + 5 = 5(10y + 5)$, која е еквивалентна со равенката $5x = 2y + 1$. Значи, $x < 4$. За $x = 1$ имаме $y = 2$, за $x = 2$ нема решение и за $x = 3$ добиваме $y = 7$, па затоа во овој случај решенија се $5 \cdot 25 = 125$ и $5 \cdot 75 = 375$. Ако $z = 6$, тогаш ја добиваме равенката $\overline{xy6} = \overline{y6} \cdot 6$, т.е. $100x + 10y + 6 = 6(10y + 6)$, која е еквивалентна со равенката $10x - 5y = 3$. Последната равенка нема решение бидејќи нејзината лева страна се дели со 5, а десната страна на оваа равенка не се дели со 5.

68. Ирина замислила еден број, од десно го допишала бројот 2 и на така добиениот број му додала 14. На новодобиениот број од десно му допишала 3 и потоа додала 52. Кога така добиениот број го поделила со 60, добила количник за 6 поголем од замислениот број, а остаток двоцифрен број запишан со исти цифри и тоа такви што бројот на десетките е еднаков на замислениот број. Кој број го замислила Ирина?

Решение. Бидејќи како остаток од делењето цифрата на десетките е еднаква на замислениот број, добиваме дека замислениот број е едноцифрен. Да го означиме со a . Тогаш Ирина, постапувајќи на опишаниот начин, последователно ги добивала броевите:

$$10a + 2, 10a + 2 + 14, (10a + 2 + 14) \cdot 10 + 3, (10a + 2 + 14) \cdot 10 + 3 + 52.$$

Остатокот од делењето со 60 е $10a + a = 11a$, па ја добиваме равенката

$$(10a + 2 + 14) \cdot 10 + 3 + 52 = 60(a + 6) + 11a$$

чије решение е $a = 5$. Значи, Ирина го замислила бројот 5.

69. Ако еден број се подели со 63 се добива количник n и остаток 59. Колкав ќе биде остатокот при делење на тој број со 21?

Решение. Дадениот број можеме да го запишеме во облик $63n + 59$. Од тука $(63n + 59) : 21$ дава колични $3n + 2$ и остаток 17.

70. Ако изразот $n + 100$, каде $n \in \mathbb{N}$, при делење со 23 има остаток 17, кој е остатокот кога бројот n ќе се подели со 23?

Решение. При делење на 100 со 23 добиваме остаток 8. Ако бројот n поделен со 23 дава остаток m , тогаш бројот $n + 100$ поделен со 23 дава остаток $8 + m$, односно 17. Значи, $8 + m = 17$, па затоа $m = 9$, што значи дека при делење на n со 23 се добива остаток 9.

71. Со делење на некој природен број со бројот 72 се добива количник n и остаток 68. Најди ги количникот и остатокот кога дадениот број ќе се подели со 24.

Решение. Дадениот број може да се запише во облик $72n + 68$. Понатаму, од $72n = 24 \cdot 3n$ и $68 = 24 \cdot 2 + 20$ добиваме $72n + 68 = 24(3n + 2) + 20$, што значи дека при делење со 24 се добива количник $3n + 2$ и остаток 20.

72. Најди го најголемиот трицифрен број кој при делење со 18 има остаток 11.

Решение. Бараниот број е од видот $18a + 11$. Најголем трицифрен број е 999 и важи $999 = 18 \cdot 55 + 9$. Но, $990 = 18 \cdot 55$ и $972 = 18 \cdot 54$, па затоа $18 \cdot 54 + 11 = 983$. Значи, бараниот најголем трицифрен број кој при делење со 18 дава остаток 11 е 983.

73. Ако бројот 1000 го поделиме со некој број, добиваме остаток 8, а ако 900 го поделиме со истиот број добиваме остаток 1. Кој количник е добиен во првиот, а кој во вториот случај?

Решение. Нека со a го означиме непознатиот делител, а со m и n количниците. Од првиот услов добиваме $am + 8 = 1000$, а од вториот $an + 1 = 900$. Одземајќи ги последните две равенства добиваме $a(m - n) = 93$. Бидејќи $93 = 3 \cdot 31$ и $a > 8$ можни се два случаја: $a = 93$, $m - n = 1$ или $a = 31$, $m - n = 3$. За $a = 93$, $m - n = 1$ добиваме противречност, а за $a = 31$ добиваме $m = 32$ и $n = 29$.

74. Ако 1600 го поделиме со некој број, добиваме остаток 1, а ако 1450 го поделиме со истиот тој број, добиваме остаток 7. Кој количник го добиваме во првиот, а кој во вториот случај?

Решение. Нека првиот количник е x , а вториот е y . Тогаш $1600 = nx + 1$ и $1450 = ny + 7$, што значи дека $nx = 1599$ и $ny = 1443$. Значи, n е заеднички делител на броевите 1599 и 1443 и е поголем од 7. Заеднички делители на броевите 1599 и 1443 се 1, 3, 13 и 39 и бидејќи тие треба да се поголеми од 7 добиваме дека $n = 13$ или $n = 39$. За $n = 13$ важи $x = 123$, $y = 111$, а за $n = 39$ важи $x = 41$, $y = 37$.

75. Најди четирицифрен природен број кој при делење со 151 дава остаток 40, а при делење со 152 дава остаток 27.

Решение. Нека n е бараниот четирицифрен број. Од $n = 152k + 27$ следува $6 < k < 66$. Понатаму, од $n = 152k + 27 = 151m + 40$ и фактот дека n е природен број следува $m \geq k$ и $k - 13 = 151(m - k)$. Ако е $m - k \neq 0$, имаме $k - 13 \geq 151$, т.е. $k \geq 164$, што противречи на $6 < k < 66$. Значи, $m = k$ и $k - 13 = 0$, т.е. $k = 13$. Значи, бараниот број е

$$n = 151 \cdot 13 + 40 = 152 \cdot 13 + 27 = 2003.$$

76. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се последователни природни броеви. Најди го бројот n ако збирот на сите остатоци при делењето на овие броеви со 11 изнесува 2002.

Решение. Збирот на остатоците на 11 последователни природни броеви при делење со 11 изнесува $0 + 1 + 2 + \dots + 9 + 10 = 55$. Под серија ќе подразбираме 11 последователни природни броеви чии остатоци при делење со 11 се: 0, 1, 2, 3, ..., 10, соодветно. Бидејќи

$$2002 = 55 \cdot 36 + 22 = 55 \cdot 35 + 77$$

ќе разгледаме два случаја:

- 1) Меѓу броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се наоѓаат 36 серии и неколку броеви пред првата и неколку броеви после последната серија, при што збирот на остатоците при делење со 11 на броевите надвор од тие серии изнесува 22. Бројот 22 може да се добие само како $9 + 10 + 0 + 1 + 2$, па во овој случај имаме $n = 36 \cdot 11 + 5 = 401$.
- 2) Меѓу броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се наоѓаат 35 серии и неколку броеви, при што сега збирот на остатоците изнесува 77. Бројот 77 може да се добие само како $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, па во вој случај $n = 35 \cdot 11 + 15 = 400$.

77. Нека x и y се природни броеви такви да броевите $6x + 5y$ и $5x + 6y$ се полни квадрати. Докажи дека x и y се деливи со 11.

Решение. Од $6x + 5y = a^2$ и $5x + 6y = b^2$, каде a и b се природни броеви, следува $11(x + y) = a^2 + b^2$. Лесно се проверува дека квадрат на природен број при делење со 11 дава остаток од множеството $\{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$. Збирот на квадратите на два природни броја ќе биде делив со 11, само ако збирот на нивните остатоци при делење со 11 е делив со 11, а тоа е можно само ако и двата остатоци се 0. Затоа a^2 и b^2 се деливи со 11, односно $a = 11m$ и $b = 11n$. Решение на системот равенки $6x + 5y = a^2$ и $5x + 6y = b^2$ е

$$x = \frac{6a^2 - 5b^2}{11} = 11(6m^2 - 5n^2) \text{ и } y = \frac{6b^2 - 5a^2}{11} = 11(6n^2 - 5m^2),$$

што значи дека броевите x и y се деливи со 11.

78. Најди го остатокот при делењето на бројот 3^{100} со бројот 13.

Решение. Забележуваме дека $3^3 = 27 = 2 \cdot 13 + 1$, т.е. $3^3 = 13k + 1$. Добиваме

$$3^3 \cdot 3^3 = (13k + 1)(13k + 1) = 13(13k^2 + 2k) + 1 = 13m + 1.$$

Исто така,

$$3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = (13m + 1)(13k + 1) = 13(13km + m + k) + 1 = 13n + 1 \text{ итн.}$$

Со понатамошно множење со 3^3 секогаш се добива број кој при делење со 13 дава остаток 1. Затоа $3^{99} = (3^3)^{33} = 13p + 1$. Конечно,

$$3^{100} = 3^{99} \cdot 3 = 3(13p + 1) = 13 \cdot 3p + 3,$$

т.е. бараниот остаток е 3.

79. Докажи дека збирот на шест последователни природни броеви од кои ниту еден не е делив со 7 е делив со 21, но не е делив со 42.

Решение. Шестте последователни природни броеви од кои ниту еден не е делив со 7 можат да се запишат во облиците: $7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6$. Нивниот збир е

$$7k + 1 + 7k + 2 + 7k + 3 + 7k + 4 + 7k + 5 + 7k + 6 = 42k + 21 = 21(2k + 1).$$

Јасно, $21 \mid 21(2k + 1)$, но $42 \nmid 21(2k + 1)$.

80. Дадени се пет произволни природни броеви. Докажи дека меѓу нив секогаш може да се изберат два броја m и n такви да $m^4 - n^4$ се дели со 15.

Решение. Ќе докажеме дека $m^4 - n^4$ се дели со 3 и со 5. Секој природен број може да се запише во облик $3k - 1, 3k, 3k + 1$ и со квадрирање добиваме

$$(3k)^2 = 9k^2 = 3p \text{ и } (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3q + 1.$$

Според тоа, при делење со 3 на броевите m^2 и n^2 , т.е. на броевите m^4 и n^4 се добива остаток 0 или 1. Сега, од принципот на Дирихле следува дека три од петте броеви имаат ист остаток, па затоа нивната разлика $m^4 - n^4$ се дели со 3. Слично, секој природен број може да се запише во облик $5k, 5k \pm 1, 5k \pm 2$, па со квадрирање добиваме дека броевите m^2 и n^2 имаат облик $5p, 5p + 1$ или $5p + 4$, па ако уште еднаш квадрираме заклучуваме дека m^4 и n^4 имаат облик $5q$ или $5q + 1$. Значи, остатоците при делење со 5 на броевите m^4 и n^4 се 0 или 1. Сега од трите избрани броја чии четврти степени при делење со 3 имаат исти остатоци барем два имаат ист остаток при делење со 5. Затоа нивната разлика $m^4 - n^4$ се дели со 5, па е делива со 15.

81. Збир на квадратите на произволни 2006 последователни природни броеви не е квадрат на ниту еден природен број. Докажи!

Решение. Од $(2k)^2 = 4k^2$ и $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ следува дека квадрат на парен природен број при делење со 4 дава остаток 0, а на непарен остаток 1. Меѓу 2006 последователни природни броеви има 1003 непарни и 1003 парни, па затоа збирот на остатоците при делење на нивните квадрати со 4 ќе биде $1003 = 4 \cdot 250 + 3$. Според тоа, при делење на збирот на квадратите на 2006 произволни последователни природни броеви со 4 се добива остаток 3, а бидејќи квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток или 0 или 1, добиваме дека овој збир не може да е квадрат на ниту еден природен број.

82. Докажи дека бројот $3^{2000} - 1$ се дели со 10.

Решение. Од тоа што $3^4 = 81$ следува $3^{2000} = (3^4)^{500} = 81^{500}$, што значи дека бројот 3^{2000} завршува на цифрата 1. Според тоа, бројот $3^{2000} - 1$ завршува на цифрата 0, па значи тој е делив со 10.

83. Докажи дека бројот

$$1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + 4^{1988} + 5^{1988} + 6^{1988}$$

е делив со 5, но не е делив со 10.

Решение. Бројот 2^{1988} завршува на цифрата 6, бројот 3^{1988} завршува на цифрата 1, броевите 4^{1988} и 6^{1988} завршуваат на цифрата 6, а бројот 5^{1988} завршува на цифрата 5. Според тоа, цифрата на единиците на дадениот број е еднаква на цифрата на единиците на бројот

$$1+6+1+6+5+6=25,$$

па затоа тој се дели со 5, но не се дели со 10.

84. Докажи дека бројот

$$n = 1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998} + 5^{1998} + 6^{1998}$$

не е делив со ниту еден од броевите 2, 4, 5, 6, 8 и 10.

Решение. Очигледно бројот n е непарен, како збир на три парни и три непарни броеви, па затоа не може да биде делив со броевите 2, 4, 6, 8 и 10. Понатаму, последните цифри на броевите $1^{1998}, 2^{1998}, 3^{1998}, 4^{1998}, 5^{1998}, 6^{1998}$ се 1, 4, 9, 6, 5 и 6, соодветно, и бидејќи $1+4+9+6+5+6=31$ заклучуваме дека бројот n не се дели со 5.

85. Докажи дека производот на два последователни природни броја е делив со 2.

Решение. Нека последователните природни броеви се k и $k+1$. Ако k е парен број, тогаш $k = 2p$, па значи $2|k$, т.е. $2|k(k+1)$. Ако k е непарен број, тогаш $k = 2p+1$, па значи $k+1 = 2p+2 = 2(p+1)$, односно $2|k+1$, т.е. $2|k(k+1)$.

86. Докажи дека за секој природен број n бројот $n^3 - n$ се дели со 6.

Решение. Од формулите за скратено множење следува

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1),$$

што значи дека $n^3 - n$ е производ на три последователни природни броеви. Од задача 85 следува дека $2 \mid (n^3 - n)$. Ќе докажеме дека $n^3 - n$ се дели и со три. Секој природен број може да се запише во облик $3k, 3k+1$ или $3k+2$. Ако $n = 3k$, тогаш $3 \mid n$, па затоа $3 \mid (n^3 - n)$. Ако $n = 3k+1$, тогаш $3 \mid (n-1)$, па затоа $3 \mid (n^3 - n)$. Ако $n = 3k+2$, тогаш $3 \mid (n+1)$, па затоа $3 \mid (n^3 - n)$. Конечно, од пример 2.11 ќе следува дека тој се дели со 6.

87. Ако n е природен број, тогаш $n^3 + 1997n + 1998$ се дели со 6. Докажи!

Решение. Имаме $n^3 + 1997n + 1998 = n^3 - n + 1998(n+1)$. Според задача 86, $6 \mid (n^3 - n)$ и бидејќи $6 \mid 1998(n+1)$ заклучуваме дека $6 \mid (n^3 + 1997n + 1998)$.

88. Докажи дека број од облик $n^3 - n + 2^n$, $n \in \mathbf{N}$ никогаш не е делив со 2007.

Решение. Бројот $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ е делив со 3, како производ на три последователни природни броеви, а бројот 2^n не е делив со 3. Според тоа, бројот $n^3 - n + 2^n$ не е делив со 3. Меѓутоа, $3 \mid 2007$ од што заклучуваме дека 2007 не е делител на $n^3 - n + 2^n$.

89. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{1998}$ се природни броеви за кои важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1997}^2 = a_{1998}^2.$$

Докажи дека барем два од овие броеви се парни.

Решение. Нека претпоставиме дека сите броеви се непарни, т.е. $a_i = 2b_i + 1$, за $i = 1, 2, \dots, 1998$. Тогаш од даденото равенство последователно добиваме

$$(2b_1 + 1)^2 + (2b_2 + 1)^2 + \dots + (2b_{1997} + 1)^2 = (2b_{1998} + 1)^2$$

$$4b_1^2 + 4b_1 + 4b_2^2 + 4b_2 + \dots + 4b_{1997}^2 + 4b_{1997} + 1997 = 4b_{1998}^2 + 4b_{1998} + 1$$

$$b_1(b_1 + 1) + b_2(b_2 + 1) + \dots + b_{1997}(b_{1997} + 1) + 499 = b_{1998}(b_{1998} + 1).$$

Понатаму, секој од броевите $b_i(b_i + 1)$, $i = 1, 2, \dots, 1998$ е парен број, па затоа во последното равенство на десната страна имаме парен, а на левата непарен број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека меѓу дадените броевите има барем еден парен. Не е возможно само бројот a_{1998} да е парен, бидејќи тогаш левата страна е збир на непарен број непарни броеви, па значи левата страна од равенството е непарен број. Слично, не може само еден од броевите на левата страна да е парен, бидејќи тогаш левата страна е парен број, а десната е непарен број, што е противречност.

Конечно, од досега изнесеното следува дека најмалку два од броевите кои го исполнуваат условот на задачата се парни.

90. Докажи дека број чиј декаден запис ги содржи само цифрите 2 и 6 не е разлика на квадрати на два природни броја.

Решение. Јасно, секој број кој го задовлува условот на задачата е парен, но не е делив со 4, бидејќи неговите двоцифрени завршетоци се 22, 26, 62 и 66. Разликата пак на квадратите на два природни броја е или непарен број или број делив со 4. Имено, $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$, па ако m и n се со различна парност, тогаш $m^2 - n^2$ е непарен, а ако m и n се со иста парност, тогаш $m^2 - n^2$ се дели со 4. Тоа значи дека број чиј декаден запис ги содржи само цифрите 2 и 6 не може да се претстави како разлика на квадрати на два природни броја.

91. Ако a, b, c се непарни цели броеви, тогаш еден од броевите $ab-1$, $bc-1$ или $ca-1$ е делив со 4. Докажи!

Решение. Нека $a = 2k+1$, $b = 2n+1$, $c = 2m+1$ и нека ниту еден од броевите $ab-1$, $bc-1$ и $ca-1$ не е делив со 4. Тогаш

$$ab-1 = 2(2kn+k+n), \quad bc-1 = 2(2mn+m+n) \quad \text{и} \quad ca-1 = 2(2mk+m+k)$$

и ниту еден од броевите $k+n$, $n+m$ и $m+k$ не е парен, бидејќи во спротивно соодветната разлика би била делива со 4. Според тоа, збирот

$$(k+m) + (m+n) + (k+n) = 2(k+m+n)$$

е непарен број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од броевите $ab-1$, $bc-1$ и $ca-1$ е делив со 4.

92. Природниот број $n, n > 1$ го нарекуваме *совршен* ако збирот на сите негови природни делители (заедно со 1 и n) е еднаков на $2n$. Најди ги сите совршени броеви n такви да $n-1$ и $n+1$ се прости броеви.

Решение. Најмалиот совршен број е 6 и тој се наоѓа меѓу простите броеви 5 и 7. Нека $n, n > 6$ е бараниот совршен број. Броевите $n-1$ и $n+1$ треба да се прости, што значи дека тие треба да се од облик $6k-1$ или $6k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогаш, бараните броеви се точно $6k-1$ и $6k+1$, а совршениот број е $6k$. Во тој случај броевите $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ се делители на n поголеми од 1, па збирот на сите делители на n е поголем или еднаков на $1 + n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} = 2n+1$, што значи дека n не е совршен број. Според тоа, единствено решение е $n = 6$.

93. За три последователни непарни природни броеви важи: производот на првиот и третиот не е делив со вториот број. Докажи!

Решение. Нека се тоа броевите $n-2, n, n+2$, при што n е непарен и $n \geq 3$. Ако $n \mid (n-2)(n+2) = n^2 - 4$, тогаш $n \mid 4$, што не е можно бидејќи n е непарен и $n \geq 3$.

94. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни природни броеви не е делив со 100.

Решение. Нека $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ се пет последователни природни броеви, $n > 2$. Тогаш

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2).$$

Бројот $5(n^2 + 2)$ треба да е делив со 25 и со 4. Но, за да биде делив со 25 потребно е $n^2 + 2$ да е делив со 5, односно цифрата на единиците на бројот n^2 да е 3 или 8, што не е можно бидејќи цифрата на единиците на квадрат на природен број може да биде само: 0, 1, 4, 5, 6 и 9.

95. Колку пати најмалку едно по друго треба да се запише бројот 2002 за да се добие број делив со 66. Во тој случај најди го количникот.

Решение. Број е делив со 66 ако е делив со 2, со 3 и со 11. Ако неколку пати едно по друго го запишеме бројот 2002 добиваме број кој е делив со 2 и со 11, а ќе биде делив со 3 ако 2002 го запишеме трипати, бидејќи збирот на цифрите ќе биде 12. Во случајов за количникот добиваме

$$200220022002 : 66 = 3033636697 .$$

96. Најди најмал природен број кој се дели со 42, збирот на цифрите му е еднаков на 42 и неговиот двоцифрен завршеток е 42.

Решение. Нека n е бараниот број. Според условот $n = 100x + 42$, па за да n биде делив со 42, тој мора да е делив со 21, т.е. со 3 и со 7. Збирот на цифрите на бројот x е $42 - 4 - 2 = 36$. Најмалиот број со збир на цифри 36 е бројот 9999, но тој не е делив со 7. Следни такви броеви, во растечки редослед се: 18999, 19899, 19989, 19998, 27999, 29799, 29979, ... Со непосредна проверка наоѓаме дека првиот број меѓу нив кој е делив со 7 е бројот 29799. Значи, бараниот број е 2979942.

97. Ако првата цифра на природниот број a се помести на последното место се добива број b кој е трипати помал од a . Докажи дека бројот a се дели со 27.

Решение. Според условот на задачата имаме $a = 3b$, па значи a се дели со 3. Според тоа, збирот на неговите цифри се дели со 3. Од условот следува дека и b има ист збир на цифри, па затоа и тој се дели со 3, т.е. $b = 3k$. Но, тогаш $a = 9k$, што значи дека збирот на неговите цифри се дели со 9, па затоа и збирот на цифрите на бројот b се дели со 9, т.е. b се дели со 9. Конечно, $b = 9m$ и како $a = 3b$ добиваме дека $a = 27m$, т.е. $27 | a$.

98. Најди најмал природен број запишан само со цифрата 1 таков да е делив со $33 \dots 3$.

100

Решение. Од $33 \dots 3 = 3 \cdot 11 \dots 1$ заклучуваме дека бараниот број мора да е делив

100 100

со 3 и со $11 \dots 1$. Понатаму, секој број кој е запишан со 100, 200, 300 ...

100

единици е делив со бројот $11 \dots 1$. За да биде делив и со 3 треба збирот на

100

неговите цифри да е делив со 3. Најмал таков број е бројот $11 \dots 1$.

300

99. Најди најмал 2006-тоцифрен природен број кој се запишува само со цифрите 0, 2 и 6 и е делив со 18.

Решение. Бараниот број е парен и од тоа што е делив со 18, тој е делив со 9, т.е. збирот на цифрите му е делив со 9. Неговата прва цифра е 2 (0 не може да биде прва цифра, а бројот чија прва цифра е 6 е поголем). Сите цифри се парни, па најмалиот збир на цифри е 18. Овој збир е има најмал број собирци (цифри) ако е $18 = 2 + 2 + 2 + 6 + 6$. Бараниот број е $\overline{2001002266}$.

100. Најди ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 5 и со 9, а разликата на цифрите на десетките и стотките е еднаква на разликата на цифрите на единиците и десетките.

Решение. Заради деливоста со 5 бараните броеви се од облик $\overline{xy0}$ или $\overline{xy5}$. Заради деливоста со 9 во првиот случај имаме $x + y = 9$ и $y - x = -y$, па затоа бараниот број е 630. Во вториот случај $x + y + 5 = 9$ или $x + y + 5 = 18$ и $y - x = 5 - y$ и од овде ги добиваме броевите 135 и 765.

101. Производот на пет последователни природни броеви е бројот $\overline{95a4b}$. Кои се тие броеви?

Решение. Меѓу пет последователни природни броеви еден е делив со 2 и еден е делив со 5, па затоа нивниот производ е делив со 10. Значи, последната цифра е 0. Нивниот производ е делив со 3, па затоа збирот на цифрите $9 + 5 + a + 4 + 0$ е делив со 3, односно $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Но, меѓу пет последователни природни броеви два се деливи со 2, од кои еден е и делив со 4, па затоа производот е делив со 8. Меѓу броевите 95040, 95340, 95640 и 95940 само броевите 95040 и 95640 се деливи со 8. Со непосредна проверка се добива дека само бројот 95040 го исполнува условот на задачата и притоа имаме $95040 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$.

102. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви да $\overline{abc} = 3(a + b + c)^2$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $3 | \overline{abc}$, па затоа збирот на цифрите $a + b + c$ се дели со 3, т.е. $a + b + c = 3k$. Но, тоа значи дека $\overline{abc} = 27k^2$, т.е. $27 | \overline{abc}$, па затоа $a + b + c$ се дели со 9. Но, $\overline{abc} \leq 999$, па затоа $3(a + b + c)^2 \leq 999$, односно $(a + b + c)^2 \leq 333$, т.е. $a + b + c \leq 18$. Од друга страна, $\overline{abc} \geq 100$, односно $3(a + b + c)^2 \geq 100$, што значи дека $a + b + c > 5$. Од досега изнесеното следува дека $a + b + c$ може да биде 9 или 18. Со непосредна проверка добиваме дека бараните броеви се 243 и 972.

103. Стави цифри на место на ѕвездичките така што бројот $4*1*$ биде делив со 12. Најди ги сите решенија.

Решение. За да бројот биде делив со 12 треба да е делив со 3 и со 4. Број е делив со 4, ако двоцифрениот завршеток е делив со 4, па затоа цифрата на единиците може да биде 2 или 6. За да бројот е делив со 3 потребно е збирот на неговите цифри да е делив со 3. Ако цифрата на единиците е 2, тогаш цифрата на стотките може да биде 2, 5 или 8. Ако цифрата на единиците е 6,

тогаш цифрата на стотките може да биде 1, 4 или 7. Конечно, бараните броеви се 4116, 4212, 4416, 4512, 4716 и 4812.

104. Кои цифри треба да се стават на местото на ѕвездичките за да бројот 81^{**} биде делив со 90.

Решение. Бараниот број треба да е делив со 10 и со 9, па затоа тој треба да завршува на 0 и збирот на неговите цифри треба да е делив со 9. Значи, збирот на цифрите на бројот $81^{*}0$ треба да е делив со 9, а тоа е можно само ако на местото на ѕвездичката ставиме 0 или 9. Конечно, бараните броеви се 8100 и 8190.

105. Цифрата на единиците на трицифрениот број n кој се дели со 15 е еднаква на цифрата на стотките. Кој е тој број?

Решение. Од $15|n$ следува $5|n$, па затоа цифрата на единиците е 0 или 5. Но, таа не е еднаква на 0 бидејќи во тој случај и цифрата на стотките е еднаква на 0, што не е можно. Значи, бројот има облик $5^{*}5$. Од $15|n$ следува $3|n$, од што заклучуваме дека цифрата на десетките може да биде 2, 5 или 8. Бараните броеви се 525, 555 и 585.

106. На местото на ѕвездичката стави цифра така да остатоците при делењето со 3 и 5 на бројот 401512^{*} бидат еднакви.

Решение. Бидејќи остатоците при делењето на дадениот број со 3 и 5 се еднакви, тие може да бидат 0, 1 или 2. За да бројот се дели со 5 на местото на ѕвездичката треба да стои 0 или 5. Но, збирот на цифрите на бројот 4015120 е 13 и тој не се дели со 3. Збирот на цифрите на бројот 4015125 е 18 и тој се дели со 3, па значи и бројот 4015125 се дели со 3. Конечно, на местото на ѕвездичката треба да се стават цифрите 5, 6 или 7, при што се добиваат остатоци 0, 1 или 2, соодветно.

107. Во бројот $\overline{1988ab}$ одреди ги непознатите цифри, за да истиот се дели со 33.

Решение. Бројот $\overline{1988ab}$ се дели со 33 ако и само ако се дели со 3 и 11. Но, тоа значи дека бројот $1+9+8+8+a+b=26+a+b$ се дели со 3 и бројот $1-9+8-8+a-b=a-b-8$ се дели со 11. Во првиот случај тоа е можно ако и само ако $a+b$ е еден од броевите 1, 4, 7, 10, 13 и 16, а во вториот случај ако и само ако $a-b$ е еден од броевите -3 и 8. Со непосредна проверка добиваме $a=2, b=5$; $a=5, b=8$ и $a=9, b=1$.

108. Најди го најмалиот природен број кај кој сите цифри се единици и кој е делив со 333.

Решение. Ако бројот биде делив со 333, тогаш тој е делив со 9 и со 37. Бидејќи сите цифри се единици, бараниот број мора да има $9k$, $k=1,2,3,\dots$ цифри. Најмалиот од овие броеви е 111111111 и тој е делив со 37.

109. Најди ги сите трицифрени броеви кај кои збирот на цифрите е 18 и кои се деливи со 4 и 13.

Решение. Ако трицифрениот број е делив со 4 и 13, тогаш тој е делив со $4 \cdot 13 = 52$. Бидејќи

$$1 \cdot 52 = 52 < 100, \quad 2 \cdot 52 = 104, \quad 19 \cdot 52 = 988 < 1000 \text{ и } 20 \cdot 52 = 1040 > 1000$$

добиваме дека трицифрени броеви кои се деливи со бројот 52 се:

$$104, 156, 208, 260, 312, 364, 416, 468, 520, \\ 572, 624, 676, 728, 780, 832, 884, 936 \text{ и } 988.$$

Меѓу овие броеви збирот на цифрите е 18 само кај броевите 468 и 936 и тоа се бараните броеви.

110. Некој трицифрен број е 21 пат поголем од збирот на неговите цифри. Докажи дека тој број е делив со 9. Најди го тој трицифрен број.

Решение. Нека $x = \overline{abc}$ е бараниот број. Од условот на задачата следува $x = 21(a + b + c)$, т.е. $x = 3 \cdot 7(a + b + c)$. Според тоа, бројот x е делив со 3. Но, тогаш и збирот на неговите цифри е делив со 3, т.е. постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $a + b + c = 3k$. Значи, $x = 3 \cdot 7 \cdot 3k = 9 \cdot 7k$, т.е. $9 \mid x$.

Бидејќи a, b, c се цифри, следува

$$0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9,$$

што значи дека за збирот на цифрите, (кој треба да е делив со 9), имаме три можности: $a + b + c = 9$, $a + b + c = 18$, или $a + b + c = 27$. Понатаму:

$$21 \cdot 9 = 189 \neq 21(1 + 8 + 9) = 378,$$

$$21 \cdot 18 = 378 = 21(3 + 7 + 8), \text{ и}$$

$$21 \cdot 27 = 567 \neq 21(5 + 6 + 7) = 378.$$

Значи, бараниот број е 378.

111. Ако четирицифрен број $\overline{abcd}$ се подели со својот двоцифрен завршеток се добива бројот 81. Ако четирицифрениот број запишан со исти цифри, но со обратен редослед на цифрите бројот $\overline{dcba}$, со својот двоцифрен завршеток се добива бројот 225. Најди го бројот $\overline{abcd}$!

Решение. Нека е даден бројот $\overline{abcd}$. Тогаш $\overline{abcd} : \overline{cd} = 81$, т.е. $\overline{abcd} = 81\overline{cd}$, па затоа

$$1000a + 100b + 10c + d = 81(10c + d)$$

$$1000a + 100b = 80(10c + d)$$

$$5(10a + b) = 4(10c + d)$$

$$5\overline{ab} = 4\overline{cd}.$$

Слично, $\overline{dcba} : \overline{ba} = 225$, т.е. $\overline{dcba} = 225\overline{ba}$, па затоа

$$1000d + 100c + 10b + a = 225(10b + a)$$

$$1000d + 100c = 224(10b + a)$$

$$25(10d + c) = 56(10b + a)$$

$$25\overline{dc} = 56\overline{ba}.$$

Понатаму, бидејќи $25\overline{dc}$ е делив со 5, добиваме дека $56\overline{ba}$ е делив со 5, т.е. $\overline{ba}$ е делив со 5, што значи $a \in \{0, 5\}$. Но, a е цифра на илјадите на бараниот број, па не може да биде 0, што значи дека $a = 5$. $25\overline{dc}$ е делив со 25, па затоа $56\overline{ba}$ е делив со 25, односно $\overline{ba}$ е делив со 25, што значи $b \in \{2, 7\}$. Од

$\overline{5ab} = 4\overline{cd}$ следува дека $\overline{5ab}$ е делив со 4, односно $\overline{ab}$ е делив со 4, што значи дека $b = 2$. Сега, $4\overline{cd} = 5\overline{ab} = 5 \cdot 52 = 260$, па е $\overline{cd} = 260 : 4 = 65$. Аналогно, од $25\overline{dc} = 56\overline{ba}$ следува $25\overline{dc} = 56 \cdot 25$, т.е. $\overline{dc} = 56$, односно $\overline{cd} = 65$. Конечно, бараниот број е 5265.

112. Даден е бројот $a = \overline{4444\dots444}$. Дали овој број е делив со 8?
2013 четворки

Решение. Според признакот за деливост со 8, бројот a е делив со 8 ако и само ако бројот $4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 4 = 28$ е делив со 8. Но, $8 \nmid 28$, па затоа бројот a не се дели со 8.

113. Најди ги сите трицифрени броеви чија цифра на единици е еднаква на цифрата на стотките и кои се деливи со 15.

Решение. Нека $n = \overline{хух}$ е бараниот трицифрен број. Од $15 | n$ следува дека $x = 5$ и бидејќи n се дели со 3 добиваме дека $2x + y = 10 + y$ се дели со 3. Според тоа, $y = 2, 5, 8$, па бараните броеви се 525, 555 и 585.

114. Во производот $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ одреди ги цифрите a и b така да тој биде делив со 12.

Решение. Производот $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ е делив со 12 ако $\overline{54a}$ е делив со 4 и $\overline{63b1}$ е делив со 3 ($\overline{63b1}$ е непарен и не е делив со 4) или пак ако $\overline{54a}$ е делив со 3 и со 4, а цифрата b е произволна. За $a = 0$ имаме $540 = 45 \cdot 12$, па тогаш b може да биде било која цифра (10 решенија). Ако е $a = 4$ или $a = 8$, тогаш $\overline{54a}$ е делив со 4, па затоа $\overline{63b1}$ треба да биде делив со 3, што значи дека $b = 2$ или $b = 5$ или $b = 8$ и во овој случај имаме 6 решенија. Значи, задачата има вкупно 16 решенија.

115. Во бројот $\overline{1x33y}$ одреди ги цифрите x и y така да овој број биде делив со 15.

Решение. Природен број е делив со 15 ако е делив со 3 и со 5. Број е делив со 5 ако цифрата на единиците е 0 или 5. Понатаму, број е делив со 3 ако збирот на неговите цифри е делив со 3, па затоа:

- за $y = 0$ збирот на цифрите на бројот $\overline{1x330}$ е $7 + x$ и тој е делив со 3 ако $x = 2, 5$ или 8 , и
- за $y = 5$ збирот на цифрите на бројот $\overline{1x335}$ е $12 + x$ и тој е делив со 3 ако $x = 0, 3, 6$ или 9 .

116. Во производот $\overline{31a} \cdot \overline{62b1}$ одреди ги цифрите a и b така да тој биде делив со 15.

Решение. Природен број е делив со 15 ако е делив со 3 и со 5. Бидејќи во производот барем еден од броевите мора да биде делив со 5, а бројот $\overline{62b1}$ не

е делив со 5, добиваме дека $\overline{31a}$ мора да е делив со 5. Според тоа, цифрата a е 0 или 5.

Ако $a=0$, тогаш 310 е делив со 5, но не е делив со 3, па затоа бројот $\overline{62b1}$ мора да е делив со 3, што значи збирот на неговите цифри $9+b$ треба да е делив со 3. Во овој случај цифрата b може да биде 0, 3, 6 или 9.

Ако $a=5$, тогаш 315 е делив и со 3 и со 5, па затоа е делив со 15. Во овој случај цифрата b може да биде било која од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9.

117. Наместата на a и b во четирицифрените броеви стави цифри така што изразот $\overline{323a} + \overline{b410}$ е делив со 9.

Решение. Во зависност од тоа, дали $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ или $b \in \{7, 8, 9\}$, дадениот израз е еднаков на $\overline{c64a}$, каде $c=b+3$ или $\overline{1c64a}$, каде $c=b+3-10$, соодветно. Во првиот случај збирот на цифрите на збирот е $13+b+a$, а во вториот случај збирот на цифрите на збирот е $4+b+a$. Според тоа, за да изразот $\overline{323a} + \overline{b410}$ биде делив со 9, потребно и доволно е бројот $13+b+a$, односно бројот $4+b+a$ да биде делив со 9. Последното е можно ако и само ако $a+b=14$, односно ако и само ако $a+b=5$. Значи, подредениот пар (a, b) е еден од следниве парови: (0,5); (1,4); (2,3); (3,2), (4,1); (9,5); (8,6); (7,7); (6,8) или (5,9).

118. Определи ги вредностите на цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 18.

Решение. Бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 2 и 9, па според тоа $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Секоја од можностите ќе ја разгледаме одделно.

а) за $b=0$ добиваме $7+8+9+a+b=24+a$, па според тоа $a=3$.

б) за $b=2$ добиваме $a=1$,

в) за $b=4$ добиваме $a=8$,

г) за $b=6$ добиваме $a=6$, и

д) за $b=8$ добиваме $a=4$.

119. Одреди ги непознатите броеви $\overline{64a02b}$ и $\overline{3cccd}$ ако е $\overline{3cccd} \cdot 18 = \overline{64a02b}$.

Решение. Од равенството $\overline{3cccd} \cdot 18 = \overline{64a02b}$ следува дека бројот $\overline{64a02b}$ е делив со 18 и бидејќи $18=2 \cdot 9$ следува дека тој е делив со 2 и со 9. Заради деливоста со 2 важи $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Понатаму, заради деливоста со 9 имаме: за $b=0$ е $a=6$, за $b=2$ е $a=4$, за $b=6$ е $a \in \{0, 9\}$ и за $b=8$ е $a=7$. Бидејќи

$$646020:18=35890, \quad 644022:18=35779, \quad 642024:18=35668$$

$$640026:18=35557, \quad 649026:18=36057, \quad 647028:18=35946$$

добиваме $a=0, b=6, c=5, d=7$.

120. Најди ги сите шестцифрени броеви $\overline{a2011b}$ така што збирот $2010 + \overline{a2011b}$ биде делив со 6.

Решение. Бројот 2010 е делив со 6, па за да даденио збир биде делив со 6, потребно и доволно е бројот $\overline{a2011b}$ да биде делив со 6. Природен број е делив со 6 ако е делив и со бројот 2 и со бројот 3. Но, природен број е делив со 2 ако неговата цифра на единици е 0, 2, 4, 6 или 8. Значи, постојат пет можности $b = 0, 2, 4, 6, 8$. За секоја можност за цифрата b , цифрата a ја определуваме од условот бројот да е делив со 3, што значи збирот на неговите цифри да е делив со 3.

Ако $b = 0$, тогаш бројот е од видот $\overline{a20110}$, па збирот на неговите цифри е $a + 4$ и како тој треба да е делив со 3, добиваме $a = 2, 5$ или 8. Значи, во овој случај броевите кои ги задоволуваат условите на задачата се: 220110, 520110 и 820110.

Ако $b = 2$, тогаш бројот е од видот $\overline{a20112}$, па збирот на неговите цифри е $a + 6$ и како тој треба да е делив со 3, добиваме $a = 3, 6$ или 9. Значи, во овој случај броевите кои ги задоволуваат условите на задачата се: 320112, 620112 и 920112.

Ако $b = 4$, тогаш бројот е од видот $\overline{a20114}$, па збирот на неговите цифри е $a + 8$ и како тој треба да е делив со 3, добиваме $a = 1, 4$ или 7. Значи, во овој случај броевите кои ги задоволуваат условите на задачата се: 120114, 420114 и 720114.

Ако $b = 6$, тогаш бројот е од видот $\overline{a20116}$, па збирот на неговите цифри е $a + 10$ и како тој треба да е делив со 3, добиваме $a = 2, 5$ или 8. Значи, во овој случај броевите кои ги задоволуваат условите на задачата се: 220116, 520116 и 820116.

Ако $b = 8$, тогаш бројот е од видот $\overline{a20118}$, па збирот на неговите цифри е $a + 12$ и како тој треба да е делив со 3, добиваме $a = 3, 6$ или 9. Значи, во овој случај броевите кои ги задоволуваат условите на задачата се: 320118, 620118 и 920118.

121. Даден е збирот $\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a}$. Определи која цифра треба да се запише на местото на буквата a така што збирот да е делив со 9.

Решение. Збирот можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a} &= 7000 + 100a + 80 + 5 + 3000 + 400 + 10a + 5 + \\ &\quad + 10000 + 1000a + 200 + 10 + a \\ &= 20000 + 600 + 90 + 10 + 1111a = 20700 + 1111a.\end{aligned}$$

Бројот 9 е делител на 20700. Збирот $20700 + 1111a$ е делив со 9 само ако 9 е делител на $1111a$. Единствена цифра a за која $1111a$ е делив со 9 е $a = 9$.

122. Во четирицифрен број цифрата на илјадарките и десетките е 7 и 2, соодветно. Кои цифри треба да стојат на местото на стотките и единиците, за да бројот се дели со 2 и 3, но не и со нивните степени?

Решение. Ако цифрата на стотките е a , а цифрата на единиците е b , тогаш бројот е од видот $\overline{7a2b}$, $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. За да бројот $\overline{7a2b}$ се дели со 2

треба $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, но како бројот не треба да се дели со степените на бројот 2 заклучуваме дека неговиот двоцифрен завршеток не смее да се дели со 4, па затоа $b \in \{2, 6\}$.

а) Ако $b = 2$, тогаш бројот е од видот $\overline{7a22}$ и како тој треба да биде делив со 3 добиваме дека збирот на цифрите $7 + a + 2 + 2 = 11 + a$ треба да биде делив со 3, па затоа $a \in \{1, 4, 7\}$. Меѓутоа, за $a = 7$ го добиваме бројот 7722 кој е делив со $9 = 3^2$, а тоа противречи на условот на задачата. Според тоа, во овој случај броевите 7122 и 7422 се решение на задачата.

б) Ако $b = 6$, тогаш бројот е од видот $\overline{7a26}$ и како тој треба да биде делив со 3 добиваме дека збирот на цифрите $7 + a + 2 + 6 = 15 + a$ треба да биде делив со 3, па затоа $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Меѓутоа, за $a = 3$ го добиваме бројот 7326 кој е делив со $9 = 3^2$, а тоа противречи на условот на задачата. Според тоа, во овој случај броевите 7026, 7626 и 7926 се решение на задачата.

Конечно, решение на задачата се броевите 7026, 7122, 7422, 7626 и 7926.

123. Дадени се цифрите 0, 1, 3, 4 и 5. Со помош на дадените цифри запиши ги сите петцифрени броеви кои се деливи со 4, а не се деливи со 5 (цифрите не се повторуваат).

Решение. Броевите се деливи со 4, па според признакот за деливост со 4 истите мора да бидат од облик $***40$ или $***04$. Случајот $***40$ отпаѓа бидејќи притоа, според признакот за деливост со 5, истите би биле деливи и со 5. Значи бараните броеви се од облик $***04$, каде на местото на ѕвездичките стојат цифрите 1, 3 и 5. Бараните броеви се: 13504, 15304, 31504, 35104, 51304 и 53104.

124. На бројот 10 допиши му по една цифра од лево и од десно, така да добиениот четирицифрен број биде делив со 36.

Решение. После допишувањето добиениот број е $\overline{x10y}$. Овој број е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. Но, $\overline{x10y}$ е делив со 4 ако и само ако $y \in \{0, 4, 8\}$. Бројот $\overline{x100}$ се дели со 9 ако и само ако $x + 1 = 9$, т.е. $x = 8$. Бројот $\overline{x104}$ е делив со 9 ако и само ако $x + 5 = 9$, т.е. $x = 4$. Бројот $\overline{x108}$ е делив со 9 ако и само ако $x + 9 = 18$, (првата цифра не може да е 0), т.е. $x = 9$. Добиените броеви се 8100, 4104 и 9108.

125. Телефонскиот број на Илија се состои од два трицифрени броја од кои секој е делив со 45, а средната цифра им е 8. Најди го бројот на телефонот, ако првиот дел од бројот е помал од вториот.

Решение. Бараниот број на телефонот е $\overline{a8bx8y}$. За да секој од броевите $\overline{a8b}$ и $\overline{x8y}$ е делив со 45 тие треба да се деливи со 5 и со 9. Значи последната цифра на секој од броевите е 0 или 5. Ако последната цифра е 5, тогаш и првата е 5, бидејќи меѓу броевите од видот $\overline{*85}$ само бројот 585 е делив со 9. Ако последната цифра е 0, тогаш првата цифра е 1 бидејќи меѓу броевите од

видот $\overline{*80}$ само бројот 180 е делив со 9. Конечно, телефонскиот број на Илија е 180585.

126. Најди го најмалиот природен број кој е четири пати помал од бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед.

Решение. Од $\overline{x_1x_2 \dots x_n} \cdot 4 = \overline{x_nx_{n-1} \dots x_1}$, следува дека $x_1 \leq 2$, па заради деливоста со 4, мора $x_1 = 2$. Од $\overline{2x_2 \dots x_n} \cdot 4 = \overline{x_nx_{n-1} \dots 2}$, следува дека $x_n \geq 8$, од каде мора $x_n = 8$. Бидејќи, $4 \cdot 23 > 90$, мора $x_2 \in \{0, 1, 2\}$, па заради деливоста со 4, мора $x_2 = 1$. За трицифрениот број 218 не важи $218 \cdot 4 = 872$, па најмалиот таков број ќе го побараме меѓу четирицифрените броеви. Од равенството $\overline{21x_38} \cdot 4 = \overline{8x_312}$, се добива $x_3 = 7$. Значи, бараниот број е 2178.

127. На неколку листови хартија напишани се броевите $+1$ и -1 , на секој лист по еден број. Збирот на сите броеви е 0, а нивниот производ е 1. Докажи дека бројот на листовите е делив со 4.

Решение. Бидејќи збирот на сите листови е еднаков на нула, заклучуваме дека бројот на негативните броеви е еднаков на бројот на позитивните броеви, а бидејќи производот на сите броеви е 1, добиваме дека негативни броеви има $2k$. Значи, имаме $2k + 2k = 4k$ листови и овој број е делив со 4.

128. Дали постојат 2014 броеви $n_1, n_2, \dots, n_{2014}$ кои имаат вредности $+1$ или -1 и такви да важи $n_1n_2 + n_2n_3 + \dots + n_{2013}n_{2014} + n_{2014}n_1 = 0$.

Решение. Да претпоставиме дека одговорот е позитивен. Дадениот израз се состои од точно 2014 собирци, од кои секој е еднаков на $+1$ или -1 . Затоа точно 1007 собирци се $+1$ и 1007 собирци се -1 . Притоа, јасно е дека

$$(n_1n_2)(n_2n_3) \dots (n_{2013}n_{2014})(n_{2014}n_1) = 1.$$

Според претходната задача бројот 2014 мора да е делив со 4, но како $4 \nmid 2014$, заклучуваме дека броеви со такво својство не постојат.

129. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n . Најди го бројот n ако $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.

Решение. Бидејќи бројот n , збирот на неговите цифри $S(n)$, како и $S(S(n))$ даваат ист остаток при делење со 3, добиваме дека збирот $n + S(n) + S(S(n))$ се дели со 3. Но, бројот 2002 не се дели со 3, па затоа не постои природен број n таков што $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.

130. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n . Формираме низа броеви на следниов начин: $a_1 = n$, каде n е природен број, $a_2 = a_1 - S(a_1)$, $a_3 = a_2 - S(a_2)$, Ако a_{13} е првиот член во низата кој е еднаков на нула, најди го бројот n .

Решение. Бидејќи број и збирот на неговите цифри даваат ист остаток при делење со 9, добиваме дека нивната разлика се дели со 9. Затоа броевите $a_2, a_3, \dots, a_{12}$ се природни броеви деливи со 9. Од $a_{13} = 0 = a_{12} - S(a_{12})$,

добиваме дека a_{12} е едноцифрен број делив со 9, т.е. $a_{12} = 9$. Од $a_{12} = 9 = a_{11} - S(a_{11})$ следува $a_{11} = 18$. Понатаму, од $a_{10} - S(a_{10}) = 18$ следува $a_{10} = 27$ итн. Добиваме: $a_9 = 36$, $a_8 = 45$, $a_7 = 54$, $a_6 = 63$, $a_5 = 72$ и $a_4 = 81$. Од $a_3 - S(a_3) = 81$ следува $a_3 = 90$ или $a_3 = 99$. Ако е $a_3 = 90$, тогаш не постои природен број a_2 (делив со 9), таков да е $a_2 - S(a_2) = 90$. Имено, $99 - 18 = 81$, $108 - 9 = 99$, $117 - 9 = 108$, а за $126 \leq a_2 \leq 999$, важи $S(a_2) \leq 27$, па е $a_2 - S(a_2) \leq 126 - 27 = 99$. За $a_3 = 99$ добиваме $a_2 = 108$, па е $n = a_1 \in \{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119\}$.

131. Докажи дека претходникот на квадратот на секој непарен природен број е делив со 8.

Решение. Прво ќе докажеме дека квадратот на секој непарен природен број може да се запише во облик $8p + 1$, $p \in \mathbf{N}_0$. Имено, секој непарен природен број може да се запише во облик $2n + 1$, $n \in \mathbf{N}_0$, па затоа за неговиот квадрат добиваме

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1.$$

Но, $n(n+1)$ е парен број, како производ на два последователни ненегативни цели броја. Затоа, $n(n+1) = 2p$, $p \in \mathbf{N}_0$, па имаме

$$(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1 = 4 \cdot 2p + 1 = 8p + 1, \quad p \in \mathbf{N}_0.$$

Конечно, за претходникот на квадратот на произволен природен број добиваме $(2n+1)^2 - 1 = 8p$, т.е. тој е делив со 8.

132. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни непарни природни броеви е делива со 8

Решение. Ако $k \in \mathbf{N}$, тогаш $2k - 1$ е непарен број, неговиот следбеник $2k$ е парен, а $2k + 1$ е непарен. Значи, $2k - 1$ и $2k + 1$ се два последователни непарни броеви. Разликата на нивните квадрати е

$$(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - (4k^2 - 4k + 1) = 8k.$$

Според тоа, $8 \mid [(2k+1)^2 - (2k-1)^2]$.

133. Докажи дека производот $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 198 \cdot 199 \cdot 200$ се дели со 2^{100} , но не се дели со 2^{101} .

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 199 \cdot 200 &= \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100)(101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 198 \cdot 199 \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \\ &= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 197 \cdot 199)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 198 \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \\ &= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 197 \cdot 199) 2^{100} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} = 2^{100} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 197 \cdot 199), \end{aligned}$$

од што следува дека производот $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 198 \cdot 199 \cdot 200$ се дели со 2^{100} , но не се дели со 2^{101} бидејќи сите множители во заградата се непарни броеви, т.е. не се деливи со 2.

134. Производот на четири парни последователни природни броеви е 13440. Кои се тие броеви?

Решение. *Прв начин.* Нека бараните броеви се $2n, 2n+2, 2n+4, 2n+6$. Од условот на задачата последователно добиваме:

$$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6) = 13440$$

$$2n \cdot 2(n+1) \cdot 2(n+2) \cdot 2(n+3) = 13440$$

$$16n(n+1)(n+2)(n+3) = 13440$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 840$$

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = 840$$

Но, $5^4 = 625$ и $6^4 = 1296 > 840$, па затоа од последното равенство следува дека $n < 6$. Со непосредна проверка добиваме дека $n = 4$. Бараните последователни парни броеви се: 8, 10, 12 и 14.

Втор начин. Аналогно како претходно добиваме $n(n+1)(n+2)(n+3) = 840$.

Но, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, што значи $n(n+1)(n+2)(n+3) = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, од што заклучуваме $n = 4$ и бараните броеви се: 8, 10, 12 и 14.

135. Нека $a_1, a_2, \dots, a_9$ се цели броеви, а $b_1, b_2, \dots, b_9$ се истите броеви земени во поинаков редослед. Докажи дека бројот $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_9 - b_9)$ е парен.

Решение. Нека претпоставиме дека производот на броевите $c_i = a_i - b_i$, за $i = 1, 2, \dots, 9$ е непарен. Тоа значи дека сите негови множители се непарни броеви, па затоа и нивниот збир е непарен број. Но,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \dots + c_9 &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_9 - b_9) \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_9 - (b_1 + b_2 + \dots + b_9) = 0 \end{aligned}$$

т.е. е парен број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_9 - b_9)$ е парен број.

136. Природниот број n при делење со 3 дава остаток a , при делење со 5 дава остаток b , а при делење со 7 дава остаток c . Докажи дека бројот $70a + 21b + 15c - n$ се дели со 105.

Решение. Имаме $n = 3k + a = 5m + b = 7p + c$. За $n = 3k + a$ важи

$$70a + 21b + 15c - n = 70a + 21b + 15c - 3k - a = 3(23a + 7b + 5c - k),$$

што значи дека е делив со 3. Слично, за $n = 5m + b$ се добива

$$70a + 21b + 15c - n = 5(14a + 4b + 3c - m),$$

што значи дека се дели со 5, а за $n = 7p + c$ имаме

$$70a + 21b + 15c - n = 7(10a + 3b + 2c - p),$$

што значи дека се дели со 7. Броевите 3, 5 и 7 се заемно прости, па затоа $70a + 21b + 15c - n$ се дели со $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

137. Докажи дека за два природни броја a и b барем еден од броевите $a, b, a - b$ или $a + b$ се дели со 3.

Решение. Ако еден од броевите a или b е делив со 3, тогаш нема што да се докажува. Ако a и b не се деливи со 3, тогаш можни се следниве случаи:

- 1) секој од броевите a и b при делење со 3 дава остаток 1, т.е. $a = 3k + 1$ и $b = 3m + 1$, па тогаш $a - b = 3(k - m)$, т.е. $3 | (a - b)$,
- 2) секој од броевите a и b при делење со 3 дава остаток 2, т.е. $a = 3k + 2$ и $b = 3m + 2$, па тогаш $a - b = 3(k - m)$, т.е. $3 | (a - b)$,
- 3) еден од броевите a и b при делење со 3 дава остаток 1, а другиот остаток 2, на пример $a = 3k + 1$ и $b = 3m + 2$, па тогаш $a + b = 3(k + m + 1)$, т.е. $3 | (a + b)$.

138. Докажи дека за секој природен број n бројот $n(2n^2 + 1)$ се дели со 3.

Решение. Секој природен број n може да се запише во облик $3k, 3k + 1$ или $3k + 2$. Ако $n = 3k$, тогаш $3 | n$ и затоа $3 | n(2n^2 + 1)$. Ако $n = 3k + 1$, тогаш $2n^2 + 1 = 2(3k + 1)^2 + 1 = 3(6k^2 + 4k + 1)$, па затоа $3 | n(2n^2 + 1)$. Ако $n = 3k + 2$, тогаш $2n^2 + 1 = 2(3k + 2)^2 + 1 = 3(6k^2 + 8k + 3)$, па затоа $3 | n(2n^2 + 1)$.

139. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е делив со 9.

Решение. Нека $n - 1, n$ и $n + 1$ се три последователни природни броеви. Тогаш збирот на нивните кубови е

$$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n^2 + 2).$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека $n(n^2 + 2)$ е делив со 3. Можни се три случаи:

- 1) $n = 3k$ и тогаш $3 | n$, па затоа $3 | n(n^2 + 2)$,
- 2) $n = 3k + 1$ и тогаш $n^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$, па затоа $3 | n(n^2 + 2)$,
- 3) $n = 3k + 2$ и тогаш $n^2 + 2 = 3(3k^2 + 4k + 2)$, па затоа $3 | n(n^2 + 2)$.

140. Докажи дека за секој природен број n бројот $n^3 + 2012n$ се дели со 3, а ако n е парен број, тогаш тој се дели со 6.

Решение. Имаме $n^3 + 2012n = n^3 - n + 2013n$. Според задача 86 бројот $n^3 - n$ се дели со 3 и бидејќи $3 | 2013$, добиваме дека $3 | (n^3 + 2012n)$. Јасно, ако бројот n е парен, тогаш од $3 | 2013$ и $2 | n$ следува $6 | 2013n$ и од $6 | (n^3 - n)$, добиваме дека $6 | (n^3 + 2012n)$.

141. Докажи дека за секој природен број n бројот $m = n^3 + 3n^2 + 2n + 6$ се дели со 6.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} m &= n^3 + 3n^2 + 2n + 6 = n(n^2 + 3n + 2) + 6 \\ &= n[n(n + 2) + (n + 2)] + 6 = n(n + 1)(n + 2) + 6. \end{aligned}$$

Понатаму, ако во задача 86 ставиме $n = k - 1$, добиваме

$$n(n+1)(n+2) = (k-1)k(k+1) = k^3 - k,$$

што значи дека $6 \mid n(n+1)(n+2)$ и како $6 \mid 6$ заклучуваме дека

$$6 \mid m = n^3 + 3n^2 + 2n + 6.$$

142. Докажи дека за секој природен број n бројот $(n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 10)$ се дели со 24.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 10) &= (n^2 + 5n)^2 + 10(n^2 + 5n) + 25 - 1 - 24 \\ &= (n^2 + 5n + 5)^2 - 1 - 24 = (n^2 + 5n + 4)(n^2 + 5n + 6) - 24 \\ &= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - 24 = m - 24.\end{aligned}$$

Меѓу четири последователни природни броеви еден е делив со 2 и еден е делив со 4 (зошто?), па затоа нивниот производ m е делив со 8. Понатаму, меѓу четири последователни броеви барем еден е делив со 3, па затоа нивниот производ m е делив со 3. Според тоа, $3 \mid m$ и $8 \mid m$, што значи дека

$$24 \mid m \text{ и бидејќи } 24 \mid 24 \text{ добиваме дека } 24 \text{ е делител на } (n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 10).$$

143. Докажи дека разликата на четвртите степени на два броја, од кои првиот при делење со 5 дава остаток 1, а вториот при делење со 5 дава остаток 2, се дели со 5.

Решение. Разгледуваните броеви се од облик $5k+1$ и $5n+2$. За разликата на четвртите степени на овие броеви важи

$$\begin{aligned}(5n+2)^4 - (5k+1)^4 &= [(5n+2)^2 - (5k+1)^2][(5n+2)^2 + (5k+1)^2] \\ &= [(5n+2)^2 - (5k+1)^2][25(n^2 + k^2) + 5(4n+2k) + 5] \\ &= 5[(5n+2)^2 - (5k+1)^2][5(n^2 + k^2) + 4n + 2k + 1],\end{aligned}$$

т.е. таа се дели со 5.

144. Ако n е природен број, тогаш бројот $n^5 - 5n^3 + 4n$ се дели со 120. Докажи!

Решение. Дадениот израз го разложуваме на множители:

$$\begin{aligned}m = n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - 4n^2 - n^2 + 4) \\ &= n[n^2(n^2 - 4) - (n^2 - 4)] = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

Меѓу пет последователни природни броеви најмалку еден е делив со 2 и еден е делив со 4 (зошто?), па затоа нивниот производ m е делив со 8. Понатаму, меѓу пет последователни броеви барем еден е делив со 3 и барем еден е делив со 5, па затоа нивниот производ m е делив со 3 и со 5. Според тоа, $3 \mid m$, $5 \mid m$ и $8 \mid m$, па затоа $120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$ е делител на m , што и требаше да се докаже.

145. Ако n е непарен природен број, тогаш бројот $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ се дели со 512. Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
m &= n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) = (n^4 - 1)(n^8 - 1) \\
&= (n^4 - 1)[(n^4)^2 - 1] = (n^4 - 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1) = (n^4 - 1)^2(n^4 + 1) \\
&= [(n^2 - 1)(n^2 + 1)]^2(n^4 + 1) = (n^4 + 1)(n^2 + 1)^2(n - 1)^2(n + 1)^2.
\end{aligned}$$

Ако $n = 2k - 1$, тогаш

$$\begin{aligned}
m &= (n^4 + 1)(n^2 + 1)^2(n - 1)^2(n + 1)^2 \\
&= [(2k - 1)^4 + 1][(2k - 1)^2 + 1]^2(2k - 1 - 1)^2(2k - 1 + 1)^2 \\
&= [(4k^2 - 4k + 1)^2 + 1][4k^2 - 4k + 1]^2 \cdot 4(k - 1)^2 4k^2 \\
&= 16[(4k^2 - 4k)^2 + 2(4k^2 - 4k) + 2] \cdot 4(2k^2 - 2k + 1)^2(k - 1)^2 k^2 \\
&= 128[8(k^2 - k)^2 + 4k^2 - 4k + 1](2k^2 - 2k + 1)^2(k - 1)^2 k^2
\end{aligned}$$

Но, за секој $k \in \mathbf{N}$ имаме $2 \mid (k - 1)k$, па затоа $4 \mid (k - 1)^2 k^2$ и од последното равенство следува $512 \mid m$, што и требаше да се докаже.

146. Докажи дека, ако n е природен парен број поголем од 4, тогаш бројот $n^4 - 4n^3 - 3n^2 + 16n$ се дели со 384.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
m &= n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = n(n^3 - 4n^2 - 4n + 16) \\
&= n[n^2(n - 4) - 4(n - 4)] = n(n - 4)(n^2 - 4) = (n - 4)(n - 2)n(n + 2).
\end{aligned}$$

Но $n = 2k, k > 2$, па затоа

$$m = (n - 4)(n - 2)n(n + 2) = 16(k - 2)(k - 1)k(k + 1).$$

Аналогно, како и претходно заклучуваме дека $(k - 2)(k - 1)k(k + 1)$ се дели со 24, па од последното равенство следува дека $16 \cdot 24 \mid m$, т.е. $384 \mid m$, што и требаше да се докаже.

147. Нека a и b се природни броеви, такви што 5 не е делител на ab . Докажи дека разликата $a^4 - b^4$ е делива со 5.

Решение. Со примена на формулите за скратено множење добиваме

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Бидејќи 5 не е делител на ab добиваме дека $a = 5k \pm 1, 5k \pm 2$ и $b = 5m \pm 1, 5m \pm 2$. Понатаму,

- ако $a = 5k + 1$ и $b = 5m + 1$, или $a = 5k - 1$ и $b = 5m - 1$, или $a = 5k + 2$ и $b = 5m + 2$, или $a = 5k - 2$ и $b = 5m - 2$, тогаш јасно $5 \mid (a - b)$, па затоа $5 \mid (a^4 - b^4)$;
- ако $a = 5k + 1$ и $b = 5m - 1$, или $a = 5k - 1$ и $b = 5m + 1$, или $a = 5k + 2$ и $b = 5m - 2$, или $a = 5k - 2$ и $b = 5m + 2$, тогаш јасно $5 \mid (a + b)$, па затоа $5 \mid (a^4 - b^4)$;
- ако $a = 5k \pm 1$ и $b = 5m \pm 2$, тогаш

$$a^2 + b^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 + 25m^2 \pm 20m + 4 = 5(5k^2 \pm 2k + 5m^2 \pm 4m + 1),$$

па затоа $5|(a^4 - b^4)$; и

- ако $a = 5k \pm 2$ и $b = 5m \pm 1$, тогаш

$$a^2 + b^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 25m^2 \pm 10m + 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 5m^2 \pm 2m + 1),$$

па затоа $5|(a^4 - b^4)$.

Со тоа се разгледани сите можности, т.е. од $5 \nmid ab$, следува $5|(a^4 - b^4)$.

148. За било кој природен број a , еден од броевите $a^3 - a$ или $a^3 + a$ е делив со 10. Докажи!

Решение. Почнувајќи од 1 за цифрите на единиците на броевите a^3 и a имаме $(a^3, a) : (1,1), (8,2), (7,3), (4,4), (5,5), (6,6), (3,7), (2,8), (9,9)$ и $(0,0)$.

Во првиот, четвртиот, петтиот, шестиот, деветтиот и десеттиот случај $a^3 - a$ е делив со 10, а во вториот, третиот, седмиот и осмиот случај $a^3 + a$ е делив со 10. Значи, без разлика на која цифра завршува бројот a , еден од броевите $a^3 - a$ или $a^3 + a$ е делив со 10.

149. Докажи дека бројот $\underbrace{666\dots 6}_{2013\text{-пати}}$ не е квадрат на природен број.

Решение. Бројот можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{666\dots 6}_{2013\text{-пати}} = 6 \cdot \underbrace{111\dots 1}_{2013\text{-пати}}$$

па според тоа е делив со 2. Ако е полн квадрат, тогаш тој е делив со 4. Но $\underbrace{666\dots 6}_{2013\text{-пати}}$ е делив со 4 ако и само ако 66 е делив со 4. Бидејќи $66 = 16 \cdot 4 + 2$ и

тој не е делив со 4. Значи, $\underbrace{666\dots 6}_{2013\text{-пати}}$ не е полн квадрат.

150. Докажи дека бројот $9n^2 + 3n - 2$:

- а) не се дели со 9 за ниту еден природен број n ,
б) се дели со 2 за секој природен број n и
в) се дели со 4 за бесконечно многу природни броеви n .

Решение. а) За секој природен број n бројот $9n^2 + 3n - 2 = 3n(3n + 1) - 2$ не се дели со 3, па затоа не се дели ниту со 9.

б) Од $9n^2 + 3n - 2 = 3n(3n + 1) - 2$ и фактот дека производот $3n(3n + 1)$ се дели со 2 следува дека $9n^2 + 3n - 2$ се дели со 2 за секој природен број n .

в) Лесно се гледа дека за секој природен број n од облик $n = 4k + 2$ и $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, бројот $9n^2 + 3n - 2$ се дели со 4. Провери!

151. За секој цел број a , бројот $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$ е делив со 24. Докажи!

Решение. Доволно е да докажеме дека $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$ е делив со 3 и 8. Да забележиме дека

$$\begin{aligned}
a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a &= a(a^3 + 6a^2 + 11a + 6) \\
&= a(a^3 + a^2 + 5a^2 + 5a + 6a + 6) \\
&= a[a^2(a+1) + 5a(a+1) + 6(a+1)] \\
&= a(a+1)(a^2 + 5a + 6) = a(a+1)[(a^2 + 2a) + (3a + 6)] \\
&= a(a+1)[a(a+2) + 3(a+2)] = a(a+1)(a+2)(a+3).
\end{aligned}$$

Ако a е цел број, тогаш $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$ е производ на четири последователни цели броеви. Барем еден од нив е делив со 3. Исто така, барем еден од нив е делив со 2, а барем еден од нив е делив со 4, различен од оној кој е делив со 2. Според тоа, производот на $a, a+1, a+2, a+3$ е делив со $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

152. Докажи дека за секој непарен природен број x бројот

$$\text{а) } P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9, \quad \text{б) } P(x) = x^3 + 7x^2 - 5x - 75$$

се дели со 8.

Решение. а) Дадениот полином го разложуваме на множители

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = x^3 + 6x^2 + 9x - x^2 - 6x - 9 \\
&= x(x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 6x + 9) = (x^2 + 6x + 9)(x - 1) = (x + 3)^2(x - 1),
\end{aligned}$$

па затоа ако $x = 2k + 1$, тогаш $P(x) = 8k(k + 2)^2$, т.е. $8 \mid P(x)$.

б) Аналогно како во решението под а) наоѓаме

$$P(x) = x^3 + 7x^2 - 5x - 75 = (x - 3)(x + 5)^2,$$

па затоа ако $x = 2k + 1$, тогаш $P(x) = 8(k - 1)(k + 3)^2$, т.е. $8 \mid P(x)$.

153. Докажи дека за секој непарен природен број x бројот $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ се дели со 48.

Решение. Имаме

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1) = (x + 3)(x + 1)(x - 1),$$

па затоа ако $x = 2k + 1$, тогаш $P(x) = 8k(k + 1)(k + 2)$. Меѓу броевите $k, k + 1, k + 2$ најмалку еден е парен и точно еден се дели со 3, па затоа $6 \mid k(k + 1)(k + 2)$, што значи дека $48 \mid P(x)$.

154. Нека $k \in \mathbf{N}$ и нека $P(x) = x^{1998} - x^{1996} - x^4 - 3kx + 2x + 3k + 1$. Докажи дека за секој цел број n важи $P(n) \neq 0$.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои природен број n таков што $P(n) = 0$. Тогаш

$$\begin{aligned}
P(x) &= P(x) - P(n) = x^{1998} - n^{1998} - x^{1996} + n^{1996} - x^4 + n^4 - 3kx + 3kn + 2x - 2n \\
&= (x - n)(x^{1997} + \dots + n^{1997}) - (x - n)(x^{1995} + \dots + n^{1995}) \\
&\quad - (x - n)(x^3 + x^2n + xn^2 + n^3) - 3k(x - n) + 2(x - n) \\
&= (x - n)Q(x),
\end{aligned}$$

каде $Q(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Имаме

$$P(-1) = 6k - 2 = (-1 - n)Q(-1)$$

$$P(0) = 3k + 1 = -nQ(0)$$

$$P(1) = 2 = (1 - n)Q(1).$$

Броевите $-1 - n$, $-n$ и $1 - n$ се три последователни цели броеви, па затоа еден од нив е делив со 3, што значи дека еден од броевите $6k - 2 = 2(3k - 1)$, $3k + 1$, 2 е делив со 3, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $P(n) \neq 0$ за секој природен број n .

155. Дали постојат цели броеви x и y такви што $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ е полн квадрат на природен број.

Решение. За секој цел број a , бројот $a(a + 1)$ е парен број, па според тоа $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$ е непарен број, т.е. $a^2 + a + 1 = 2k + 1$. Значи, постојат m и n такви што

$$x^2 + x + 1 = 2m + 1,$$

$$y^2 + y + 1 = 2n + 1.$$

Сега,

$$(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2.$$

Ако

$$(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$$

е полн квадрат, тогаш тој е полн квадрат на парен број. Но, квадратот на парен број е делив со 4, а $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ не е делив со 4. Според тоа $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ не е полн квадрат на природен број.

156. Најди ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на почетниот број.

Решение. Бараниот број е трицифрен и е делив со 11, па може да се запише во облик $11u$ каде $10 \leq u \leq 90$, $u \in \mathbf{N}$.

Нека $u = 10a + b$, $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Ќе разгледаме два случаи:

- i) Ако $a + b < 10$, тогаш бараниот број е $100a + 10(a + b) + b$ и од условот на задачата следува

$$a^2 + (a + b)^2 + b^2 = 10a + b, \text{ т.е. } 2(a^2 + b^2 + ab - 5a) = b,$$

што значи дека b мора да е парен број, т.е. $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 5, b = 0$, т.е. 550 е бараниот број.

- ii) Ако $a + b \geq 10$, тогаш бараниот број е

$$100(a + 1) + 10(a + b - 10) + b$$

и од условот на задачата имаме

$$(a + 1)^2 + (a + b - 10)^2 + b^2 = 10a + b$$

т.е.

$$2(a^2 + b^2 + ab - 14a - 10b + 50) = b - 1,$$

па затоа b мора да биде непарен број т.е. $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 7, b = 3$, т.е. 803 е бараниот број.

Значи, единствени броеви кои ги задоволуваат условите од задачата се 550 и 803.

157. Во четирицифрен број цифрите на илјадарките и десетките се 7 и 2, соодветно. Кои цифри треба да стојат на местото на стотките и единиците, за да бројот се дели со 2 и 3, но не и со нивните степени?

Решение. Ако цифрата на стотките е a , а цифрата на единиците е b , тогаш бројот е од видот $\overline{7a2b}$, $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. За да бројот $\overline{7a2b}$ се дели со 2 треба $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, но бидејќи бројот не треба да се дели со степените на бројот 2 заклучуваме дека неговиот двоцифрен завршеток не смее да се дели со 4 па затоа $b \in \{2, 6\}$.

а) Ако $b = 2$, тогаш бројот е од видот $\overline{7a22}$ и бидејќи тој треба да биде делив со 3 добиваме дека збирот на цифрите $7 + a + 2 + 2 = 11 + a$ треба да биде делив со 3, па затоа $a \in \{1, 4, 7\}$. Меѓутоа, за $a = 7$ го добиваме бројот 7722 кој е делив со $9 = 3^2$, а тоа противречи на условот на задачата. Според тоа, во овој случај броевите 7122 и 7422 се решение на задачата.

б) Ако $b = 6$, тогаш бројот е од видот $\overline{7a26}$ и бидејќи тој треба да биде делив со 3 добиваме дека збирот на цифрите $7 + a + 2 + 6 = 15 + a$ треба да биде делив со 3, па затоа $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Меѓутоа, за $a = 3$ го добиваме бројот 7326 кој е делив со $9 = 3^2$, а тоа противречи на условот на задачата. Според тоа, во овој случај броевите 7026, 7626 и 7926 се решение на задачата.

Конечно, решение на задачата се броевите 7026, 7122, 7422, 7626 и 7926.

158. Даден е бројот $a = 19581958\dots1958$. Докажи дека дадениот број е делив со 22, $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{100 \text{ групи } 1958}$

но не е делив со 44.

Решение. Јасно, $2 \mid 1958$, $4 \nmid 1958$ и $11 \mid 1958$, па затоа $22 \mid 1958$ и $44 \nmid 1958$. Понатаму,

$$a = \underbrace{19581958\dots1958}_{100 \text{ групи } 1958} = 1958 \cdot \underbrace{100010001\dots10001}_{100 \text{ единици}}$$

од што, согласно претходно изнесеното, следува $22 \mid a$ и $44 \nmid a$.

159. Докажи дека $123 \mid \underbrace{1111\dots111}_{75 \text{ единици}}$.

Решение. Доволно е да докажеме дека дадениот $a = \underbrace{1111\dots111}_{75 \text{ единици}}$ број се дели

со 3 и со 41. Збирот на цифрите на a е $75 \cdot 1 = 75$ и тој се дели со 3, па затоа $3 \mid a$. Од друга страна имаме

$$a = \underbrace{1111\ldots 111}_{75 \text{ единици}} = 41 \cdot \underbrace{2710027100\ldots 00271}_{75 \text{ единици}}, \text{ т.е. } 41 | a.$$

Конечно, од $3 | a$ и $41 | a$ следува $123 | a$.

160. Докажи дека $81 | \underbrace{1111\ldots 111}_{81 \text{ единица}}.$

Решение. Збирот на цифрите на бројот

$$a = \underbrace{1111\ldots 111}_{81 \text{ единица}}$$

е 81, па затоа $9 | a$. Понатаму, ако дадениот број го поделиме со 9 го добиваме бројот

$$b = \underbrace{12345679012\ldots 012345679}_{9 \text{ групи од } 12345679}.$$

Збирот на цифрите на бројот b е $9(1+2+3+4+5+6+7+9)$ и тој е делив со 9, па затоа $9 | b$. Според тоа, $a = 9b$ и $b = 9c$, па затоа $a = 81c$, т.е. $81 | c$.

161. Даден е бројот $\underbrace{212121\ldots 2121212}_{1980 \text{ групи } 21}$. Докажи дека овој број е делив со 99, но не е делив со 198.

Решение. Збирот на цифрите на дадениот број е $1980 \cdot (1+2) = 9 \cdot 660$, па затоа е делив со 9. Бидејќи разликата на збирот на цифрите на парните и збирот на цифрите на непарните места е $1980 \cdot (2-1) = 1980 = 11 \cdot 180$ заклучуваме дека дадениот број се дели и со 11. Според тоа, дадениот број се дели со $9 \cdot 11 = 99$, но не се дели со 198 бидејќи е непарен.

162. Ако $n \in \mathbf{N}$, тогаш $6 | (n^3 + 2003n + 2004)$. Докажи!

Решение. Јасно, $6 | 2004$, па затоа $6 | 2004(n+1)$. Понатаму, 6 е делител на производот на било кои три последователни цели броеви, што значи $6 | (n-1)n(n+1) = n^3 - n$. Конечно,

$$6 | [n^3 - n + 2004(n+1)] = n^3 + 2003n + 2004.$$

163. Најди ги сите природни броеви n за кои бројот $3(n^2 + n) + 7$ е делив со 5.

Решение. Ако бројот n има остаток 0,1,2,3,4 при делење со 5, тогаш $n^2 + n$ при делење со 5 има остаток 0,2,1,2,0, соодветно. Затоа бројот $3(n^2 + n) + 7$ е делив со 5 ако и само ако n при делење со 5 има остаток 2, т.е. $n = 5k + 2$, $k \in \mathbf{N}$.

164. Нека $x = 11\ldots 1$ Докажи дека $\underbrace{x^3 - x^2 - 2x}_{20}$ е делив со 1188.

Решение. Ако го разложиме $x^3 - x^2 - 2x$ на множители и замениме за x , добиваме:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1) = \underset{20}{11} \dots \underset{19}{1} \cdot \underset{18}{11} \dots 12 \cdot 11 \dots 109.$$

Првиот број е делив со 11, вториот со 4 и 3, а третиот со 9, па значи нивниот производ е делив со $11 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 = 1188$.

165. Производот на два последователни природни броеви е делив со 12 ако поголемиот од овие броеви е полн квадрат. Докажи!

Решение. Двата последователни природни броеви да ги означиме со x и $x+1$. Од $x+1 = m^2$ следува $x = m^2 - 1$ па затоа

$$x(x+1) = m^2(m^2 - 1) = m(m-1)m(m+1). \quad (1)$$

Во производот на десната страна на (1) има три последователни природни броеви, па затоа $3 \mid x(x+1)$. Сега доволно е да докажеме дека $4 \mid x(x+1)$.

Можни се два случаи:

- $m = 2k$ и тогаш $m^2 = 4k^2$, што значи дека $4 \mid m^2(m^2 - 1) = x(x+1)$.

- $m = 2k+1$ и тогаш $m^2 - 1 = 4k(k+1)$, што значи дека

$$4 \mid m^2(m^2 - 1) = x(x+1).$$

166. Производот на три последователни природни броеви е делив со 60 ако средниот број полн квадрат. Докажи!

Решение. Нека трите последователни броеви се $x-1, x$ и $x+1$ и нека $x = m^2$. Тогаш

$$(x-1)x(x+1) = m^2(m^2 - 1)(m^2 + 1). \quad (1)$$

Од задача 165 следува дека $12 \mid x(x-1)(x+1)$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $5 \mid x(x-1)(x+1)$. Можни се следните случаи:

- $5 \mid m$ и тогаш јасно $5 \mid x(x-1)(x+1)$,

- $m = 5k \pm 1$ и тогаш $m^2 - 1 = 5k(5k \pm 2)$, па затоа $5 \mid x(x-1)(x+1)$,

- $m = 5k \pm 2$ и тогаш $m^2 + 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 1)$, па затоа $5 \mid x(x-1)(x+1)$.

167. Нека A и B се два природни броја кои се напишани со исти цифри (секоја цифра се појавува ист број пати и во едниот и во другиот број, но не мора да значи дека е на истото место). Ако $A+B=10^{10}$, докажи дека бројот A е делив со 10.

Решение. Бидејќи 10^{10} е најмалиот природен број со 11 цифри, следува дека броевите A и B се десетцифрени броеви. Нека $A = \overline{a_{10}a_9a_8\dots a_2a_1}$ и $B = \overline{b_{10}b_9b_8\dots b_2b_1}$. Од $A+B=10^{10}$ следува дека постои некој $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ таков што $a_1 + b_1 = 0$, ..., $a_{i-1} + b_{i-1} = 0$, $a_i + b_i = 10$, $a_{i+1} + b_{i+1} = 9$, ..., $a_{10} + b_{10} = 9$. Бидејќи цифрите на броевите A и B се еднакви, собирајќи ги горните равенства, добиваме $2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) = 10 + (10-i)9$, при што искористивме дека $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$.

Од тоа што $2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})$ е парен број, следува дека и $10 - i$ е парен број, т.е. $i \neq 1$. Значи $a_1 + b_1 = 0$, од каде што следува дека $a_1 = b_1 = 0$. Според тоа, бројот A (а исто така и бројот B) е делив со 10.

168. Докажи дека бројот

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 1988^3 + 1999^3$$

се дели со 1999.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + 1999^3 &= (1^3 + 1998^3) + (2^3 + 1997^3) + \dots + (999^3 + 1000^3) + 1999^3 \\ &= (1 + 1998)(1 - 1998 + 1998^2) + (2 + 1997)(2^2 + 2 \cdot 1997 + 1997^2) + \\ &\quad + \dots + (999 + 1000)(999^2 + 999 \cdot 1000 + 1000^2) + 1999^3, \end{aligned}$$

од каде следува дека $1999 \mid (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 1988^3 + 1999^3)$.

169. Докажи дека бројот $2^{198} + 1$ е делив со бројот $2^{99} + 2^{50} + 1$.

Решение. Од тоа што

$$\begin{aligned} 2^{198} + 1 &= (2^{99})^2 + 2 \cdot 2^{99} + 1 - 2 \cdot 2^{99} = (2^{99} + 1)^2 - 2^{100} \\ &= (2^{99} + 1)^2 - (2^{50})^2 = (2^{99} + 1 + 2^{50})(2^{99} + 1 - 2^{50}) \end{aligned}$$

непосредно следува дека $2^{99} + 2^{50} + 1$ е делител на $2^{198} + 1$.

170. Докажи дека бројот $2003^{2003} - 2003$ се дели со 3.

Решение. Бројот $2003^{2003} - 2003$ го разложуваме на множители и добиваме

$$2003^{2003} - 2003 = 2003(2003^{2002} - 1) = 2003(2003^{1001} - 1)(2003^{1001} + 1).$$

Понатаму $2003^{1001} - 1$, 2003^{1001} , $2003^{1001} + 1$ се три последователни природни броеви, па затоа еден од нив се дели со 3 и бидејќи 2003^{1001} не се дели со 3, заклучуваме дека еден од броевите $2003^{1001} - 1$ и $2003^{1001} + 1$ се дели со 3, што значи дека $2003^{2003} - 2003$ се дели со 3.

171. Докажи дека бројот $1 + 2^{2006}$ се дели со 5.

Решение. Квадрат на природен број чија последна цифра е 2 завршува на цифрата 4, а квадрат на таков број завршува на цифрата 6. Степен на природен број чија последна цифра е 6 завршува на цифрата 6. Од

$$2^{2006} = (2^2)^{1003} = 4^{1003} = 4^{2 \cdot 501 + 1} = (4^2)^{501} \cdot 4 = 16^{501} \cdot 4$$

заклучуваме дека бројот 2^{2006} завршува на цифрата 4, па затоа бројот $1 + 2^{2006}$ завршува на цифрата 5, т.е. тој се дели со 5.

172. Докажи дека бројот $2007^{2005} - 2007$ се дели со 90.

Решение. Имаме $2007^{2005} - 2007 = 2007(2007^{2004} - 1)$. Бројот 2007 се дели со 9. Бројот $2007^{2004} - 1$ е делив со 10. Навистина, 2007^4 завршува на цифрата

1, па затоа $2007^{2004} - 1 = (2007^4)^{501} - 1$ завршува на цифрата 0, односно се дели со 10. Конечно бројот $2007(2007^{2004} - 1)$ е делив со $9 \cdot 10 = 90$.

173. Дали збирот $1004^2 - 1003^2 + 1002^2 - 1001^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ се дели со 2008?

Решение. Од формулите за скратено множење следува

$$\begin{aligned} 1004^2 - 1003^2 + \dots + 2^2 - 1^2 &= (1004 + 1003)(1004 - 1003) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) \\ &= 1004 + 1003 + 1002 + 1001 + \dots + 3 + 4 + 2 + 1 \\ &= \frac{1004(1004+1)}{2} = 502 \cdot 1005 = 2 \cdot 251 \cdot 1005, \end{aligned}$$

што значи дека збирот се дели со 2, а не се дели со 4. Но, бројот 2008 се дели со 4, па затоа дадениот збир не се дели со 2008.

174. Докажи дека збирот $s = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997} + 2^{1998}$ се дели со 126.

Решение. Прво да забележиме дека $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$. Според тоа,

$$\begin{aligned} s &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + (2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}) + \\ &\quad + \dots + (2^{1993} + 2^{1994} + 2^{1995} + 2^{1996} + 2^{1997} + 2^{1998}) \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + 2^6(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + \\ &\quad + 2^{1992}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6)(1 + 2^6 + 2^{12} + \dots + 2^{1992}) \\ &= 126(1 + 2^6 + 2^{12} + \dots + 2^{1992}), \end{aligned}$$

што значи дека $126 | s$.

175. Докажи дека збирот $s = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997} + 2^{1998} + 2^{1999} + 2^{2000}$ се дели со 30.

Решение. Прво да забележиме дека $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$. Според тоа,

$$\begin{aligned} s &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + (2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}) + \\ &\quad + \dots + (2^{1993} + 2^{1994} + 2^{1995} + 2^{1996}) + (2^{1997} + 2^{1998} + 2^{1999} + 2^{2000}) \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^4(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^8(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \\ &\quad + 2^{1992}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^{1996}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1992} + 2^{1996}) \\ &= 30(1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1992} + 2^{1996}), \end{aligned}$$

што значи дека $30 | s$.

176. Докажи дека збирот $s = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2001} + 5^{2002} + 5^{2003}$ се дели со 31.

Решение. Прво да забележиме дека $1 + 5 + 5^2 = 31$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
s &= (1+5+5^2) + (5^3+5^4+5^5) + \dots + (5^{2001}+5^{2002}+5^{2003}) \\
&= (1+5+5^2) + 5^3(1+5+5^2) + \dots + 5^{2001}(1+5+5^2) \\
&= (1+5+5^2)(1+5^3+\dots+5^{1998}+5^{2001}) \\
&= 31(1+5^3+\dots+5^{1998}+5^{2001}),
\end{aligned}$$

што значи дека $31|s$.

177. Докажи дека бројот $1989^{1989} + 1$ е делив со 10.

Решение. Бројот 1989 завршува на цифрата 9, па затоа бројот 1989^2 завршува на цифрата 1, што значи дека бројот $1989^{1988} = (1989^2)^{994}$ завршува на цифрата 1. Според тоа, бројот

$$1989^{1989} = 1989^{1988} \cdot 1989$$

завршува на цифрата 9, па затоа дадениот број $1989^{1989} + 1$ завршува на цифрата 0, т.е. тој се дели со 10.

178. Докажи дека бројот $2^{1992} - 1$ се дели со 5.

Решение. Имаме $2^{1992} = (2^4)^{498} = 16^{498}$, па затоа овој број завршува на цифрата 6. Според тоа, бројот $2^{1992} - 1$ завршува на цифрата 5, па затоа тој се дели со 5.

179. Докажи дека $81|(10^{1990} - 10)$.

Решение. Јасно, $10^{1990} - 10 = \underbrace{9999\dots99990}_{1989 \text{ дѐветки}} = 9 \cdot \underbrace{1111\dots111110}_{1989 \text{ единици}}$. Збирот на цифрите на бројот $\underbrace{1111\dots1110}_{1989 \text{ единици}}$ е 1989 и тој е делив со 9, па затоа и бројот $\underbrace{1111\dots111110}_{1989 \text{ единици}}$ е делив со 9. Според тоа, $81 = 9 \cdot 9 | 9 \cdot \underbrace{1111\dots111110}_{1989 \text{ единици}}$ па затоа $81|(10^{1990} - 10)$.

180. Ако n е природен број, тогаш $6|(10^n - 4)$. Докажи!

Решение. Бројот $10^n - 4$ е парен, па затоа $2|(10^n - 4)$. Понатаму,

$$10^n - 4 = \underbrace{100\dots000}_{n \text{ нули}} - 4 = \underbrace{999\dots9996}_{(n-1) \text{ дев.}},$$

па затоа збирот на цифрите на $10^n - 4$ е $9(n-1) + 6$ и тој е делив со 3, од што следува дека $10^n - 4$ е делив со 3. Конечно, $2|(10^n - 4)$ и $3|(10^n - 4)$, па затоа $6|(10^n - 4)$.

181. Ако n е природен број, тогаш 45 е делител на $10^n + 35$. Докажи!

Решение. За $n=1$, важи $10^1 + 35 = 45$, па затоа $45 \mid (10^1 + 35)$. Нека $n \geq 2$.
Тогаш $10^n + 35 = 10000 \dots 000035$, па затоа $5 \mid (10^n + 35)$. Но, збирот на $\underbrace{(n-2)\text{-нули}}_{(n-2)\text{-нули}}$ цифрите на овој број е $1+3+5=9$, па затоа $9 \mid (10^n + 35)$. Конечно, од $5 \mid (10^n + 35)$ и $9 \mid (10^n + 35)$ следува $45 \mid (10^n + 35)$.

182. Ако n е природен број поголем од 1, тогаш 36 е делител на $10^n + 8$. Докажи!

Решение. За $n \geq 2$ имаме $10^n + 8 = 10000 \dots 0008$. Збирот на цифрите на овој $\underbrace{(n-1)\text{-нула}}_{(n-1)\text{-нула}}$ број е $1+8=9$, па затоа $9 \mid (10^n + 8)$ и од тоа што неговиот двоцифрен завршеток 08 се дели со 4 добиваме дека $4 \mid (10^n + 8)$. Конечно, од $9 \mid (10^n + 8)$ и $4 \mid (10^n + 8)$ следува $36 \mid (10^n + 8)$.

183. Докажи дека бројот $n^2 - 7$ не се дели со 5 за ниту еден природен број n .

Решение. Според признакот за деливост со бројот 5, доволно е да докажеме дека за секој природен број n цифрата на единиците на бројот $n^2 - 7$ е различна од 0 и 5. Имено, бројот n^2 завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа бројот $n^2 - 7$ завршува на една од цифрите 3, 4, 7, 8, 9 или 2, соодветно, од каде што следува дека за секој природен број n , бројот $n^2 - 7$ не е делив со 5.

184. Природен број n е зголемен за четирикратната реципрочна вредност и тој збир е квадриран. Ако добиениот број се намали за квадратот на четирикратната реципрочна вредност на бројот n , тогаш добиениот број не е делив со 5. Докажи!

Решение. Согласно условот на задачата $(n + \frac{4}{n})^2 - (\frac{4}{n})^2 = n(n + \frac{8}{n}) = n^2 + 8$.
Јасно, $n^2 + 8$ е природен број. Цифрата на единиците на бројот n^2 може да биде 0, 1, 4, 5, 6 и 9, па затоа цифрата на единиците $n^2 + 8$ може да биде 8, 9, 2, 3, 4 и 7, соодветно, што значи дека за секој природен број n бројот $n^2 + 8$ не се дели со 5.

185. Нека n е природен број таков да цифрата на единиците на бројот $n^2 + 2n$ е 4. Кои се последните две цифри на бројот $n^2 + 2n$.

Решение. Бројот $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ завршува на цифрата 5, што значи дека тој се дели со 5. Според тоа и бројот $n+1$ се дели со 5, т.е. $n+1 = 10k + 5$, $k \in \mathbb{N}$. Од досега изнесенот следува дека

$$(n+1)^2 = (10k+5)^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 100k(k+1) + 25,$$

па затоа двоцифрениот завршеток на бројот $(n+1)^2$ е 25, од што следува дека двоцифрениот завршеток на бројот $n^2 + 2n$ е 24.

186. Трифрен број n е триесет и три пати поголем од збирот на своите цифри. Докажи дека $9|n$.

Решение. Нека $n = 100a + 10b + c$. Имаме, $n = 33(a + b + c)$ и бидејќи $3|33$ добиваме дека $3|n$. Сега од признакот за деливост со 3 следува дека збирот на цифрите на бројот n е делив со 3, т.е. $a + b + c = 3k$, за некој $k \in \mathbf{N}$. Според тоа, $n = 33(a + b + c) = 33 \cdot 3k = 9 \cdot 11k$, па затоа $9|n$.

187. Бројот 31322_4 запиши го во систем со основа 10.

Решение. Имаме $31322_4 = 2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 = 890$, па затоа $31322_4 = 890_{10}$.

188. Бројот $5a19_{11}$ запиши го во систем со основа 10.

Решение. Имаме $5a19_{11} = 9 + 1 \cdot 11^1 + 10 \cdot 11^2 + 5 \cdot 11^3 = 7885$, па затоа $5a19_{11} = 7885_{10}$.

189. Најди природен број b таков да во систем со основа b бројот 792 е делив со 297.

Решение. Броевите ја содржат цифрата 9, па затоа за основата на бројниот систем важи $b \geq 10$. Во секој систем со основа $b \geq 10$ важи

$$2 \cdot 297 < 2 \cdot 300 = 600 < 792 < 800 = 4 \cdot 200 < 4 \cdot 297,$$

од што следува дека $792 = 3 \cdot 297$, па затоа последователно добиваме

$$7b^2 + 9b + 2 = 3(2b^2 + 9b + 7)$$

$$b^2 - 18b - 19 = 0,$$

$$(b - 19)(b + 1) = 0,$$

$$b = 19 \text{ или } b = -1.$$

Јасно, решение на задачата е $b = 19$.

190. Напиши ги таблиците за собирање и множење на ненегативните цели броеви помали од основата за бројниот систем со основа 8.

Решение. Имаме

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

191. Најди ги сите природни броеви b такви да во систем со основа b е исполнето равенството $11 \cdot 11 = 121$.

Решение. Од условот имаме $11_b \cdot 11_b = 121_b$ и јасно $b \geq 2$. Според тоа, треба да важи $(b+1)(b+1) = b^2 + 2b + 1$ и $b \geq 2$. Јасно, последното равенство е исполнето за секој $b \geq 2$.

192. Најди ги сите $n \in \mathbb{N}$ деливи со 11, такви што сите броеви кои се добиваат со произволна прераспределба на цифрите на бројот n повторно се деливи со 11.

Решение. Од условот $11|n$ и бројот n мора да е најмалку двоцифрен. Нека

$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ каде $a_i, 0 \leq i \leq k$ се цифри и $a_k \neq 0$. Јасно, $k \geq 1$.

Ќе покажеме дека сите цифри во бројот n се еднакви. Имено, од условот на задачата и бројот

$$n' = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{i+1} a_{i-1} a_i a_{i-2} \dots a_0}$$

(n' е добиен од n со промена на местата на цифрите a_{i-1} и a_i) е делив со

11. Значи $11|n - n'$, т.е. $11|10^{i-1}(\overline{a_i a_{i-1}} - \overline{a_{i-1} a_i})$ или $11|10^{i-1} \cdot 9(a_i - a_{i-1})$, па мора да важи $a_i = a_{i-1}$.

Следува, $n = a \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{k+1}$. Лесно се проверува дека $11|n$ ако и само ако k е непарен број.

193. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a, b) такви што броевите $\frac{a^3 b - 1}{a + 1}$ и $\frac{b^3 a + 1}{b - 1}$ се позитивни цели броеви.

Решение. За дадени природни броеви a и b бројот $a^3 b - 1$ можеме да го запишеме во облик

$$a^3 b - 1 = b(a^3 + 1) - (b + 1).$$

Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $a + 1 | a^3 b - 1$ и $a + 1 | b(a^3 + 1)$, па затоа $a + 1 | b + 1$.

Аналогно, $b^3 a + 1$ можеме да го запишеме во облик

$$b^3 a + 1 = a(b^3 - 1) + (a + 1).$$

Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $b-1|b^3a+1$ и $b-1|a(b^3-1)$, па затоа $b-1|a+1$.

Сега, на потполно аналоген начин се добива дека $b-1|b+1$. Од равенството

$$b+1-(b-1)=2,$$

следува $b-1|2$, па имаме две можности.

Случај 1. $b=2$. Тогаш $a+1|b+1=3$ и единствена можност е $a=2$. Во овој случај единствено решение е $(a,b)=(2,2)$.

Случај 2. $b=3$. Тогаш $a+1|b+1=4$, па имаме две можности $a=1$ или $a=3$. Решенија во овој случај се $(a,b)=(1,3)$ и $(a,b)=(3,3)$.

Конечно бараните подредени парови се $(a,b) \in \{(1,3), (2,2), (3,3)\}$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ВТОРА ГЛАВА

1. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите 11111111 и $\underbrace{111\dots 11}_{100}$.

Решение. Нека $b = 11111111$ и $a = \underbrace{111\dots 11}_{100}$. Кога ќе ги поделиме овие броеви, се добива $1111 = a - qb$, каде целиот број q е количникот. Значи дека секој заеднички делител на a и b го дели и бројот 1111, па бараниот број е најголемиот заеднички делител на b и 1111, а бидејќи b е делив со 1111, следува дека $\text{NZD}(a, b) = 1111$.

2. Најди го најголемиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.

Решение. Имаме $\text{NZS}(3, 4, 5, 6, 7) = 420$. Од условот на задачата следува дека k е најголемиот природен број таков да $420k \leq 9999$ и тоа е бројот 23. Конечно, бараниот број е

$$420 \cdot 23 + 2 = 9662.$$

3. Марија има сума пари кои може да ги подели на делови, така што секој дел да има или 18, или 24, или 30 денари и притоа секогаш да и остане еден денар. Која е најмалата можна сума со која располага Марија?

Решение. Имаме $\text{NZS}(18, 24, 30) = 360$, што значи дека најмалата сума со која располага Марија е $360 + 1 = 361$ денари.

4. На бројот 1972 допиши му од десно четири цифри така да добиениот број биде делив со 7, 5 и 72.

Решение. Добиеениот осумцифрен број мора да е делив со

$$\text{NZS}(5, 7, 72) = 2520.$$

Од

$$19720000 = 2520 \cdot 7825 + 1000,$$

добиваме дека со додавање на $2520 - 1000 = 1520$ на бројот 19720000 го добиваме бројот 19721520 кој е најмалиот меѓу броевите со бараното својство. Зголемувајќи го добиениот број последователно за 2520, ги добиваме броевите 19724040, 19726560 и 19729080.

5. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 7 даваат остаток 2, при делење со 9 даваат остаток 5 а при делење со 12 даваат остаток 7.

Решение. Нека x е број кој ги исполнува условите од задачата. Тогаш, постојат природни броеви k , m и n такви што

$$x = 7k + 2$$

$$x = 9m + 4$$

$$x = 12n + 7.$$

Ако на секое од претходните равенства додадеме 5, добиваме

$$x+5=7(k+1)$$

$$x+5=9(m+1)$$

$$x+5=12(n+1).$$

Значи, $7,9,12|x+5$ од каде добиваме $\text{NZS}(7,9,12)=252|x+5$. Постои природен број q таков што $x+5=252q$ односно $x=252q-5$. Вредности за q за кои $252q-5$ е трицифрен број се 1, 2 и 3. Притоа се добиваат броевите 247, 499, 751. Не е тешко да се провери дека секој од трите определени броеви ги исполнува условите од задачата.

6. Производот на два природни броја 34560, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Определи ги сите парови природни броеви кои го задоволуваат тоа својство.

Решение. Со a и b да ги означиме бараните броеви. Од условот следува $\text{NZD}(a,b)=24$, па затоа $a=24m$ и $b=24n$, каде m и n се заемно прости броеви. Понатаму, $ab=34560$, па затоа $34560=24m \cdot 24n$, т.е. $mn=60$. Значи, бројот 60 треба да го запишеме како производ на два заемно прости броеви. Сега имаме

$$60=1 \cdot 60=3 \cdot 20=4 \cdot 15=5 \cdot 12.$$

Бараните броеви се: 24 и 1440, 72 и 480, 96 и 360, 120 и 288.

7. За кои природни броеви m и n важи

$$\text{NZD}(m,n)=8 \text{ и } \text{NZS}(m,n)=168?$$

Решение. Нека $m=8a$, $n=8b$, при што $a,b \in \mathbf{N}$ и $\text{NZD}(a,b)=1$. Но,

$$mn=\text{NZD}(m,n)\text{NZS}(m,n)$$

и ако замениме во последното равенство добиваме $8a \cdot 8b=8 \cdot 168$, т.е. $ab=21$, од каде наоѓаме дека $(a,b) \in \{(1,21), (3,7)\}$. Конечно, за m и n ги имаме следниве решенија:

$$m=8a=8 \cdot 1=8, n=8b=8 \cdot 21=168, \text{ т.е. } (m,n) \in \{(8,168), (168,8)\} \text{ и}$$

$$m=8a=8 \cdot 3=24, n=8b=8 \cdot 7=56, \text{ т.е. } (m,n) \in \{(24,56), (56,24)\}.$$

8. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=150 \\ \text{NZD}(x,y)=30. \end{cases}$$

Решение. Од втората равенка добиваме $x=30a$, $y=30b$, каде $a,b \in \mathbf{N}$ и $\text{NZD}(a,b)=1$. Со замена во правата равенка наоѓаме $a+b=5$, од каде добиваме $a \in \{1,2,3,4\}$ и затоа $x \in \{30,60,90,120\}$. Соодветните вредности за y ги определуваме од равенката $y=150-x$.

9. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека

$$\text{NZD}(a,b)=\text{NZD}(5a+3b,13a+8b).$$

Решение. Од својствата на NZD следува

$$\begin{aligned} \text{NZD}(5a+3b,13a+8b) &= \text{NZD}(8(5a+3b)-3(13a+8b),13a+b) \\ &= \text{NZD}(a,13a+b) = \text{NZD}(a,b). \end{aligned}$$

10. Нека a и b се два последователни природни броја и нека n е произволен природен број. Докажи дека $\text{NZD}(an+b, bn+a)$ е непарен број.

Решение. Од два последователни природни броја едниот е секогаш помал од другиот. Нека претпоставиме дека $b < a$, т.е. $a = b + 1$. Ако

$$d = \text{NZD}(an+b, bn+a),$$

тогаш $d \mid (an+b)$ и $d \mid (bn+a)$. Но, тоа значи дека $d \mid a(bn+a)$ и $d \mid b(an+b)$, па затоа $d \mid \{a(bn+a) - b(an+b)\}$, т.е.

$$d \mid (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b) = 2b+1.$$

Значи, бројот d е делител на непарен број, па затоа и самиот е непарен број, што и требаше да се докаже.

11. Докажи дека меѓу пет последователни цели броеви секогаш може да се избере еден, заемно прост со сите останати.

Решение. Ако два различни броја се разликуваат еден од друг за најмногу 4, тогаш според теорема 1.5 а) тие немаат заеднички делител поголем од 4. Според тоа, два од нашите пет последователни броеви можат да имаат или заеднички делител 2, или заеднички делител 3, или заеднички делител 4, или се заемно прости. Понатаму, од пет последователни броеви најмалку два ќе бидат непарни. Од два последователни непарни броја барем еден нема да биде делив со 3. Конечно меѓу нашите броеви има барем еден непарен број, кој не се дели со 3. Овој број е заемно прост со останатите, што и требаше да се докаже.

12. Докажи, ако $\text{NZD}(x, z) = 1$ и $\text{NZD}(y, z) = 1$, тогаш $\text{NZD}(xy, z) = 1$.

Решение. Според пример 2.9, од $\text{NZD}(x, z) = 1$ следува дека постојат броеви a и c_1 такви што $xa + zc_1 = 1$. Слично, од $\text{NZD}(y, z) = 1$ следува дека постојат броеви b и c_2 такви што $by + zc_2 = 1$. Понатаму, од равенствата $xa + zc_1 = 1$ и $by + zc_2 = 1$ добиваме

$$1 = (by + zc_2)(xa + zc_1) = xy \cdot ab + z(xac_2 + byc_1 + zc_1c_2).$$

Според тоа, за броевите xy и z постојат броеви

$$\alpha = ab \text{ и } \beta = xac_2 + byc_1 + zc_1c_2,$$

такви што $xy\alpha + z\beta = 1$, па од пример 7.9 следува дека $\text{NZD}(xy, z) = 1$.

13. Нека x, y и z се природни броеви такви што $\text{NZD}(x, y, z) = 1$ и $z = \frac{xy}{x-y}$.

Докажи дека $x - y$ е точен квадрат.

Решение. Нека $\text{NZD}(x, y) = \text{NZD}(x, x - y) = k$. Значи, постојат цели броеви a и b такви што $x = ka$, $x - y = kb$ и $\text{NZD}(a, b) = 1$. Сега

$$y = x - kb = ka - kb = k(a - b) \text{ и } xy = k^2 a(a - b).$$

Заменувајќи за z :

$$z = \frac{xy}{x-y} = \frac{k^2 a(a-b)}{kb} = \frac{ka(a-b)}{b}.$$

Бидејќи $\text{NZD}(a,b)=1$ и z е природен број добиваме $b|k$. Но, од тоа што $\text{NZD}(x,y,z)=1$ следува $k=b$, бидејќи за $k=bt$ важи $m|x$, $m|y$, $m|z$, т.е. $m=1$. Според тоа, $x-y=k^2$, што и требаше да се докаже.

14. Најди ги сите едноцифрени броеви a, b и c , такви што

$$\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}.$$

Решение. a, b и c се едноцифрени броевите, па затоа $a=5$ е бројот 5, бидејќи само тогаш $\text{NZS}(a,7)=35$. Според тоа,

$$\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}, \text{ т.е. } \frac{14+5b}{35} = \frac{30+c}{35}.$$

Значи, $5b=16+c$. Понатаму, c е едноцифрен број, па затоа $17 \leq c+16 \leq 25$ и бидејќи $5|(16+c)$ добиваме дека или $c+16=20$ или $c+16=25$. Конечно, или $c=4$, па тогаш $b=4$ или $c=9$, па тогаш $b=5$. Според тоа, решенија се $(5,4,4)$ и $(5,5,9)$.

15. Нека е даден полиномот $P(x)=2x^3+3x^2+x$. Докажи дека најголемиот заеднички делител на броевите $P(1), P(2), P(3), \dots$ е делив со 6.

Решение. Дадениот полином го разложуваме на множители:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3+3x^2+x = 2x^3+2x^2+x^2+x \\ &= 2x^2(x+1)+x(x+1) \\ &= (x+1)(2x^2+x) = x(x+1)(2x+1). \end{aligned}$$

Ако $x=6k$, тогаш јасно $6|P(x)$.

Ако $x=6k+1$, тогаш $P(x)=(6k+1)(6k+2)(12k+3)$ и $6|P(x)$.

Ако $x=6k+2$, тогаш $P(x)=(6k+2)(6k+3)(12k+5)$ и $6|P(x)$.

Ако $x=6k+3$, тогаш $P(x)=(6k+3)(6k+4)(12k+7)$ и $6|P(x)$.

Ако $x=6k+4$, тогаш $P(x)=(6k+4)(6k+5)(12k+9)$ и $6|P(x)$.

Ако $x=6k+5$, тогаш $P(x)=(6k+5)(6k+6)(12k+11)$ и $6|P(x)$.

Конечно, од досега изнесеното следува дека $6|P(x)$, за секој природен број x , па затоа најголемиот заеднички делител на броевите $P(1), P(2), P(3), \dots$ е делив со 6.

16. За најголемиот заеднички делител d и најмалиот заеднички содржател v на природните броеви m и n е исполнето равенството $3m+n=3v+d$. Докажи дека m е делител на n .

Решение. Постојат единствени m' и n' , такви што $\text{NZD}(m',n')=1$ и $m=m'd$, $n=n'd$, каде $d=\text{NZD}(m,n)$. Тогаш $v=m'n'd$, при што равенството $3m+n=3v+d$ го добива обликот

$$3m'd+n'd=3m'n'd+d, \text{ т.е. } (3m'+n')d=(3m'n'+1)d.$$

Но $d \geq 1$, па според тоа $3m'+n'=3m'n'+1$, а последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$(3m'-1)(n'-1)=0.$$

Бидејќи $3m'-1 \neq 0$, последното равенство е исполнето ако и само ако $n'-1=0$, т.е. $n'=1$. Тогаш $n=n'd=1 \cdot d=d \mid m'd=m$, што требаше да се докаже.

17. Докажи дека дробката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати за ниту еден природен број n .

Решение. Од тоа што

$$\begin{aligned}\text{NZD}(21n+4, 14n+3) &= \text{NZD}(14n+3, 7n+1) = \text{NZD}(7n+1, 7n+2) \\ &= \text{NZD}(7n+1, 1) = 1,\end{aligned}$$

следува дека броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n \in \mathbf{N}$. Според тоа, дробката не може да се скрати за ниту еден природен број n .

18. Болва се наоѓа на координатната рамнина. Од точката (m, n) болвата може да скокне во една од точките (n, m) , $(m-n, n)$ или $(m+n, n)$. Дали болвата може да дојде во точката $(12, 32)$, ако на почетокот се наоѓала во точката а) $(7, 12)$, б) $(8, 12)$?

Решение. Од точката $(8, 12)$ со два пати примена на третиот чекор се доаѓа во точката $(32, 12)$, а потоа со примена на првиот чекор се доаѓа во точката $(12, 32)$. Ако на почетокот болвата се наоѓа во точката $(7, 12)$, таа не може да дојде никако во точката $(12, 32)$, затоа што со примена на секој од трите чекори најголемиот заеднички делител на координатите не се менува, т.е.

$$\text{NZD}(n, m) = \text{NZD}(m-n, n) = \text{NZD}(m+n, n),$$

$$\text{а } \text{NZD}(7, 12) = 1 \neq 4 = \text{NZD}(12, 32)$$

19. На бројот 264 од десно допиши му три цифри така што добиениот шестцифрен број биде делив со 5, со 7 и со 9.

Решение. Броевите 5, 7 и 9 се заемно прости, па секој број кој е делив со 5, со 7 и со 9 сигурно е делив со $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$. Бројот 264000 при делење со 315 дава остаток 30. Значи, бројот 264285 е делив со 315, што значи до допишување на 285 добиваме број делив со 315. Јасно, со допишување на $285+315=600$ и $600+315=915$ добиваме број делив со 5, со 7 и со 9.

20. Кој најголем трицифрен број треба да се собере со бројот 184952 за да добиениот збир биде делив со 2, 3 и 7?

Решение. Броевите 2, 3 и 7 се по парови заемно прости, па затоа ако бројот е делив со 2, 3 и 7, тогаш тој е делив со $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ и обратно. Понатаму, $184952 = 42 \cdot 4403 + 26$. Најголемиот трицифрен број е 999 и бидејќи $999 = 42 \cdot 23 + 33$ добиваме дека

$$\begin{aligned}184952 + 999 &= 42 \cdot 4403 + 26 + 42 \cdot 23 + 33 = 42 \cdot 4403 + 42 \cdot 23 + 42 + 17 \\ &= 42 \cdot (4403 + 23 + 1) + 17.\end{aligned}$$

Бројот $184952+999$ не е делив со 42, бидејќи при делење со 42 дава остаток 17, па заклучуваме дека $999-17=982$ е најголемиот трицифрен број кој треба да се додаде на бројот 184952 за да добиениот збир е делив со 42.

21. Нека $n = \overbrace{444\dots 444}^{11 \text{ четворки}}$. Докажи дека бројот $n^2 - n - 2$ се дели со 270.

Решение. Полиномот го разложуваме на множители и заменуваме за n :

$$n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = \underbrace{44\dots 44}_9 \cdot \underbrace{44\dots 44}_9 \cdot 5.$$

Првиот множител се дели со 2 и со 3, а вториот множител се дели со 5 и со 9. Но, 2 и 3, односно 5 и 9 се заемно прости па затоа дадениот број се дели со $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 = 270$.

22. Ако од два последователни природни броја поголемиот е полн квадрат, тогаш нивниот производ се дели со 12. Докажи!

Решение. Нека p и $p+1$ се последователни природни броеви такви да $p+1 = n^2$. Тогаш $p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, па затоа

$$p(p+1) = (n-1)n^2(n+1) = n(n^3 - 1).$$

Броевите $n-1, n, n+1$ се последователни природни броеви, па затоа еден од нив е делив со 3. Ако n е парен број, тогаш n^2 се дели со 4, а ако n е непарен број, тогаш $(n-1)(n+1)$ се дели со 4. Но, броевите 3 и 4 се заемно прости, па затоа $p(p+1)$ се дели со $3 \cdot 4 = 12$, што и требаше да се докаже.

23. Најди го најголемиот трицифрен број кој при делење со 5 и со 6 дава остаток 2, а при делење со 11 дава остаток 8.

Решение. Нека x е бараниот број. Бројот $x-2$ се дели со 5 и 6, па е делив со 30, односно $x = 30k + 2$. Бројот x е трицифрен ако k е еднаков на 33, 32, 31, 30, ..., 4. Понатаму, бројот $x-8 = 30k-6 = 6(5k-1)$ е делив со 11, што значи дека бројот $5k-1$ се дели со 11. Броевите $5 \cdot 33-1=164$ и $5 \cdot 32-1=159$ не се деливи со 11, но бројот $5 \cdot 31-1=154$ се дели со 11, што значи дека бараниот број е $x = 30 \cdot 31 + 2 = 932$.

24. Најди ги сите седумцифрени природни броеви кои започнуваат со 7002, а се деливи со 5, 7 и 11.

Решение. Броевите 5, 7 и 11 се заемно прости, па затоа бараните броеви мора да се деливи со $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Најмал седумцифрен број кој почнува со 7002 е бројот 7002000, но тој не е делив со 385 (при делење со 385 дава остаток 5). Прв поголем број делив со 385 е бројот $7002000 + 380 = 7002380$. Условите на задачата ги задоволува само уште бројот $7002380 + 385 = 7002765$.

25. За природните броеви a и b важи $19a = 97b$. Докажи дека $a+b$ се дели со 116.

Решение. Од $19a = 97b$ следува $116b = 97b + 19b = 19a + 19b = 19(a+b)$ и бидејќи броевите 116 и 19 се заемно прости заклучуваме дека $116 | (a+b)$.

26. Киро заборавил да напише знак за множење помеѓу два трицифрени броја и така добил шестцифрен број, кој е седум пати поголем од производот на двата броја. Кои броеви сакал да ги помножи Киро?

Решение. Ако Киро ги множел трицифрените броеви x и y , тогаш добиениот шестцифрен број е $\overline{xy} = 1000x + y$. Од $1000x + y = 7xy$ добиваме $100x = y(7x - 1)$. Броевите x и $7x - 1$ се заемно прости, бидејќи $\text{NZD}(x, 7x - 1) = \text{NZD}(7x, 7x - 1) = \text{NZD}(1, 7x - 1) = 1$. Затоа бројот 1000 се дели со $7x - 1$, а бидејќи $7x - 1 > 100$, добиваме дека $7x - 1 = 1000$, т.е. $x = 143$, а $y = 1000 \cdot 143 : (143 \cdot 7 - 1) = 143$.

27. Нека a е произволен природен број. Со b да го означиме бројот кој од бројот a го добиваме со испуштање на цифрата на единиците и на така добиениот број му ја додаваме четирикратната вредност на цифрата на единиците на a . На пример, ако $a = 328$, тогаш $b = 23 + 4 \cdot 8 = 55$. Докажи дека 13 е делител на a ако и само ако 13 е делител на b .

Решение. Ако $a = 10x + y$, тогаш $b = x + 4y$. Сега тврдењето следува од равенството $4a - b = 13 \cdot 3x$, во кое десната страна е делива со 13, и фактот дека броевите 4 и 13 се заемно прости.

28. Најди ги сите парови заемно прости броеви (x, y) такви да бројот $x^2(x + y)$ е делив со бројот $y^2(x - y)^2$.

Решение. Ако x, y се заемно прости броеви и бројот $x^2(x + y)$ е делив со бројот $y^2(x - y)^2$, тогаш бројот $x + y$ е делив со y , па затоа и бројот x е делив со y . Следува дека $y = 1$ и дека бројот

$$\begin{aligned} x^2(x + 1) &= x^3 + x = x^3 - x^2 + x^2 - x + 2x - 2 + 2 \\ &= x^2(x - 1) + x(x - 1) + 2(x - 1) + 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) + 2 \end{aligned}$$

е делив со $x - 1$, што значи дека 2 се дели со $x - 1$. Затоа $x - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ и од тоа што $x \in \mathbf{N}$ добиваме дека $x = 2$ или $x = 3$. Конечно, $(x, y) = (2, 1)$ или $(x, y) = (3, 1)$.

29. Најди го најмалиот природен број кој има својство да се намали 57 пати ако му ја избришеме првата цифра од лево.

Решение. Со a да ја означиме првата цифра на бараниот број, а со b бројот кој го формираат останатите цифри. Тогаш $10^k a + b = 57b$, $k \in \mathbf{N}$, односно $10^k a = 56b$, т.е. $10^k a = 8 \cdot 7b$. Левата страна на последната равенка е делива со 7 и бидејќи $\text{NZD}(7, 10^k) = 1$ добиваме $a = 7$. За да бројот 10^k биде делив со 8, но притоа да е истовремено и најмал потребно е $k = 3$. Тогаш $b = 125$, па затоа бараниот број е $7125 = 57 \cdot 125$.

30. Претстави го $\text{NZD}(252, 180)$ во облик $252x + 180y$, каде x и y се цели броеви.

Решение. Од Евклидовиот алгоритам добиваме

$$252 = 1 \cdot 180 + 72,$$

$$180 = 2 \cdot 72 + 36$$

$$72 = 2 \cdot 36$$

па затоа $\text{NZD}(252, 180) = 36$. Сера

$$36 = 180 + (-2) \cdot 72 = 180 + (-2)(252 + (-1) \cdot 180) = (-2) \cdot 252 + 3 \cdot 180.$$

31. Ако $\text{NZD}(a, b) = 1$, тогаш $\text{NZD}(a + b, a - b) = 1$ или 2. Докажи!

Решение. Ако $\text{NZD}(a + b, a - b) = d$. Тогаш $a + b = dx$ и $a - b = dy$. Според тоа, $2a = d(x + y)$ и $2b = d(x - y)$, па затоа d е заеднички делител на броевите $2a$ и $2b$. Но, $\text{NZD}(2a, 2b) = 2 \text{NZD}(a, b) = 2$, па затоа $d \mid 2$, што и требаше да се докаже.

Забелешка. Непосредно од претходната задача следува дека ако $\text{NZD}(a, b) = 1$ и a и b се со различна парност, тогаш $\text{NZD}(a + b, a - b) = 1$.

32. Нека m и n се заемно прости броеви. Познато е дека дробката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број. Кој е тој број?

Решение. Ако дадената дробка може да се скрати со бројот k , тогаш $3n - m = kp$, $5n + 2m = ks$, $\text{NZD}(p, s) = 1$, $k > 1$, $k, p, s \in \mathbf{N}$. Од тука се добива $n = \frac{k(2p+s)}{11}$ и $m = \frac{k(3s-2p)}{11}$ и бидејќи m и n се заемно прости, следи дека $k = 11$.

33. Докажи дека од $\text{NZD}(a, b) = 1$ следува $\text{NZD}(ac, b) = \text{NZD}(c, b)$

Решение. Од $\text{NZD}(ac, b) \mid b$ следува дека $\text{NZD}(ac, b) \mid bc$. Според тоа, $\text{NZD}(ac, b) \mid bc$ и $\text{NZD}(ac, b) \mid ac$, од што следува дека

$$\text{NZD}(ac, b) \mid \text{NZD}(bc, ac) = c \text{NZD}(a, b) = c,$$

па затоа $\text{NZD}(ac, b) \mid \text{NZD}(c, b)$.

Обратно, $\text{NZD}(c, b) \mid ac$ и $\text{NZD}(c, b) \mid b$, т.е. $\text{NZD}(c, b) \mid \text{NZD}(ac, b)$. Конечно, од досега изнесеното следува $\text{NZD}(c, b) = \text{NZD}(ac, b)$.

34. Ако $a > 1$ и m се природни броеви, тогаш $\text{NZD}(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1) = \text{NZD}(a-1, m)$. Докажи!

Решение. Имаме

$$\frac{a^m-1}{a-1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \dots + (a - 1) + (1 - 1) + m = (a - 1)q + m,$$

па затоа

$$\text{NZD}(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1) = \text{NZD}((a-1)q + m, a-1) = \text{NZD}(a-1, m).$$

35. Определи $\text{NZD}(2n+3, n+7)$, каде n е природен број.

Решение. Нека $\text{NZD}(2n+3, n+7) = d$. Од тоа што

$$d \mid [2(n+7) - (2n+3)] = 11$$

следува $d = 1$ или $d = 11$. Нека

$$n = 11q + r, \quad 0 \leq r < 10.$$

Ако $d = 11$, тогаш од $11 \mid (11q + r + 7)$ следува $r = 4$. Но, тогаш

$$2n + 3 = 2(11q + 4) + 3 = 11(2q + 1),$$

и следствено се дели со 11. Според тоа, ако n е од видот $11q + 4$, тогаш $d = 11$, а ако $n = 11q + r$, $r \neq 4$, тогаш $d = 1$.

36. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{5n-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{5n-1} \\ &= (2-1)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{5n-1}) \\ &= 2^{5n} - 1 = (2^5)^n - 1 \\ &= (2^5 - 1)[(2^5)^{n-1} + (2^5)^{n-2} + \dots + 2^5 + 1] \\ &= 31 \cdot [(2^5)^{n-1} + (2^5)^{n-2} + \dots + 2^5 + 1] \end{aligned}$$

и бидејќи

$$a_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31,$$

заклучуваме дека најголемиот заеднички делител на броевите $a_n, n \in \mathbf{N}$ е 31.

37. Кој број помал од 100 при делење со 4 и при делење со 26 дава остаток 1?

Решение. Бројот кој при делење со 4 и при делење со 26 дава остаток 1 може да се запише во облик $n = kp + 1$, каде $k \geq 0$ и $n = \text{NZS}(4, 26) = 52$. Но, $n < 100$, па затоа $k = 0$ или $k = 1$, што значи дека бараниот број е $n = 1$ или $n = 53$.

38. На бројот 1998 допиши му три цифри така што добиениот седумцифрен број да биде делив со 7, 8 и 9.

Решение. Со допишување на трицифрениот број x го добиваме бројот $1998000 + x$. Најмал број делив со 7, 8 и 9 е $\text{NZS}(7, 8, 9) = 504$. Од

$$1998000 = 1997856 + (144 + x)$$

и фактот дека бројот 1997856 е делив со 504 следува дека $x = 504 - 144 = 360$ или $x = 360 + 504 = 864$. Според тоа, на бројот 1998 кое да му се допише бројот 360 или бројот 864, така да добиениот број се дели со 7, 8 и 9.

39. Дали постои природен број n , таков што бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

Решение. Имаме $\text{NZD}(n, n+1) = \text{NZD}(n+2, n+1) = 1$, па затоа

$$\text{NZD}(n(n+2), n+1) = 1.$$

Според тоа, ако $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број, тогаш $n(n+2)$ треба да е квадрат на природен број. Но, $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$, од што следува

дека за ниту еден природен број n бројот $n(n+1)(n+2)$ не може да биде квадрат на природен број.

40. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека $5|x$, $5|y$ или $5|z$.

Решение. Бидејќи секој природен број n може да се запише во облик $5k$, $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$ добиваме дека бројот n^2 може да се запише во облик $5k$ или $5k \pm 1$. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите x и y не е делив со 5. Тогаш бројот $z^2 = x^2 + y^2$ може да се запише во облик $5q \pm 2$, кога и двата x^2 и y^2 се од облик $5k+1$ или и двата се од облик $5k-1$, што не е можно, или бројот $z^2 = x^2 + y^2$ може да се запише во облик $5q$ кога еден од броевите x^2 и y^2 е од облик $5k+1$, а другиот е од облик $5k-1$, што значи дека бројот z е делив со 5.

41. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека $3|x$ или $3|y$.

Решение. Бидејќи секој природен број n може да се запише во облик $3k$, $3k+1$ или $3k-1$ добиваме дека бројот n^2 може да се запише во облик $3k$ или $3k+1$. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите x и y не е делив со 3. Тогаш бројот $z^2 = x^2 + y^2$ е од облик $3q+2$, што не е можно, па затоа еден од броевите x и y е делив со 3.

42. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека $4|x$ или $4|y$.

Решение. Еден од броевите x и y сигурно е парен број, бидејќи во спротивно ако $x=2k+1$ и $y=2t+1$, тогаш $z^2 = x^2 + y^2 = 4q+2$, што не е можно бидејќи квадрат на природен број е или од облик $4q$ или од облик $4q+1$. Останува да докажеме дека еден од броевите x и y е делив со 4. Нека претпоставиме дека $x=2t$. Тогаш, $y=2k+1$ бидејќи во спротивно броевите x и y нема да бидат заемно прости. Според тоа,

$$z^2 = 4t^2 + 4k^2 + 4k + 1 = (2l+1)^2,$$

па затоа

$$4t^2 = x^2 = z^2 - y^2 = 4(l-k)(l+k+1), \text{ т.е. } t^2 = (l-k)(l+k+1).$$

Бидејќи $l-k+l+k+1=2l+1$, добиваме дека еден од множителите $l-k$ или $l+k+1$ на бројот t^2 е парен број, што значи и бројот t е парен број, па затоа $4|x$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ТРЕТА ГЛАВА

- Дадени се пет различни цели броеви a, b, c, d, e такви да

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12.$$
 Пресметај $a+b+c+d+e$.
Решение. Единствена можност производот на пет различни цели броеви да е 12 е тоа да се броевите 1, -1, 2, -2, 3, па затоа

$$(4-a) + (4-b) + (4-c) + (4-d) + (4-e) = 1 - 1 + 2 - 2 + 3,$$
 па затоа $a+b+c+d+e = 17$.
- Во Гинисовата книга на рекорди запишано е дека најголемиот прост број е еднаков на $23021^{377} - 1$. Дали можеби има печатна грешка?
Решение. Сигурно е печатна грешка. Секој број чија цифра на единиците е 1, при степенување исто така има цифра на единиците 1. Затоа бројот $23021^{377} - 1$ завршува на цифрата 0 и е сложен број. (Во 2000 година најголемиот познат прост број беше $2^{6972593} - 1$, кој во декаден запис се запишува со 2098960 цифри).
- Збирот на кои било пет последователни природни броеви е сложен број. Докажи!
Решение. Ако со n го означиме најмалиот од петте последователни природни броеви, тогаш нивниот збир ќе биде

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5(n+2)$$
 и тој е делив со 5 и со $n+2 > 1$, што значи дека е сложен број.
- Ако p е прост број, тогаш

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+2012) + (p+2013)$$
 е сложен број. Докажи!
Решение. Важи

$$\begin{aligned} p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+2012) + (p+2013) &= \\ &= 2014p + (1+2+\dots+2013) = 2014p + \frac{2013 \cdot 2014}{2} \\ &= 1007 \cdot 2p + 2013 \cdot 1007 = 1007(2p+2013). \end{aligned}$$
 Според тоа, збирот $p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+2012) + (p+2013)$ се дели со 1007, што значи е сложен број.
- Нека a е произволен природен број. Докажи дека $ax+1$ е сложен број за барем еден природен број x .
Решение. За произволен природен број a земаме $x = a+2$ и добиваме

$$ax+1 = a(a+2)+1 = a^2+2a+1 = (a+1)^2,$$
 што е сложен број.
- Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n \in \mathbf{N}$, бројот $z = n^4 + a$ е сложен.

Решение. Нека $a = 4k^4$, каде што $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} z &= n^4 + a = n^4 + 4k^4 \\ &= n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 \\ &= (n^2 + 2k^2) - (2nk)^2 \\ &= (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk), \end{aligned}$$

и притоа важи

$$n^2 + 2k^2 - 2nk = (n - k)^2 + k^2 \geq k^2 > 1;$$

$$n^2 + 2k^2 + 2nk = (n + k)^2 + k^2 > k^2 > 1.$$

Јасно, бројот z е сложен бидејќи може да се запише како производ на два природни броја поголеми од 1.

7. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $8n^3 - 12n^2 + 6n + 63$ е сложен.

Решение. Со средување на изразот добиваме

$$\begin{aligned} 8n^3 - 12n^2 + 6n + 63 &= (8n^3 - 12n^2 + 6n - 1) + (63 + 1) = (2n - 1)^3 + 4^3 \\ &= (2n + 3)((2n - 1)^2 - 4(2n - 1) + 16) \\ &= (2n + 3)((2n - 1)^2 - 4(2n - 1) + 4 + 12) \\ &= (2n + 3)((2n - 3)^2 + 12), \end{aligned}$$

па дадениот број е производ на два природни броја поголеми од 1, односно тој е сложен број.

8. За произволни природни броеви m и n , бројот $m^2n^2 + 4n^2 + 7m^2 + 28$ е сложен. Докажи!

Решение. Имаме,

$$m^2n^2 + 4n^2 + 7m^2 + 28 = n^2(m^2 + 4) + 7(m^2 + 4) = (m^2 + 4)(n^2 + 7),$$

и бидејќи $m^2 + 4 > 1$, $n^2 + 7 > 1$, добиваме дека за произволни природни броеви m и n бројот $m^2n^2 + 4n^2 + 7m^2 + 28$ е сложен.

9. Ако x , y , z и u се природни броеви поголеми од 1, за кои важи $xy = zu$,

докажи дека бројот $\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$ е сложен природен број.

Решение. По средувањето на изразот добиваме

$$\begin{aligned} \frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2} &= \frac{(xy+xz+zy+z^2)(xy+xu+y+u^2)}{(x+y+z+u)^2} \\ &= \frac{(zu+xz+zy+z^2)(zu+xu+y+u^2)}{(x+y+z+u)^2} \\ &= \frac{z(u+x+y+z) \cdot u(z+x+y+u)}{(x+y+z+u)^2} = z \cdot u \end{aligned}$$

и бидејќи $z, u > 1$, следува тврдењето на задачата.

10. Докажи дека бројот $2003^2 + 2^{2003}$ сложен.

Решение. Од равенството $(3k+1)(3m+1) = 3(3km+k+m)+1$ следува дека производ на два броја од облик $3k+1$ е од истиот облик. Затоа

$$2^{2003} = (2^2)^{1001} \cdot 2 = 2 \cdot (3 \cdot 1 + 1)^{1001} = 2(3p+1) = 6p+2, \quad p \in \mathbf{N}.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} 2003^2 &= (2001+2)^2 = (3 \cdot 667 + 2)^2 = 9 \cdot 667^2 + 12 \cdot 667 + 4 \\ &= 3(3 \cdot 667^2 + 4 \cdot 667 + 1) + 1 = 3m+1, \quad m \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$2003^2 + 2^{2003} = 6p+2 + 3m+1 = 3(2p+m+1)$$

и бидејќи $2003^2 + 2^{2003} > 3$, заклучуваме дека $2003^2 + 2^{2003}$ е сложен број.

11. Ако p е прост број, докажи дека бројот $1997^p + p^{1997}$ е сложен.

Решение. Ако $p > 2$, тогаш бројот p е непарен број, па затоа бројот $1997^p + p^{1997}$ е парен и бидејќи е поголем од 2, тој е сложен број.

За $p = 2$ имаме

$$\begin{aligned} 1997^2 + 2^{1997} &= (1997^2 - 1) + (2^{1997} + 1) \\ &= (1997-1)(1997+1) + (2+1)(2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 1) \\ &= 1996 \cdot 1998 + 3(2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 1) \\ &= 3(1996 \cdot 666 + 2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 1) \end{aligned}$$

и бидејќи $1996 \cdot 666 + 2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 1 > 1$ добиваме дека $1997^2 + 2^{1997}$ е сложен број.

12. Нека a, b, c се ненулти цели броеви, такви што $a \neq c$ и $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ не може да биде прост број.

Решение. Равенството $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ е еквивалентно на равенството

$$(a-c)(b^2-ac) = 0.$$

Бидејќи $a \neq c$, од последното равенство добиваме $b^2 = ac$ и затоа

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - b^2 \\ &= (a+c)^2 - b^2 \\ &= (a+c-b)(a+b+c) \end{aligned}$$

Според тоа, ако $a^2 + b^2 + c^2$ е прост број, тогаш можни се следните случаи:

- i) $a+c-b=1$ и $a+b+c=a^2+b^2+c^2$,
- ii) $a+b+c=1$ и $a-b+c=a^2+b^2+c^2$,

$$\text{iii) } a+c-b=-1 \text{ и } a+b+c=-(a^2+b^2+c^2),$$

$$\text{iv) } a+c+b=-1 \text{ и } a-b+c=-(a^2+b^2+c^2)$$

Во случаите i) и ii), со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0,$$

т.е.

$$(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1$$

и како $b \neq 0$ наоѓаме $a=c=1$, што е противречност. Во случаите iii) и iv), со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2+2(a+c)+1=0,$$

т.е.

$$(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1$$

и бидејќи $b \neq 0$ наоѓаме $a=c=-1$, што е повторно противречност.

13. Нека a, b, c, d се природни броеви кои го исполнуваат следниов услов $ab=cd$. Докажи дека бројот $n=a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}+d^{2006}$ е сложен.

Решение. Од $ab=cd$ следува $d=\frac{ab}{c}$, па затоа

$$\begin{aligned} n &= a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + \left(\frac{ab}{c}\right)^{2006} = \frac{a^{2006}c^{2006} + b^{2006}c^{2006} + c^{4012} + a^{2006}b^{2006}}{c^{2006}} \\ &= \frac{(a^{2006} + c^{2006})(b^{2006} + c^{2006})}{c^{2006}}. \end{aligned}$$

Бидејќи n е природен број и затоа жто и двата множители во броителот на последната дробка се поголеми од c^{2006} , после скратувањето се добива дека n е производ на два природни броја поголеми од 1, односно дека бројот n е сложен.

14. Збирот на 2013 различни прости природни броеви е парен. Дали производот на овие 2013 прости броеви е парен или непарен? Докажи дека меѓу нив постојат 2012 броеви чиј збир е парен. Докажи дека меѓу нив постојат 2012 броеви чиј збир е непарен.

Решение. Сите прости броеви поголеми од 2 се непарни. За да збирот на 2013 прости броеви е парен, мора да има парен број непарни, што значи дека меѓу избраните броеви е и бројот 2. Затоа производот на овие броеви е парен. Збирот на 2012 прости броеви поголеми од 2 е парен.

Ако меѓу избраните 2012 броеви е бројот 2, тогаш нивниот збир е непарен.

15. Цифрите a, b, c, d се различни и секоја од нив е прост број. Запиши ги сите броеви од облик $\overline{ab10cd}$ кои се деливи со 264.

Решение. Само цифрите 2, 3, 5 и 7 се прости броеви. Бараниот број мора да е парен, па затоа $d=2$. Понатаму, од тоа што $264=3 \cdot 8 \cdot 11$ следува дека бројот $\overline{ab10c2}$ мора да е делив со 3, што е точно бидејќи збирот на неговите цифри е 18. Но, бројот мора да е делив и со 11, па затоа разликата $p=(a+1+c)-(b+0+2)$ мора да е делива со 11 и од тоа што $0 \leq p \leq 8$

заклучуваме дека $p=0$, т.е. $a+c=b+1$. Според тоа, $b=7$ и $a+c=8$. Бараниот број е еден од броевите 371052 или 571032. Бројот 371052 не е делив со 8, а додека пак 571032 е делив со 8 и тоа е бараниот број.

16. Квадрат на природен број n е шестцифрен број кој се состои, кога засебно се разгледуваат две по две цифри, од три двоцифрени броеви. Приот и третиот се еднакви, а средниот број е двапати помал. Најди ги сите броеви со ова својство.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned} n^2 &= \overline{abcdab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{cd} \cdot 100 + \overline{ab} = 2\overline{cd} \cdot 10000 + \overline{cd} \cdot 100 + 2\overline{cd} \\ &= \overline{cd} \cdot 2 \cdot 10051 = \overline{cd} \cdot 2 \cdot 19 \cdot 23^2. \end{aligned}$$

Последниот број е полн квадрат ако и само ако $\overline{cd} = 2 \cdot 19k^2 = 38k^2$, каде k е природен број. Но, $\overline{cd} < 100$, па затоа единствена можност е $k=1$, што значи $\overline{cd} = 38$ и затоа $n^2 = (2 \cdot 19 \cdot 23)^2$, т.е. $n = 874$.

17. Најди дробка која е еднаква на дробката $\frac{73}{95}$, а збирот на броителот и имени-телот е квадрат на најмалиот можен природен број.

Решение. Броевите 73 и 95 се заемно прости, па затоа е потребно да се прошири дадената дробка. Значи, $\frac{73}{95} = \frac{73k}{95k}$, $k > 1$ и $73k + 95k = 168k$ е квадрат на најмалиот природен број. Од $168k = 2^3 \cdot 3 \cdot 7k$ следува дека $k = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ и бараната дробка е $\frac{73 \cdot 42}{95 \cdot 42} = \frac{3066}{3990}$.

18. Најди дробка која е еднаква на дробката $\frac{163}{101}$, а збирот на броителот и именителот е квадрат на најмалиот можен природен број.

Решение. Броевите 163 и 101 се заемно прости, па затоа е потребно да се прошири дадената дробка. Според тоа, $\frac{163}{101} = \frac{163k}{101k}$, $k > 1$ и $163k + 101k = 264k$ е квадрат на најмалиот природен број. Од $264k = 2^3 \cdot 3 \cdot 11k$ следува дека $k = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ и бараната дробка е $\frac{163 \cdot 66}{101 \cdot 66} = \frac{10758}{6666}$.

19. Во секој од два проекти за изградба на блок згради, секоја зграда треба да има еднаков број станови. Според вториот проект бројот на станови во секоја зграда е поголем отколку во првиот. Според првиот проект бројот на зградите е за 8 помал отколку во вториот. Вкупниот број на станови во првиот проект е 12096, а во вториот 23625. Колку згради треба да се изградат според вториот проект?

Решение. Ако во првиот проект се предвидени n згради, тогаш бројот на зградите во вториот проект е $n+8$. Бидејќи секоја зграда во ист проект има ист број на станови добиваме дека бројот $12096 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$ е делив со n , а бројот 23625 со $n+8$. Јасно, n е непарен број, бидејќи во спротивно 23625 би бил делив со парен број. Значи, $n \in \{1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189\}$. Бројот на

становите во секоја зграда според првиот проект е $\frac{12096}{n}$ и е помал од бројот на становите според вториот проект. Од $\frac{12096}{n} < \frac{23625}{n+8}$ следува

$$n > \frac{12096 \cdot 8}{23625 - 12096} = 8 \frac{24}{61}.$$

Бројот 23625 е делив со 27+8, но не е делив со 9+8, 21+8, 63+8 и 189+8, што значи дека според вториот проект треба да се изградат 27+8=35 згради.

20. Нека a, b, c се природни броеви такви што $a^2 + b^2 + c^2$ се дели со 6 и $ab + bc + ca$ се дели со 3. Докажи дека $a^3 + b^3 + c^3$ се дели со 6.

Решение. Од тоа што $3|(ab + bc + ca)$ следува $6|(2ab + 2bc + 2ca)$ и бидејќи $6|(a^2 + b^2 + c^2)$ добиваме дека $6|(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$, односно $6|(a + b + c)^2$. Квадрат на природен број е делив со простите броеви 2 и 3 ако и само ако самиот број е делив со 2 и 3, па затоа $6|(a + b + c)$. Според тоа, меѓу броевите a, b, c еден е парен или сите три се парни, што значи дека $6|3abc$. Конечно, од досега изнесеното следува дека 6 е делител на бројот $3abc + (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3$, што и требаше да се докаже.

21. Нека p е прост број различен од 3 и нека a и b се цели броеви такви да $p|(a + b)$ и $p^2|(a^3 + b^3)$. Докажи дека $p^2|(a + b)$ или $p^3|(a^3 + b^3)$

Решение. Да претпоставиме дека $p^2 \nmid (a + b)$. Тогаш доволно е да се докаже дека $p^3|(a^3 + b^3)$. Од $p|(a + b)$ следува $p^2|(a + b)^3$ и како

$$p^2|(a^3 + b^3) = (a + b)^3 - 3ab(a + b),$$

добиваме $p^2|3ab(a + b)$. Понатаму, бидејќи $p^2 \nmid (a + b)$, следува дека $p|3ab$ и како p е прост број различен од 3 следува дека $p|a$ или $p|b$. Но, $p|(a + b)$, па затоа $p|a$ и $p|b$, од што следува дека $p^3|a^3$ и $p^3|b^3$, односно $p^3|(a^3 + b^3)$.

22. Најди го најмалиот природен број n , кој има број на делители колку и бројот 1988, при што делители на природниот број се бројот 1 и самиот тој број.

Решение. Познато е дека за бројот $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, вкупниот број на различни делители е еднаков на $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Бидејќи $1988 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 37^1$, добиваме дека бројот 1988 има $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ различни делители. Но, $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, па заклучуваме дека бараниот број е еден од следниве броеви: $2^{15}, 2^7 \cdot 3, 2^3 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ или $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (секоја комбинација ја правиме од најмалите прости броеви). Од наведените броеви, најмал е бројот $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ и тоа е бараниот број.

23. Најди го природниот број n ако $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.
Решение. Производот $n!$ го содржи простиот број 13, но не го содржи простиот број 17, па затоа $13 \leq n < 17$. Простиот број 5 е фактор на броевите 5, 10 и 15 и тоа по еднаш, па затоа $n \geq 15$. Конечно, врз база на степенот 2^{15} заклучуваме дека $n!$ го содржи и бројот 16, па значи дека $n = 16$. (2 се јавува на степен 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 и 4 во броевите 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 16, соодветно.)
24. Производ на два трицифрени броја е запишан само со цифрата 3. Кои се тие броеви?
Решение. Производ на два трицифрени броја е петцифрен или шестцифрен број и бидејќи е запишан само со цифрата 3, тој број е еднаков на 33333 или 333333. Од тоа што $33333 = 3 \cdot 41 \cdot 271$ и фактот дека броевите 3, 41 и 271 се прости следува дека бројот 33333 е запишан како производ на трицифрените броеви 123 и 271. Од тоа што $333333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, следува дека еден од трицифрените броеви мора да биде делив со 37. Според тоа, можни се следниве случаи
- $$\begin{aligned} 333333 &= (13 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11) = 481 \cdot 693, \\ 333333 &= (11 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13) = 407 \cdot 819 \text{ и} \\ 333333 &= (3 \cdot 7 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 11 \cdot 13) = 777 \cdot 429. \end{aligned}$$
25. Определи ги сите прости трицифрени броеви чиј производ на цифри е 252.
Решение. Бројот 252 можеме да го запишеме во облик

$$252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$
Според тоа, цифрите на барните броеви може да бидат 4, 7, 9 или 6, 6, 7. Бидејќи, трицифрените прости броеви се непарни, можни решенија се 479, 497, 749, 947 и 667. Понатаму, $23|667$, $7|497$ и $7|749$, а со непосредна проверка добиваме дека 947 и 479 се прости броеви. Значи, единствени трицифрени прости броеви чиј производ на цифри е 252 се 947 и 479.
26. Најди ги сите природни броеви n такви да бројот $a = n^2 + n + 1$ се дели со 13.
Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned} a &= n^2 + n + 1 = n^2 + n - 12 + 13 = n^2 + 4n - 3n - 12 + 13 \\ &= n(n+4) - 3(n+4) + 13 = (n+4)(n-3) + 13, \end{aligned}$$
добиваме дека бројот a се дели со 13 ако и само ако $(n+4)(n-3)$ се дели со 13. Но, 13 е прост број, па затоа $(n+4)(n-3)$ се дели со 13 ако и само ако $n+4$ или $n-3$ се дели со 13. Конечно, решението на задачата се броевите од облик $n = 9 + 13k$, $k \in \mathbf{N}$ и $n = 3 + 13m$, $m \in \mathbf{N}$.
27. Најди го најмалиот природен број n таков да $\sqrt{1998n}$ е исто така природен број.
Решение. Всушност треба да го најдеме најмалиот природен број n за кој бројот $1998n$ е полн квадрат. Од $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ и фактот дека природен

број е полн квадрат ако и само ако степените показатели во неговиот каноничен запис се парни броеви следува дека најмалиот број n со бараното својство е бројот $n = 2 \cdot 3 \cdot 37 = 222$.

28. Најди го најмалиот природен број n за кој вредноста на изразот $\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}}$ е исто така природен број.

Решение. Ќе го трансформираме дадениот израз

$$\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{1998}+\sqrt{n})^2}{(\sqrt{1998}-\sqrt{n})(\sqrt{1998}+\sqrt{n})} = \frac{1998+2\sqrt{1998n}+n}{1998-n}.$$

Според претходната задача најмалиот природен број n за кој бројот $\sqrt{1998n}$ е природен е $n = 222$. Лесно се гледа дека притоа дадениот израз има вредност 2.

29. Докажи дека за секој сложен број n , $n > 4$, бројот $2n$ е делител на производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$.

Решение. Бидејќи $n > 4$ е сложен број, тој може да се запише во облик $n = ab$, каде $2 \leq a \leq b$ и притоа $b > 2$. Од $n = ab$ следува

$$n-1-(a+b) = ab-1-(a+b) = (a-1)(b-1)-2 \geq 0,$$

па затоа $n-1 \geq a+b$. Ќе разгледаме два случаја:

- 1) $a = b > 2$ и тогаш $2b = a+b \leq n-1$. Според тоа, $2n = 2 \cdot b \cdot b$ е делител на $1 \cdot \dots \cdot b \cdot \dots \cdot 2b$, кој е делител на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$.
- 2) $a < b$, при што се можни два случаја:
 - а) $a > 2$ и тогаш $2ab$ е делител на $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot b \cdot \dots \cdot (a+b)$, кој е делител на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$.
 - б) $a = 2$. Ако $b > 4$, тогаш $2n = 2 \cdot 2b$ е делител на бројот $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b(b+1)(b+2)$, кој е делител на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$. Ако $b = 4$, тогаш $2n = 16$ е делител на $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$. Ако $b = 3$, тогаш $2n = 12$ е делител на $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

30. Ако p е прост број, тогаш $p^4 + p^2 + 1$ е сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p^4 + p^2 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$ е сложен број. Ако $p = 3$, тогаш $p^4 + p^2 + 1 = 91 = 7 \cdot 13$ е сложен број. Понатаму, секој прост број поголем од 3 е од облик $6k \pm 1$, што значи дека $p^4 + p^2 + 1$ е од облик $3m$, $m > 1$, т.е. е сложен број.

Конечно, за секој прост број p бројот $p^4 + p^2 + 1$ е сложен број.

31. Да се напишат сите петцифрени броеви од облик $\overline{abcda}$ деливи со 45, при што цифрата на местото на стотките е најголемиот едноцифрен прост број.

Решение. Еден број е делив со 45, ако тој е делив со 9 и 5. Еден број е делив со 5 ако тој завршува на 0 или 5. Бидејќи првата и последната цифра на бројот се еднакви на a , цифрата a мора да биде 5.

Од условот на задачата следува дека цифрата c е еднаква на 7.

Еден број е делив со 9 ако збирот на неговите цифри е делив со 9, па затоа збирот $5+b+7+d+5=17+b+d$ мора да биде делив со 9, збирот $b+d$ мора да биде еднаков на 1 или 10.

Ако $b+d=1$, тогаш броевите се 50715 и 51705.

Ако $b+d=10$, тогаш броевите се 51795, 52785, 54765, 56745, 58725, 59715.

32. Бројот 1000002000001 разложи го на множители ако се знае дека еден негов прост множител е поголем од 9000.

Решение. За дадениот број имаме

$$\begin{aligned} 1000002000001 &= 10^{12} + 2 \cdot 10^6 + 1 = (10^6 + 1)^2 = [(10^2)^3 + 1]^2 = (100^3 + 1)^2 \\ &= (100 + 1)^2 (100^2 - 100 + 1)^2 = 101^2 \cdot 9901^2, \end{aligned}$$

што значи дека прости фактори се 101 и 9901.

33. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

Решение. Броевите a и b се прости и се поголеми од 3, па затоа тие се непарни, од што следува дека нивниот збир и нивната разлика се броеви деливи со 2, па затоа

$$4 \mid (a+b)(a-b). \quad (1)$$

Бидејќи a и b се прости броеви, тие се од облик $6k \pm 1$. Можни се следниве случаи:

- ако $a=6k+1$ и $b=6m+1$, тогаш $a-b=6(k-m)$,
- ако $a=6k+1$ и $b=6m-1$, тогаш $a+b=6(k+m)$,
- ако $a=6k-1$ и $b=6m+1$, тогаш $a+b=6(k+m)$, и
- ако $a=6k-1$ и $b=6m-1$, тогаш $a-b=6(k-m)$.

Значи, во секој случај $6 \mid (a+b)(a-b)$, што значи

$$3 \mid (a+b)(a-b). \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме дека $12 \mid (a+b)(a-b)$, што значи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

34. Докажи дека при делење на произволен прост број p со 30, остатокот од делењето е или прост број или 1.

Решение. Секој природен број p може да се запише во облик $p=30k+r$, $0 \leq r < 30$. За да бројот биде прост, потребно е остатокот r да не се дели ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5, па според тоа p е од облик $30k+1$, $30k+7$, $30k+11$, $30k+13$, $30k+17$, $30k+19$, $30k+23$, $30k+29$, што значи дека неговиот остаток при делење со 30 е или 1 или прост број.

35. Ако $p > 5$ е прост број, тогаш остатокот од делењето на p^2 со 30 е 1 или 19. Докажи!

Решение. Нека $p > 5$ е прост број. Тогаш p е од облик

$$30k \pm 1, 30k \pm 7, 30k \pm 11, 30k \pm 13.$$

Со непосредна проверка се добива дека во сите осум случаи остатокот од делењето на p^2 е или 1 или 19.

36. Сите прости броеви кои се помали или еднакви на даден прост број p ги делиме на две групи $a, b, \dots, c; k, m, \dots, n$ така да бројот

$$x = ab \dots c - km \dots n$$

е поголем од 1 и е помал или еднаков на p^2 . Докажи дека x е прост број.

Решение. Нека претпоставиме дека x е сложен број. Тогаш x има прост делител q таков што $x = qu$, $1 < q \leq u < x$. Ако $q \leq p$, тогаш q се содржи како меѓу броевите $a, b, \dots, c$, така и меѓу броевите $k, m, \dots, n$, што не е можно. Ако $q > p$, тогаш $x = qu \geq q^2 > p^2$, што повторно е противречност. Според тоа, x е прост број.

37. Непарниот природен број $n > 1$ е прост ако и само ако може на единствен начин да се претстави како разлика од квадрати на два природни броја. Докажи!

Решение. За секој непарен број n важи

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Нека n е непарен прост број и нека $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a > b$. Тогаш $a-b=1$, $a+b=n$, од каде добиваме $a = \frac{n+1}{2}$, $b = \frac{n-1}{2}$, т.е. претставувањето (1) е единствено. Обратно, ако n е непарен сложен број, т.е. $n = ab$, $1 < a \leq b < n$. Тогаш $n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, што значи дека претставувањето на n како разлика на квадрати на природни броеви не е единствено.

38. Докажи дека за $n > 2$ меѓу броевите n и $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ постои барем еден прост број.

Решение. Да го разгледаме бројот $n! - 1$. Нека p е прост делител на $n! - 1$. Очигледно $n < p \leq n! - 1 < n!$.

39. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви од облик $4k-1$, $k \in \mathbf{N}$.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви од облик $4k-1$, $k \in \mathbf{N}$. Нека $p_1, p_2, \dots, p_m$ се сите такви броеви. Да го разгледаме бројот $q = 4p_1 p_2 \dots p_m - 1$. Бидејќи производ на броеви од облик $4k+1$ секогаш и број од истиот облик, бројот q мора да има делител p од облик $4k-1$. Јасно, $p \neq p_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, бидејќи ниту еден од броевите $p_1, p_2, \dots, p_m$ не е делител на q . Но, последното противречи на претпоставката дека $p_1, p_2, \dots, p_m$

се единствените прости броеви од облик $4k-1$, па затоа заклучуваме дека постојат бесконечно многу такви прости броеви.

40. Докажи дека непарен број од облик $6k+1$ не може да се претстави како разлика на два прости броја.

Решение. Нека претпоставиме дека $6k+1=p-q$, каде p и q се прости броеви. Ако $q=2$, тогаш $p=6k+3=3(2k+1)$ не е прост број. Ако $q=2n+1$, тогаш $p=6k+2n+2=2(3k+n+1)$ повторно не е прост број.

41. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n , кои не може да се претстават во вид $n=a^2+p$, каде a е природен број, а p е прост број.

Решение. Такви се, на пример, броевите $n=(3k+2)^2$, $k=0,1,2,\dots$. Навистина, нека претпоставиме дека $n=(3k+2)^2=a^2+p$, за некој природен број a и прост број p . Тогаш $p=(3k+2-a)(3k+2+a)$, и бидејќи p е прост број добиваме $3k+2-a=1$ и $p=3k+2+a$, од каде следува $a=3k+1$ и $p=6k+3=3(2k+1)$, што е противречност.

42. Нека a, b и c се природни броеви такви што $b-a$ е прост број и $3c^2=c(a+b)+ab$. Докажи дека $8c+1$ е полн квадрат.

Решение. Ќе воведеме ознаки $b-a=p$ и $b+a=q$. За производот ab важи равенството

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{q^2 - p^2}{4},$$

и ако замениме во

$$3c^2 = c(a+b) + ab$$

добиваме

$$3c^2 = cq + \frac{q^2 - p^2}{4},$$

$$12c^2 = 4cq + q^2 - p^2,$$

$$p^2 = q^2 + 4cq - 12c^2,$$

$$p^2 = (q-2c)(q+6c).$$

Од неравенството $q-2c < q+6c$, бидејќи p е прост број, добиваме дека $q-2c=1$, $q+6c=p^2$. Ако од второто равенство го одземеме првото равенство, добиваме $8c=p^2-1$. Значи, $8c+1=p^2$, што и требаше да се докаже.

43. Најди ги сите прости броеви p , за кои бројот $p+9$ е прост број.

Решение. За $p=2$ важи $p+9=11$ што е прост број. Јасно, тоа е единственото решение, бидејќи секој прост број $p>2$ е непарен, па затоа бројот $p+9$ ќе биде парен број поголем од 2, што значи дека е сложен број.

44. Ако p и $8p-1$ се прости броеви, тогаш $8p+1$ е сложен број. Докажи!
- Решение.** Ако простиот број p и од облик $3k+2$, тогаш $8p-1=3(8k+5)$, што значи е сложен број. Според тоа, p мора да е од облик $3k+1$. Но, тогаш $8p+1=3(8k+3)$ е сложен број, што и требаше да се докаже.
45. Најди прост број p таков што и броевите $p+10$ и $p+14$ се прости.
- Решение.** Јасно, $p \neq 2$. Ако $p=3$, тогаш $p+10=13$ и $p+14=17$ се исто така прости броеви. Секој прост број поголем од 3 или е од облик $3k+1$ или од облик $3k-1$. Ако $p=3k+1$, тогаш $p+14=3(k+5)$ е сложен број, а ако $p=3k-1$, тогаш $p+10=3(k+3)$ е сложен број. Конечно, единствено решение е бројот $p=3$.
46. Најди прост број p таков што и броевите $p+10$ и $p+20$ се прости.
- Решение.** Ако $p=2$, тогаш $p+10=12$ и $p+20=22$ се сложени броеви. Ако $p=3$, тогаш $p+10=13$ и $p+20=23$ се прости броеви. Секој прост број поголем од 3 е од облик $3k \pm 1$. Ако $p=3k+1$, тогаш $p+20=3(k+7)$ е сложен број, а ако $p=3k-1$, тогаш $p+10=3(k+3)$ е сложен број. Конечно, единствено решение е бројот $p=3$.
47. Дали постојат прости броеви p и q такви што $3p+5q=67$.
- Решение.** Бидејќи броевите 3 и 5 се непарни броеви такви што $\text{NZD}(3,5)=1$, и 67 е непарен број, добиваме дека еден од броевите p и q мора да е парен. Во спротивно бројот од левата страна би бил парен а од десната непарен. Единствен парен прост број е 2. Заради тоа, имаме два можни случаи.
- Случај 1.** $p=2$. Тогаш равенката го добива обликот $5q=61$ која нема решение во множеството прости броеви.
- Случај 2.** $q=2$. Тогаш равенката го добива обликот $3p=57$, од каде добиваме $p=19$. Значи единствено решение на равенката е $p=19, q=2$.
48. Ако n е прост број поголем од 3, тогаш бројот $(9n+1)^2 - (n+9)^2$ е делив со 1920. Докажи!
- Решение.** Од формулите за скратено множење следува
- $$(9n+1)^2 - (n+9)^2 = (9n+1+n+9)(9n+1-n-9) = 80(n+1)(n-1).$$
- Бидејќи n е прост број поголем од 3, добиваме дека n е непарен број, па затоа $n+1$ и $n-1$ се последователни парни броеви, од кои едниот е делив со 2, а другиот со 4. Понатаму, $n-1$, n и $n+1$ се три последователни броја и бидејќи n е прост број поголем од 3, добиваме дека еден од броевите $n+1$ и $n-1$ се дели со 3. Конечно, бројот $(9n+1)^2 - (n+9)^2$ се дели со производот на броевите 80, 2, 3 и 4, т.е. со бројот $80 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1920$.

49. Нека p и q се два последователни непарни прости броеви. Докажи дека $p+q$ е производ на најмалку 3 природни броеви поголеми од 1 (не мора да се различни).

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $p < q$. Значи, постои природен број k таков што $q - p = 2k$, од каде што следува дека $p + q = p + p + 2k = 2p + 2k = 2(p + k)$. Да забележиме дека $p < p + k < p + 2k = q$. Но p и q се два последователни непарни прости броеви, па според тоа $p + k$ е сложен број. Со други зборови, постојат природни броеви $u, v > 1$ такви што $p + k = uv$. Тогаш $p + q = 2(p + k) = 2uv$, што требаше да се докаже.

50. Најди три прости броја такви да нивниот производ е петпати поголем од нивниот збир.

Решение. Нека a, b, c се бараните прости броеви. Тогаш точно е равенството $abc = 5(a + b + c)$. Десната страна на последното равенство е делива со 5, па затоа и левата мора да е делива со 5. Од условот на задачата следува дека еден од броевите е еднаков на 5. Нека $c = 5$. Тогаш $5abc = 5(a + b + 5)$, од каде наоѓаме $ab - a = b + 5$, т.е. $a(b - 1) = b + 5$, па затоа $a = \frac{b+5}{b-1}$. Сега последователно имаме

$$a = \frac{b-1+6}{b-1} = 1 + \frac{6}{b-1}.$$

Бројот a ќе биде природен број ако и само ако $\frac{6}{b-1}$ е природен број, т.е. $b-1 \mid 6$, од каде следува $b \in \{2, 3, 4, 7\}$. Но, b е прост број, па затоа случајот $b = 4$ отпаѓа, а исто така при $b = 3$ се добива $a = 4$, што не е можно бидејќи a е прост број. За $b = 2$ добиваме $a = 7$, а за $b = 7$ добиваме $a = 2$. Конечно, бараните броеви се 2, 5 и 7.

51. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?

Решение. Од условот на задачата имаме дека $n \cdot p = 2010$, односно $n \cdot p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Од овде вредноста на бројот p може да биде 2, 3, 5, 67. Па, конечно за $p = 2$, $n = 1005$, за $p = 3$, $n = 670$, за $p = 5$, $n = 402$, за $p = 67$, $n = 30$.

52. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n така да е исполнето равенството $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$.

Решение. Од тоа што $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$ следува $\frac{n}{2 \cdot 5 \cdot 199} = \frac{1}{p}$. Според тоа, решенија на задачата се $(p, n) \in \{(2, 995), (5, 398), (199, 10)\}$.

53. Ако p е прост број, тогаш бројот $p^{11} + 1989$ е сложен број. Докажи!

Решение. За $p = 2$ се добива

$$p^{11} + 1989 = 2048 + 1989 = 4037 = 11 \cdot 367$$

што е сложен број. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен, што значи дека и бројот p^{11} е непарен, па затоа $p^{11} + 1989$ е парен број поголем од 2, што значи дека е сложен број.

54. Ако p е прост број, тогаш бројот $p^{2012} - 1$ е сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p = 2$, тогаш бројот $2^{2012} = (2^4)^{503} = 16^{503}$ завршува на цифрата 6, па затоа бројот $2^{2012} - 1 > 5$ завршува на цифрата 5, што значи дека е број поголем од 5, кој е делив со 5, т.е. е сложен број. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен, па затоа бројот $p^{2012} - 1$ ќе биде парен број поголем од 2, што значи дека е сложен број.

55. Докажи дека за секој прост број p бројот $p^{2014} + 1$ е сложен.

Решение. *Прв начин.* За $p = 2$ имаме

$$p^{2014} + 1 = 2^{2014} + 1 = (2^4)^{503} \cdot 2^2 + 1 = 16^{503} \cdot 4 + 1,$$

и тоа е сложен број, бидејќи цифрата на единиците на бројот 16^{503} е 6, па затоа цифрата на единиците на бројот $16^{503} \cdot 4$ е 4, т.е. цифрата на единиците на бројот $16^{503} \cdot 4 + 1$ е 5, што значи дека тој се дели со 5.

Ако $p > 2$, тогаш тој е непарен број, па затоа p^{2014} е непарен број, т.е. $p^{2014} + 1$ е парен број поголем од 2, што значи дека е сложен.

Втор начин. За $p = 2$ имаме

$$2^{2014} + 1 = (2^2)^{1007} + 1^{1007} = (2^2 + 1)((2^2)^{1006} - (2^2)^{1005} + (2^2)^{1004} - \dots - 2^2 + 1),$$

т.е. $(2^2 + 1) | (2^{2014} + 1)$.

Доказот за $p > 2$ е аналоген како и во првиот начин.

56. Најди ги сите прости броеви p за кои бројот $p^2 + 3$ е прост број.

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p^2 + 3 = 7$ и тоа е прост број. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен, што значи дека и бројот p^2 е непарен, па затоа $p^2 + 3$ е парен број поголем од 2, што значи дека $p^2 + 3$ е сложен број.

57. Ако p и $8p^2 + 1$ се прости броеви, тогаш и $8p^2 - 1$ е прост број. Докажи!

Решение. Ако p не се дели со 3, тогаш p^2 при делење со 3 дава остаток 1, па затоа $8p^2 + 1$ се дели со 3. Според тоа, $p = 3$ и притоа $8p^2 + 1 = 73$ е прост број. Јасно, во вој случај $8p^2 - 1 = 71$ е прост број.

58. Ако еден од броевите $2^n - 1$ и $2^n + 1$, $n > 2$ е прост, тогаш другиот број е сложен. Докажи!

Решение. Ако $n > 2$, тогаш $3 \nmid 2^n$, па затоа 2^n е од облик $3k+1$ или $3k+2$. Ако $2^n - 1$ е прост број, тогаш $2^n = 3k+2$, па затоа $2^n + 1 = 3(k+1)$ е сложен број. Понатаму, ако $2^n + 1$ е прост број, тогаш $2^n = 3k+1$, па затоа $2^n - 1 = 3k$ е сложен број.

59. Најди ги сите прости броеви p , такви да $2p^2 + 1 = k^5$, $k \in \mathbf{N}$.

Решение. Од равенството $2p^2 + 1 = k^5$ добиваме

$$2p^2 = k^5 - 1 = (k-1)(k^4 + k^3 + k^2 + k + 1). \quad (1)$$

Бидејќи $2p^2 + 1 = k^5$, добиваме дека k^5 , т.е. k е непарен број, што значи $k = 2n+1$ и $k > 1$. Од (1) имаме

$$2p^2 = 2n(k^4 + k^3 + k^2 + k + 1),$$

т.е.

$$p^2 = n(k^4 + k^3 + k^2 + k + 1).$$

Но, p е прост број, па затоа последното равенство е можно ако и само ако $n=1$ или $n=k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$. Но, $k=2n+1 > n$, па затоа не е можно $n=k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$. Според тоа, $n=1$, од што следува $k=3$ и $p^2 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121$, т.е. $p=11$.

60. Најди ги сите прости броеви од обликот $\frac{11 \dots 1}{11}$, каде n е природен број.

Решение. Користејќи го равенството: $11 \dots 1 = \frac{10^k - 1}{9}$, добиваме дека

$$\frac{11 \dots 1}{11} = \frac{10^{2n} - 1}{11 \cdot 9} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{11 \cdot 9}.$$

За $n=1$, наоѓаме $\frac{11 \dots 1}{11} = \frac{11}{11} = 1$ и тоа не е прост број.

За $n=2$, добиваме

$$\frac{11 \dots 1}{11} = \frac{(10^2 - 1)(10^2 + 1)}{11 \cdot 9} = \frac{101 \cdot 99}{99} = 101,$$

и тоа е прост број.

Ќе покажеме дека за $n > 2$, бројот $\frac{11 \dots 1}{11}$ е сложен. Одделно ќе ги разгледаме случаите кога n е парен и кога n е непарен број.

Случај 1. Нека n е парен број. Тогаш 10^{2k} има остаток 1 при делење со 9 и 11. Бидејќи $\text{NZD}(9, 11) = 1$ добиваме дека $10^n - 1$ е делив со 99 и бројот

$$\frac{11 \dots 1}{11} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{11 \cdot 9} = \frac{10^n - 1}{99} (10^n + 1)$$

е производ на два природни броеви поголеми од 1, па е сложен број.

Случај 2. Нека n е непарен број. Тогаш 10^{2k+1} има остаток -1 при делење со 11. Бројот $10^{2k+1} + 1$ е делив со 11, а $10^{2k+1} - 1$ е делив со 9. Бројот

$$\frac{11 \dots 1}{11} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{11 \cdot 9} = \frac{10^{2k+1} - 1}{9} \cdot \frac{10^{2k+1} + 1}{11}$$

е производ на два природни броеви поголеми од 1, па е сложен број.

61. Нека $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажи дека $1979 \mid p$.

Решение. Нека

$$A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1319} \text{ и } B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318}.$$

Тогаш важи

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= A - B = (A + B) - 2B = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1319} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{659} \\ &= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) \\ &= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \dots + \frac{1979}{989 \cdot 990} = \frac{1979N}{660 \cdot 661 \cdot \dots \cdot 1319}. \end{aligned}$$

Но, бројот бројот 1979 е прост број, тој не може да се скрати со ниту еден од множителите од именителот, па затоа $1979 \mid p$.

62. Најди ги сите парови прости броеви p и q , такви што $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

Решение. Нека ниту еден од броевите p, q не се дели со 3. Ако остатоците од делењето на p и q со 3 се совпаѓаат, тогаш левата страна на

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2 \quad (1)$$

се дели со 3, а десната страна не се дели со 3. Ако остатоците од делењето на p и q не се совпаѓаат, тогаш десната страна на (1) се дели со 3, а левата не.

Нека сега p се дели со 3. Тогаш $p = 3$. Од равенството

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2 > 0$$

следува $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27$, што не е можно. Нека q се дели со 3. Тогаш, $q = 3$ и $p^3 - 243 = (p + 3)^2$, па затоа $p(p^2 - p - 6) = 252$. Според тоа, $p \mid 252$, од што следува $p = 2, 3$ или 7 . Со непосредна проверка наоѓаме $p = 7$, т.е. $(p, q) = (7, 3)$.

63. Да се најде прост број N од облик $N = a^4 + b^4 + c^4 - 3$, каде a, b, c се исто така прости броеви.

Решение. Ако a, b, c се непарни броеви, тогаш бројот N е парен, па затоа нема да е прост број. Значи, барем еден од броевите a, b, c е парен, т.е. еднаков е на 2. Нека $a = 2$. Тогаш $N = b^4 + c^4 + 13$. Знаеме дека за секој број

x кој не се дели со 3 бројот $x^2-1=(x-1)(x+1)$ се дели со 3. Имено меѓу броевите $x-1, x, x+1$ точно еден се дели со 3. Според тоа, ако b и c не се делат со 3 тогаш бројот $N=(b^4-1)+(c^4-1)+15$ ќе се дели со 3, и нема да биде прост број. Нека $b=3$. Тогаш $N=c^4+94$. Знаеме дека, ако еден број не се дели со 5, т.е. ако има облик $5k\pm 1$ или $5k\pm 2$ тогаш $x^2=(5k\pm 1)^2=5m+1$ или $x^2=(5k\pm 2)^2=5m-1$, па затоа во секој случај $x^4=5t+1$, што значи x^4-1 ќе се дели со 5. Бидејќи $N=c^4-1+95$ се дели со 5 добиваме $c=5$. Навистина $N=c^4+94=719$.

64. Дали постојат прости броеви $p, q, r, (p \neq q \neq r)$ такви да

$$pq + qr + rp = 2002 ?$$

Решение. Од условот следува дека $p \neq q$ и $q \neq r$, па затоа можни се два случаја $p \neq r$ или $p = r$. Ако е и $p \neq r$, тогаш сите три броја p, q, r се непарни или два се непарни и третиот е бројот 2. И во двата случаја бројот $pq + qr + rp$ е непарен број. Ако па $p = r$, тогаш условот гласи

$$p(2q + p) = 2002 = 2 \cdot 1001.$$

Но, $2q + p > 2$, па затоа од последното равенство следува $p = 2$ и $2q + p = 1001$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат прости броеви p, q, r со бараните својства.

65. Најди ги сите прости броеви p такви да бројот p^2+11 има точно 6 природни делители (вклучувајќи го бројот 1 и самиот број).

Решение. Ако е $p = 2$, тогаш $p^2+11=15$, а бројот 15 има само 4 природни делители. Ако е $p = 3$, тогаш $p^2+11=20$ и бројот 20 има 6 природни делители. Ќе докажеме дека не може да е $p > 3$. Навистина, ако $p > 3$, тогаш $p = 6k \pm 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$, па затоа

$$p^2 + 11 = 36k^2 \pm 12k + 12 = 12(3k^2 \pm k + 1),$$

т.е. $12 | (p^2 + 11)$, а бројот 12 има 6 различни природни делители и $p^2 + 11 > 12$. Според тоа, единствено решение е $p = 3$.

66. Да се најдат сите прости броеви p, q и r кои го задоволуваат условот

$$r = p^q + q^p.$$

Решение. Ако сите три броја се непарни, тогаш p^q и q^p се непарни, па следува дека r е парен, а бидејќи r е прост следува дека $r = 2$. Но, тоа не е можно бидејќи p^q и q^p се поголеми од 1. Значи, меѓу r, p и q постои парен број и тој не е r . Нека $q = 2$. Тогаш $r = p^2 + 2^p$. Ако $p \neq 3$, тогаш p^2

при делење со 3 дава остаток 1, а 2^p при делење со 3 дава остаток -1. Значи, $3 \nmid r$. Но, r е прост број, па $r=3$ и ако замениме во $r=p^2+2^p$ добиваме $p=1$, што не е можно, бидејќи 1 не е прост број. Значи $p=3$ и со замена во $r=p^2+2^p$ добиваме $r=17$, кој е прост број. Според тоа, бараните тројки броеви (p, q, r) се: $(3, 2, 17)$ и $(2, 3, 17)$.

67. Најди ги сите прости броеви p и q такви што

$$(p+q)^p = (q-p)^{2q-1}.$$

Решение. Не може $q-p=1$, бидејќи $(q+p)^p > 1$, за секои прости броеви p и q . Нека r е прост делител на $q-p$, тогаш r е делител и на $q+p$, па тој е делител на броевите

$$2q = (q+p) + (q-p) \text{ и } 2p = (q+p) - (q-p).$$

Следува дека $p=q=r$ или $r=2$. Случајот $p=q$ не е возможен, бидејќи десната страна ќе биде нула, а левата е позитивен број. Значи, $q-p=2^k$ и $q+p=2^l$ за некои позитивни цели броеви k и l . Од

$$q = \frac{(q+p) + (q-p)}{2} = 2^{l-1} + 2^{k-1},$$

следува дека за $k > 1$, $2 \nmid q$, што е можно само за $q=2$, но тогаш

$$(q-p)^{2q-1} < 0 < (p+q)^p,$$

па мора $k=1$. Ова значи дека $q-p=2$. Од друга страна добиваме $lp=2q-1=2p+3$, па мора $3 \nmid p$, т.е. $p=3$ и $q=5$. Со непосредна проверка добиваме дека овие броеви се решение на задачата.

68. Најди ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека $7p+1=n^2$, $n \in \mathbf{N}$, заради што $7p=(n-1)(n+1)$. Бидејќи сите природни делители на бројот $7p$ се 1, 7, p и $7p$, тоа значи $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$, односно $n \in \{2, 8, 0, 6\}$. Со непосредна проверка се добива дека единствено решение е $n=6$, односно $p=5$.

69. Одреди прост број p , таков што бројот $2p+1$ да е точен куб на некој природен број.

Решение. Од условот $2p+1=n^3$ следува дека n е непарен број, понатаму

$$2p = n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

Бидејќи n е непарен број, нека $n=2k+1$, $k \in \mathbf{N}$. Тогаш

$$2p = 2k(4k^2 + 6k + 3), p = k(4k^2 + 6k + 3).$$

Бројот p е прост, па од последното равенство следува $k=1$, а

$$p=13, 2p+1=27=3^3.$$

70. Нека a, b и c се различни природни броеви, такви што a е делител на $b+c+bc$, b е делител на $a+c+ac$ и c е делител на $a+b+ab$. Докажи дека a, b и c не може да бидат сите прости броеви.

Решение. Не претпоставиме дека броевите a, b и c се прости. Тогаш

$$a|(b+c+bc) \Rightarrow a|(a+b+c+ab+bc+ca).$$

Аналогно добиваме дека b и c се делители $a+b+c+ab+bc+ca$. Понатаму, бидејќи a, b и c се различни прости броеви следува дека abc е делител на $a+b+c+ab+bc+ca$. Со други зборови

$$\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \quad (1)$$

е природен број.

Бидејќи a, b и c се различни прости броеви може само еден од нив да е парен и во тој случај abc е парен, а $a+b+c+ab+bc+ca$ е непарен број, што е противречност бидејќи парен број не е делител на непарен. Ако сите три броја се непарни прости броеви, тогаш најголемата вредност на десната страна на (1) се достигнува кога a, b и c примаат најмали можни вредности, т.е. кога тие се еднакви на 3, 5 и 7. Според тоа, најголемата можна вредност на (1) е еднаква на $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 3} = \frac{86}{105} < 1$, што противречи на фактот дека abc е делител на $a+b+c+ab+bc+ca$, т.е. дека десната страна на (1) е природен број. Според тоа, не е можно сите броеви a, b и c да се прости.

71. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.

Решение. Со N да го означиме најголемиот таков број. Нека

$$N = a_1 a_2 \dots a_n \text{ и } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1976.$$

Ќе докажеме дека $a_i \leq 4$. Ако за некој i е исполнето $a_i \geq 5$, тогаш наместо a_i можеме да земеме 2 или $a_i - 2$, па бидејќи $2(a_i - 2) > a_i$ во овој случај добиваме поголем производ, а збирот на множителите ќе остане непроменет. Исто така наместо четири земаме две двојки, при што збирот и производот остануваат исти. Затоа $N = 2^k 3^l$ при што $2k + 3l = 1976$. Од $2^3 < 3^2$ и $2+2+2=3+3$, следува $k \in \{0, 1, 2\}$. Конечно, од $1976 = 3 \cdot 658 + 2$, добиваме $k=1$ и $N = 2 \cdot 3^{658}$.

72. Најди ги сите тројки природни броеви (x, y, z) , кои го задоволуваат условот $xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 1986$.

Решение. Левата страна на равенството (1) ја разложуваме на множители

$$\begin{aligned} xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 &= xy(z+1) + x(z+1) + y(z+1) + (z+1) \\ &= (z+1)(xy + x + y + 1) = (z+1)[x(y+1) + (y+1)] \\ &= (x+1)(y+1)(z+1) \end{aligned}$$

и бидејќи $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$, од што следува

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2 \cdot 3 \cdot 331.$$

Нека земеме $x < y < z$ и од последното равенство добиваме

$$x+1=2, y+1=3, z+1=331,$$

односно $x=1, y=2, z=330$. Конечно, заради симетрија бараните тројки природни броеви се:

$$(1,2,330); (1,330,2); (2,330,1); (2,1,330), (330,2,1) \text{ и } (330,1,2).$$

73. Најди прости броеви p, q, r такви да $p = q^3 - r^3$.

Решение. Со примена на формулите за скратено множење наоѓаме

$$p = q^3 - r^3 = (q-r)(q^2 + qr + r^2)$$

и условот дека p е прост број следува дека е можен еден од следниве два случаи:

- 1) $q-r=1$ и $q^2 + qr + r^2 = p$ и притоа бидејќи 2 и 3 се единствените два последователни прости броеви добиваме

$$r=2, q=3 \text{ и } p = q^3 - r^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19.$$

- 2) $q-r=p$ и $q^2 + qr + r^2 = 1$, што не е можно бидејќи за секои прости броеви q и r важи $q^2 + qr + r^2 > 1$.

74. Најди ги сите прости броеви кои истовремено може да се претстават како збир и разлика на два прости броја.

Решение. Нека a, b, c, d, e, f се прости броеви за кои важи $a+b=c=e-f$.

Ако a и b се со иста парност, тогаш c е парен број поголем од 2, па значи е сложен број. Затоа b и c с непарни броеви. Но, бидејќи b е непарен број добиваме дека e и f се броеви со различна парност, при што e е непарен број. Понатаму, единствениот парен прост број е бројот 2, па затоа $a=2=f$ и $b+2=c=e-2$, од што следува дека $b=c-2$, c и $e=c+2$ се три последователни прости непарни броеви. Понатаму, бидејќи од три последователни непарни броеви барем еден е делив со 3, добиваме дека единствени непарни последователни прости броеви се 3, 5 и 7. Значи, $b=3, c=5, e=7$.

75. За кои природни броеви p броевите $p, p+2$ и p^2+2 се прости.

Решение. Јасно, $p \neq 2$. Ако $p=3$, тогаш $p+2=5$ и $p^2+2=11$ се исто така прости броеви. Нека $p > 3$. Тогаш p е од облик $6k-1$ или $6k+1$.

- 1) Ако $p=6k-1$, тогаш $p+2=6k+1$ може да е прост број, но

$$p^2+2=3(12k^2-4k+1)$$

е сложен број.

- 2) Ако $p=6k+1$, тогаш $p^2+2=3(12k^2+4k+1)$ и $p+2=3(2k+1)$ се сложени броеви.

Конечно, $p=3$ е единствениот прост број за кој и броевите $p+2=5$ и $p^2+2=11$ се исто така прости броеви.

76. Ако броевите p и $8p^2+1$ се прости, тогаш и $8p^2+2p+1$ е прост број. Докажи!

Решение. Броевите p и $8p^2+1$ се прости ако и само ако $p=3$ (зошто?). Но, тогаш $8p^2+2p+1=79$ е прост број, што и требаше да се докаже.

77. Ако p и p^2+2 се прости броеви, тогаш и p^3+2 е прост број. Докажи!

Решение. Броевите p и p^2+2 се прости ако и само ако $p=3$ (зошто?). Но, тогаш и $p^3+2=29$ исто така е прост број.

78. Најди ги сите прости броеви p за кои и броевите $4p^2+1$ и $6p^2+1$ се исто така прости.

Решение. За $p=5$ имаме $4p^2+1=101$ и $6p^2+1=151$ и тие се прости броеви. Ако $p \neq 5$, тогаш $p=5k \pm 1$, $p=5k \pm 2$, $k \in \mathbf{N}$. За $p=5k \pm 1$ бројот

$$4p^2+1=5(20k^2 \pm 8k+1)$$

е сложен, а за $p=5k \pm 2$ бројот

$$6p^2+1=5(30k^2 \pm 24k+5)$$

е сложен. Конечно, единствено решение е $p=5$.

79. Најди ги сите прости броеви p и q такви да $p^2-2q^2=1$.

Решение. Не може да биде $p=2$, бидејќи тогаш $p^2-2q^2 < 1$. Значи, $p \geq 3$. Но, тогаш простиот број p е од видот $p=4k \pm 1$, па равенството го добиваме обликот $(4k \pm 1)^2 - 1 = 2q^2$, т.е. $4k(2k \pm 1) = q^2$, од што следува дека q е парен број, па затоа $q=2$. Сега $p^2-8=1$, т.е. $p=3$. Конечно, единствено решение е парот $(3,2)$.

80. Најди ги сите прости броеви p и q такви да бројот $p^2+3pq+q^2$ е степен на бројот 5.

Решение. Нека $p^2+3pq+q^2=5^n$. Од тоа што $p \geq 2$ и $q \geq 2$, добиваме $p^2+3pq+q^2 \geq 20$, што значи дека $n \geq 2$. Значи, $p^2+3pq+q^2$ се дели со 25. Понатаму, од $p^2+3pq+q^2=(p-q)^2+5pq$ следува дека $(p-q)^2+5pq$ се дели со 5, па затоа и $(p-q)^2$ се дели со 5, т.е. $p-q$ се дели со 5, што значи дека $(p-q)^2$ се дели со 25. Последното значи дека $5pq$ мора да се дели со 25, односно дека $p=5$ или $q=5$. Меѓутоа, ако $p=5$, тогаш од деливоста со 5 следува дека и $q=5$. Конечно, единствено решение е $p=q=5$ и тогаш $p^2+3pq+q^2=5^3$.

81. Трицифрениот број $\overline{abc}$ е прост, а бројот $\overline{cba}$ е куб на природен број. Кои се тие броеви?

Решение. Од , следува дека $5 \leq n \leq 9$. Значи, $\overline{cba}$ може да биде еден од броевите 125, 216, 343, 517 и 729. Но, бројот $\overline{abc}$ е прост, па затоа треба да провериме кој од броевите 521, 612, 343, 715 или 927 е прост. Тоа е само бројот 521, што значи дека бараните броеви се 125 и 521.

82. Најди прости броеви p, q, r такви да $2p + 3q + 4r = 2006$.

Решение. Даденото равенство е можно само ако q е парен број, па затоа $q = 2$. Сега, $2p + 4r = 2000$, т.е. $p + 2r = 1000$. Но, последното равенство е можно само ако p е парен број, т.е. $p = 2$. Оттука, $2r = 998$, т.е. $r = 499$. Бројот 499 е прост, па затоа единствено решение е $p = q = 2$ и $r = 499$.

83. Дали постојат прости броеви p, q, r такви да

$$pqr + pq + qr + rp + p + q + r = 2006?$$

Решение. Не може сите броеви да се непарни, бидејќи во тој случај бројот $pqr + pq + qr + rp + p + q + r$ ќе биде непарен и не може да е еднаков на 2006. Нека $r = 2$. Тогаш имаме $3pq + 3q + 3p = 2004$, т.е. $pq + p + q = 668$. Повторно не може p и q истовремено да се непарни. Нека $q = 2$. Тогаш $3p = 666$, т.е. $p = 222$, но 222 не е прост број. Значи, прости броеви со саканото својство не постојат.

84. Најди ги сите прости броеви p, q и r такви да $p(264q + 4r) = 2008$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на $4p(66q + r) = 2008$, т.е. на равенката $p(66q + r) = 2 \cdot 251$. Бројот 251 е прост, а $66q + r > 2$, па затоа $p = 2$ и $66q + r = 251$. Ако $q = 2$, тогаш бројот $r = 251 - 66 \cdot 2 = 119 = 7 \cdot 17$ не е прост. За $q = 3$ имаме $r = 251 - 198 = 53$ и тоа е прост број, а ако $q \geq 4$, тогаш $66q \geq 66 \cdot 4 = 264 > 251$. Конечно, решението на задачата е $p = 2, q = 3, r = 53$.

85. Најди ги сите прости броеви p, q, r такви да $\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$.

Решение. Јасно, $p \neq q$, па затоа дадената равенка е еквивалентна со равенката $pr + p - 4q = qr + q$, т.е. со равенката $pr - qr = 5q - p$, односно со равенката $r = \frac{4q}{p-q} - 1$. Бројот r е прост, па затоа е природен и $p - q$ мора да е делител на $4q$. Не може $p - q = q$ бидејќи тогаш $p = 2q$, што противречи на фактот дека p е прост број. Од исти причини $p - q \neq 2q$ и $p - q \neq 4q$. Значи, $p - q = 1$ или $p - q = 2$ или $p - q = 4$.

Ако $p - q = 1$, тогаш $p = q + 1$, што е можно само ако $q = 2, p = 3$ и тогаш $r = 7$.

Ако $p - q = 2$, тогаш $p = q + 2$ и $r = 2q - 1$. За $q = 3$, добиваме $p = r = 5$. Ако $q \neq 3$, тогаш $q = 3k + 1$ или $q = 3k - 1$, при што во првиот случај добива-

ме $p = q + 2 = 3(k + 1)$, а во вториот случај $r = 2q - 1 = 6k - 3 = 3(2k - 1)$, т.е. соодветно p и r не се прости броеви.

Ако $p - q = 4$, тогаш $p = q + 4$ и $r = q - 1$. Од $r = q - 1$ следува дека единствена можност е $q = 3, r = 2$ и $p = 7$.

86. Да се најдат сите прости броеви p , за кои постојат природни броеви x и y кои се решенија на равенката $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x + y)(xy - p) = 5p$. Можни се повеќе случаи.

Случај 1. Нека $x + y = 1$ и $xy = 6p$. За прости броеви $p \geq 2$, равенката $x^2 - x + 6p = 0$ нема целобројни решенија.

Случај 2. Нека $x + y = 5$ и $xy = 2p$. Оттука $y = 5 - x$ и ако замениме во $xy = 2p$ ја добиваме равенката $x^2 - 5x + 2p = 0$. Последната равенка има решение ако $25 - 8p \geq 0$ и како $p \geq 2$ е прост број добиваме $p \in \{2, 3\}$. За $p = 2$ ги добиваме решенијата $(1, 4)$ и $(4, 1)$. За $p = 3$ ги добиваме решенијата $(2, 3)$ и $(3, 2)$.

Случај 3. Нека $x + y = p$ и $xy = p + 5$. Оттука $y = p - x$ и ако замениме во $xy = p + 5$ ја добиваме равенката $x^2 - px + p + 5 = 0$. Последната равенка има решение ако $p^2 - 4p - 20 \geq 0$, од каде добиваме $p \geq 7$. Но, $p^2 - 4p - 20$ треба да е полн квадрат, т.е. $p^2 - 4p - 20 = q^2$, каде $1 \leq q < p$. Според тоа, $(p - 2)^2 - q^2 = 24$, односно $(p + q - 2)(p - q - 2) = 24$. Јасно е дека броевите $p + q - 2$ и $p - q - 2$ се парни. Притоа имаме два подслучаи:

а) $p + q - 2 = 12$ и $p - q - 2 = 2$. Непосредно се добива $p = 9$ кој не е прост број.

б) $p + q - 2 = 6$ и $p - q - 2 = 4$. Непосредно се добива $p = 7$ и $q = 1$. Почетната равенка има решенија $(3, 4)$ и $(4, 3)$.

Случај 4. Нека $x + y = 5p$ и $xy = p + 1$. Во овој случај не постои $p \in \mathbb{N}$ такво што за x, y се добиваат решенија што се природни броеви.

Конечно, равенката има решенија во множеството природни броеви само за $p \in \{2, 3, 7\}$.

87. Разликата на два двоцифрени прости броја, кои се запишани со исти цифри е квадрат на природен број. Кои се тие броеви?

Решение. Нека $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ се двоцифрени прости броеви. Тие не може да бидат парни, па затоа цифрите a и b се непарни. Од условот на задачата следува дека бројот $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$ е квадрат природен број. Тоа значи дека $a - b \in \{1, 4, 9\}$. Но, цифрите a и b се непарни, па затоа нивната разлика е парна, што значи $a - b = 4$. Постојат три можности $a = 5, b = 1$; $a = 7, b = 3$;

$a=9, b=5$. Во првиот и третиот случај броевите 15 и 95 не се прости, а во третиот случај броевите се 73 и 37 и разликата е $36=6^2$.

88. Најди ги сите природни броеви n за кои бројот n^5+n+1 е прост.

Решение. Со примена на формулите за скратено множење добиваме

$$\begin{aligned} n^5+n+1 &= n^5+n^4+n^3-n^4-n^3-n^2+n^2+n+1 \\ &= n^3(n^2+n+1)-n^2(n^2+n+1)+(n^2+n+1)=(n^3-n^2+1)(n^2+n+1). \end{aligned}$$

Според тоа, за да n^5+n+1 е прост број потребно е еден од множителите да биде еднаков на 1. Но, $n^2+n+1 \geq 3$, за секој природен број n , па затоа $n^3-n^2+1=1$, т.е. $n^2(n-1)=0$, што значи $n=1$. Тогаш $1^2+1+1=3$ е бараниот прост број.

89. Нека a и b се цели броеви такви да бројот $a^2+9ab+b^2$ се дели со 11. Докажи дека и бројот a^2-b^2 се дели со 11.

Решение. Имаме $a^2+9ab+b^2=(a-b)^2+11ab$ и бидејќи $11|a^2+9ab+b^2$ следува дека $11|(a-b)^2$, т.е. $11|(a-b)$, па затоа $11|(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

90. Најди природен број кој има точно четири различни природни делители, вклучувајќи го бројот 1 и самиот број, таков да збирот на делителите е за 2000 поголем од самиот број.

Решение. Бараниот број може да има еден или два различни прости делители. Во првиот случај бројот ќе има облик $p \cdot p \cdot p$, каде p е прост број. Треба да важи $1+p+p \cdot p+p \cdot p \cdot p=2000+p \cdot p \cdot p$, па затоа $p(1+p)=1999$, што не е можно бидејќи за секој природен број p бројот $p(1+p)$ е парен. Ако бараниот број има два прости делители p и q , тогаш од условот на задачата имаме $1+p+q+pq=2000+pq$, па затоа $p+q=1999$ и ова е можно само за $p=2$ и $q=1997$. Бараниот број е $n=pq=2 \cdot 1997=3994$.

91. Најди ги сите прости броеви n така да множеството

$$A=\{n+2, n^2+4, 6n+1, n^3+2\}$$

содржи само прости броеви.

Решение. Ако $n=2$, тогаш бројот $n+2=4$ е сложен, што значи дека множеството A во овој случај не содржи само прости броеви. За $n=3$ множеството $A=\{5, 13, 19, 20\}$ и за $n=5$ множеството $A=\{7, 29, 31, 127\}$ содржат само прости броеви. Сите останати прости броеви се непарни броеви поголеми од 5. Ќе докажеме дека за секој непарен број поголем од 5 барем еден елемент на множеството A е сложен број. Ако n завршува на цифрата 1, тогаш бројот n^4+4 завршува на цифрата 5, па е делив со 5 и бидејќи е поголем од 5, тој е сложен број. Ако n завршува на цифрата 3, тогаш $n+2$ завршува на цифрата 5 и е поголем од 5, па затоа е сложен број. Ако n

завршува на цифрата 7, тогаш бројот $n^3 + 2$ завршува на цифрата 5, па е сложен број. Конечно, ако n завршува на цифрата 9, тогаш бројот $6n + 1$ е сложен број, бидејќи е делив со 5. Значи, бараните броеви се $n = 3$ и $n = 5$.

92. Најди ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:

а) N има точно 16 делители $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{15} < d_{16} = N$;

б) делителот со индекс d_5 (тоа е d_{d_5}) е еднаков на $(d_2 + d_4)d_6$.

Решение. Да забележиме најнапред дека N нема повеќе од 4 прости различни делители и дека $d_2 = 2$.

Од условите на задачата следува дека $2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$, од каде $d_4 \geq 5$. Бидејќи $d_4 < d_5 \leq 2 + d_4$, следува дека

$$d_5 = 1 + d_4 \quad (1)$$

или

$$d_5 = 2 + d_4 \quad (2).$$

Ако е исполнето равенството (1), тогаш $d_6 = 2 + d_4$, од каде следува дека $3 | N$, односно $d_3 = 3$. Бидејќи $6 | N$ мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 7$ и $d_6 = 8$, од каде следува дека $4 | N$ и $d_4 = 4$, што е противречно на (1). Останува да биде исполнето равенството (2), односно $d_5 = 2 + d_4$. Ги разгледуваме следните случаи:

i) Ако $4 | N$, бидејќи $d_4 \geq 5$, добиваме $d_3 = 4$, од каде следува $8 | N$. Бидејќи $d_6 \geq 8$, мора $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Сите овие случаи водат до контрадикција, имено

- ако $d_4 = 8$, мора $d_5 = 10$, од каде $5 | N$ и $d_4 = 4$, што е невозможно,
- ако $d_5 = 8$, имаме $d_4 = 6$, од каде $3 | N$ и следствено $d_3 = 3$, што е невозможно,
- ако $d_6 = 8$, тогаш $d_5 = 7$, па е $d_4 = 5$ и $10 | N$. Но, $d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$, што е невозможно.

Значи 4 не е делител на N , па заклучуваме дека d_3 е прост делител.

ii) Ако $3 | N$, тогаш $d_3 = 3$. Бидејќи $6 | N$ и $d_4 \geq 6$, мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 8$, па следува дека $4 | N$, што е невозможно.

Значи 3 не е делител на N , па заклучуваме дека $d_3 \geq 5$ и $d_4 \geq 7$.

Бидејќи N и $2 + d_4$ не се деливи со 4, заклучуваме дека d_4 е непарен. Бидејќи $2 + d_4$ и d_4 не се деливи со 3, добиваме дека $d_4 = 3k + 2$, за некој цел број k и бидејќи d_4 е непарен следува дека $d_4 = 6l + 5$, за некој цел број l . Бидејќи $d_5 \leq 16$, мора $7 \leq d_4 \leq 14$. Единствена можност е $d_4 = 11$ и $d_3 = 13$. Бидејќи $2d_3 | N$ и $2d_3 \geq d_4$, заклучуваме дека $d_3 \geq 6$. Бидејќи d_3 е прост и $d_3 < 11$, заклучуваме дека $d_3 = 7$. Конечно

$$N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002.$$

93. Ако a и b се цифри, покажи дека во низата броеви $\overline{b}$, $\overline{ab}$, $\overline{aab}$, $\overline{aaab}$, ..., постојат бесконечно многу сложени броеви.

Решение. i) Ако $b \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$, тврдењето важи, бидејќи тогаш секој од броевите $\overline{b}$, $\overline{ab}$, $\overline{aab}$, $\overline{aaab}$, ... е делив со 2 или со 5.

ii) Ако $b = 3$ или $b = 9$, тогаш броевите од облик $\overline{aa...ab}$, $k = 1, 2, \dots$ се дели-

ви со 3, затоа што збирот на нивните цифри е

$$3k \cdot a + b = 3k \cdot a + 3 = 3 \cdot (ka + 1) \text{ или } 3k \cdot a + b = 3k \cdot a + 9 = 3 \cdot (ka + 3).$$

iii) Ако $b = 7$, тогаш од $7 \mid 111111$, следува дека $7 \mid \overline{aaaaaa7}$, затоа што

$$\overline{aaaaaa7} = \overline{aaaaaa} \cdot 10 + 7 = a \cdot 111111 \cdot 10 + 7 = 7 \cdot (a \cdot 15873 \cdot 10 + 1),$$

па и дека $7 \mid \overline{aa...a7}$, $k = 1, 2, \dots$, затоа што

$$\begin{aligned} \overline{aa...a7} &= \overline{aaaaaa} \cdot 10^{6(k-1)} + \dots + \overline{aaaaaa} \cdot 10^6 + \overline{aaaaaa} \cdot 10 + 7 \\ &= (10^{6(k-1)} + \dots + 10^6 + 1) \cdot \overline{aaaaaa} \cdot 10 + 7 \\ &= (10^{6(k-1)} + \dots + 10^6 + 1) \cdot a \cdot 7 \cdot 15873 \cdot 10 + 7 \end{aligned}$$

iv) Ако $b = 1$, тогаш постои број од облик $11...1$ кој е делив со $\overline{a1}$, па имаме $\overline{a1} \mid 11...1 \Rightarrow \overline{a1} \mid \overline{aa...a} \Rightarrow \overline{a1} \mid \overline{aa...aa1}$, од каде пак $\overline{a1} \mid \overline{aa...aa1}$, $m = 1, 2, \dots$

94. Најди ги сите броеви p , q и r , такви што p и r се прости, q е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:

$$(p + q + r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2r(p + q) = (p - q)^2.$$

Бидејќи r е прост, следува дека r е делител на $p - q$, па r^2 е делител на десната страна од последното равенство, од каде следува дека r е делител на $2(p + q)$. Ако $r > 2$, тогаш r е делител на $p + q$, па мора r да е делител и на p и на q , но бидејќи p е прост, тоа е можно само ако $p = r$ и $q = sr$. По средување добиваме

$$2(1 + s) = (s - 1)^2,$$

од каде

$$s^2 - 4s - 1 = 0.$$

Последното равенство нема целобројни решенија, па во овој случај равенката нема решение. Ако $r = 2$, тогаш p и q се со иста парност, случајот кога $p = 2$ е невозможен исто како случајот $p = r$ од претходно, па мора да бидат непарни. Нека $a \neq 2$ е прост делител на $p + q$, тогаш мора a да е делител и на $p - q$, па мора да е делител и на p и на q , што е можно само ако $p = a$ и $q = sa$, во овој случај добиваме

$$4(1+s) = a(s-1)^2,$$

од каде

$$as^2 - (2a+4)s + (a-4) = 0.$$

Решенија на последната равенка се

$$\frac{a+2 \pm \sqrt{a^2+4a+4-a^2+4a}}{a} = \frac{a+2 \pm 2\sqrt{2a+1}}{a}.$$

Ако бројот $\sqrt{2a+1}$ е цел, тогаш е непарен, па $2a+1=4b^2+4b+1$, од каде $a=2b(b+1)$, па не може да е прост. Од досега изнесеното следува дека

$p+q$ и $p-q$ мора да се степени на 2, т.е. $p-q=2^k$ и $p+q=2^{2k-2}$, од каде $2p=2^k+2^{2k-2}$ и $2q=2^{2k-2}-2^k$ и бидејќи p и q се непарни, мора $k=1$, но тогаш $p+q=1$, што не е можно. Следува дека равенката нема решенија кои се прости броеви.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ЧЕТВРТА ГЛАВА

1. Најди го најмалиот петцифрен природен број кој при делење со 17 дава остаток 5, а при делење со 24 дава остаток 3.

Решение. Нека n е бараниот број. Тогаш $n=17x+5$, односно $n=24y+3$, каде $x, y \in \mathbf{N}$. Значи $17x+5=24y+3$, т.е. $17x=24y-2$. Ќе ја решиме последната Диофантова равенка. Користејќи го Ојлеровиот метод наоѓаме

$$x = \frac{24y-2}{17} = \frac{17y+7y-2}{17} = y + \frac{7y-2}{17}$$

и бидејќи $x \in \mathbf{N}$ добиваме $\frac{7y-2}{17} = a \in \mathbf{N}$, т.е. $7y-2=17a$, па затоа

$$y = \frac{17a+2}{7} = 2a + \frac{3a+2}{7}.$$

Понатаму, $y \in \mathbf{N}$, па затоа $\frac{3a+2}{7} = b \in \mathbf{N}$, т.е. $3a+2=7b$, што значи

$$a = \frac{7b-2}{3} = 2b + \frac{b-2}{3}$$

и бидејќи $a \in \mathbf{N}$ добиваме $\frac{b-2}{3} = c \in \mathbf{N}$, т.е. $b=3c+2$, $c \in \mathbf{N}$, па затоа

$$a = 7c + 4 \Rightarrow y = 17c + 10 \Rightarrow x = 24c + 14 \Rightarrow n = 408c + 243.$$

Конечно, од $10000 = 408 \cdot 24 + 208$, добиваме $c = 24$ и

$$n = 408 \cdot 24 + 243 = 10035.$$

2. Реши ја Диофантовата равенка

а) $3x + 7y = 1988$,

б) $3x + 15y = 1235$.

Решение. а) Едно од можните решенија е $x_0 = 0$, $y_0 = 284$. Сите решенија на дадената равенка се дадени со: $x = 7t$, $y = 284 - 3t$, $t \in \mathbf{Z}$.

б) Равенката нема решение бидејќи $\text{NZD}(3, 15) = 3$ и $3 \nmid 1235$.

3. Марко имал 99 марки со вредност 2, 3 и 5 денари. Колку имал Марко од секоја марка поединечно ако вкупно имал 22 марки?

Решение. Нека Марко имал x марки од 2, y марки од 3 и z марки од 5 денари. Тогаш имаме $2x + 3y + 5z = 99$ и $x + y + z = 22$ и со замена од втората во првата равенка добиваме $2x + 3y + 5(22 - x - y) = 99$, односно $3x + 2y = 11$. Сите решенија во множеството природни броеви на последната равенка се (1, 4) и (3, 1). Според тоа, решение на задачата е:

$$(x, y, z) = (x, y, 22 - x - y) \in \{(1, 4, 17), (3, 1, 18)\}.$$

4. Пекарот Теодор треба да направи 100 векни леб тешки $5kg$, $3kg$ и $0,5kg$. Колку векни треба Теодор да направи ако нивната вкупна тежина е $100kg$.

Решение. Нека x е бројот на векните од $5kg$, y е бројот на векните од $3kg$ и z е бројот на векните од $0,5kg$. Од условот на задачата имаме $x + y + z = 100$ и $5x + 3y + 0,5z = 100$ и ако од првата равенка замениме во втората ја добиваме Диофантовата равенка

$$5x + 3y + 0,5(100 - x - y) = 100,$$

од која после средувањето ја добиваме равенката

$$9x + 5y = 100.$$

едно од можните решенија на последната равенка е $x_0 = 0$, $y_0 = 20$, па затоа нејзиното општо решение е дадено со $x = 5k$, $y = 20 - 9k$ и притоа $z = 100 - x - y = 80 + 4k$, $k \in \mathbf{Z}$. Конечно, бидејќи решенијата треба да бидат во множеството природни броеви, добиваме $k = 0, 1, 2$, т.е. пекарот Теодор може да ги направи следниве комбинации векни леб:

$$(x, y, z) \in \{(0, 20, 80); (5, 11, 84); (10, 2, 88)\}.$$

5. Една група девојчиња и момчиња собрале 1700 денари како роденденски поклон за свој другар. Секое девојче дало по 200 денари, а секое момче по 300 денари. Колку момчиња и колку девојчиња имало, ако групата имала непарен број членови?

Решение. Нека во групата имало d девојчиња и m момчиња. Според условот $200d + 300m = 1700$, односно $2d + 3m = 17$. Десната страна на равенството е непарна, па затоа мора m да биде непарен број. Притоа $m < 6$. Но, $m + d$ е непарен број и бидејќи m е непарен број заклучуваме дека d е парен број. Од добиените услови следува $m = 3$ и $d = 4$, што значи дека биле 4 девојчиња и 3 момчиња.

6. Марко се движи по права линија така да за една минута прави или 47 чекори на десно или 37 чекори на лево. После секоја минута се мери оддалеченоста на Марко од почетната положба. Како треба да се движи Марко и по колку најмалку цели минути за да тој се најде еден чекор на десно од почетната положба?

Решение. Ако Марко оди x минути на десно и y минути на лево, тогаш треба да се најдат x и y такви што $47x - 37y = 1$ и $\min(x + y)$. Решението на Диофантовата равенка е $x = 37t + 26$, $y = 47t + 33$, каде $t \in \mathbf{Z}$. Но, $x, y \geq 0$, па затоа $t \geq 0$ и бараниот минимум се добива за $t = 0$, што значи $x = 26$, $y = 33$, т.е. Марко се движи 26 минути на десно и 33 минути на лево или вкупно 59 минути.

7. Кифла чини половина денар, погачица 2 денари, а геврек 5 денари. Дали може со 100 денари да се купат 100 пецива?

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 2y + 5z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

кој треба да го решиме во множеството природни броеви. Ако првата равенка ја помножиме со 2 и од неа ја одземеме втората равенка добиваме $3y + 9z = 100$. Последната равенка нема решение во множеството природни броеви бидејќи левата страна е делива со 3, а десната не е делива со 3. Значи, не е можно да се направи споменатото купување.

8. Петар и Иван живеат во иста зграда во која на секој кат има по 10 станови. Становите почнуваат од првиот спрат и се нумерирани со броевите 1, 2, 3, 4, ... Петар живее на кат чиј број е еднаков на бројот на станот во кој живее Иван. Збирот на броевите на станите на Иван и Петар е 239. Кој е бројот на станот во кој живее Петар?

Решение. Нека x е бројот на станот на Иван. Станот на Петар се наоѓа на $x - 1$ кат, па затоа неговиот број е $10(x-1) + y$, $y \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Збирот на броевите на нивните станови $x + 10(x-1) + y = 239$, од каде добиваме $x = 22 + \frac{7-y}{11}$. Бројот x е природен, што значи $y = 7$ и $x = 22$. Значи, Петар живее во станот со број 217.

9. Најди ги сите трицифрени броеви кои го имаат следново својство: ако пред дадениот број се запише цифрата на единиците на бројот, се добива четирицифрен број кој е за 246 поголем од производот на дадениот број и бројот 23.

Решение. Нека $x = \overline{abc}$ е бараниот број. Од условот на задачата имаме $\overline{cabc} = 246 + 23 \cdot \overline{abc}$. Но, $\overline{cabc} = \overline{c000} + \overline{abc} = 1000c + x$, па затоа $1000c + x = 246 + 23x$, од каде добиваме $x = \frac{1000c - 246}{22} = 45c - 11 + \frac{5c - 2}{11}$. Бидејќи $5c - 2$ се дели со 11 само за $c = 7$ од последната равенка следува $x = 307$.

10. Најди трицифрен број $\overline{abc}$ таков што $49a + 7b + c = 286$.

Решение. Условот на задачата го запишуваме во облик

$$49a + 7b + c + 1 = 287.$$

Десната страна на последното равенство се дели со 7 и бидејќи $49a + 7b$ се дели со 7, добиваме дека $7 \mid (c+1)$, а тоа е можно само ако $c = 6$. Сега, со замена за $c = 6$ добиваме $7a + b = 40$ и како a и b се цифри, од последната равенка наоѓаме $a = b = 5$. Конечно, бараниот број е 556.

11. Равенката $2m^2 + n^2 = 2mn + 3n$ реши ја во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2m - n)^2 + (n - 3)^2 = 9,$$

од каде се добива дека

$$(2m - n, n - 3) \in \{(0, -3), (0, 3), (3, 0), (-3, 0)\},$$

па решенијата се $(m, n) \in \{(0, 0), (0, 3), (3, 3), (3, 6)\}$.

12. Определи ги сите цели броеви x и y такви што

$$x^2 - 6x + 4y^2 - 4y + 5 = 0.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$x^2 - 6x + 9 + 4y^2 - 4y + 1 + 5 = 10.$$

Но тогаш

$$(x - 3)^2 + (2y - 1)^2 = 5.$$

Бројот 5 како збир на два квадрати на цели броеви може да се претстави на следните начини:

$$5 = 2^2 + 1^2 = (-2)^2 + 1^2 = 2^2 + (-1)^2 = (-2)^2 + (-1)^2.$$

Од тоа што $2y-1$ е непарен број, имаме

$$(2y-1)^2 = 1 \text{ и } (x-3)^2 = 2^2,$$

т.е.

$$\begin{cases} |2y-1| = 1 \\ |x-3| = 2 \end{cases}.$$

Решенија (x, y) на последниот систем се $(1, 1), (1, 0), (5, 0)$ и $(5, 1)$.

13. Најди ги сите цели броеви x, y такви што $x^4 + y^{2008} = 2x^2$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките $x^4 - 2x^2 + 1 + y^{2008} = 1$, т.е. $(x^2 - 1)^2 + y^{2008} = 1$. Значи единствени целобројни решенија се: $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$.

14. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz - 2y - 4yz + 1 = 0.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2 - 4xz + 4z^2 + 4y^2 - 4yz + z^2 + y^2 - 2y + 1 = 0,$$

$$(x - 2z)^2 + (2y - z)^2 + (y - 1)^2 = 0,$$

од каде следува

$$x - 2z = 0, 2z - y = 0, y - 1 = 0, \text{ т.е. } y = 1, z = 2y = 2, x = 2z = 4.$$

15. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3(x^2 + y^2) + 2xy = 88.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$2(x + y)^2 + (x - y)^2 = 88.$$

Бидејќи првиот собирик и збирот се парни броеви следува дека и вториот собирик е парен број, па затоа x и y се со иста парност.

Ако $x = 2a$, $y = 2b$, тогаш равенката го добива обликот

$$2(a + b)^2 + (a - b)^2 = 22.$$

Од $2(a + b)^2 \leq 22$ следува $a + b \leq 3$, па затоа можни се следниве случаи $a = 1, b = 1$; $a = 1, b = 2$ или $a = 2, b = 1$. Лесно се гледа дека тоа не се решенија на последната равенка.

Ако $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$, тогаш равенката го добива обликот

$$2(a + b - 1)^2 + (a - b)^2 = 22,$$

при што $a + b \leq 4$. Сега, можни се следниве случаи: $a = 1, b = 1$; $a = 1, b = 2$; $a = 1, b = 3$; $a = 2, b = 1$; $a = 2, b = 2$; $a = 3, b = 1$. Решенија на последната

равенка се $a=1, b=3$ и $a=3, b=1$, па затоа решенија на почетната равенка се $x=1, y=5$ и $x=5, y=1$.

16. Во множеството природни броеви реши ја равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$2(x+y) = xy$$

$$xy - 2x - 2y + 4 = 4$$

$$(x-2)(y-2) = 4,$$

и бидејќи $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ од последната равенка ги добиваме системите

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y-2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases}$$

чији решенија се: (3, 6); (4, 4) и (6, 3), соодветно.

17. Равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, ($p > 1$ е даден прост број), да се реши во множеството природни броеви.

Решение. Равенката може да ја запишеме во облик

$$px + py = xy \Rightarrow xy - px - py + p^2 = p^2 \Rightarrow$$

$$x(y-p) - p(y-p) = p^2 \Rightarrow (x-p)(y-p) = p^2.$$

Бидејќи p е прост број, од последната равенка можни се следните случаи:

1) $x-p=1, y-p=p^2$, па затоа $x=p+1, y=p^2+p$,

2) $x-p=p, y-p=p$, па затоа $x=2p, y=2p$ и

3) $x-p=p^2, y-p=1$, па затоа $x=p^2+p, y=p+1$.

Не е тешко да се провери дека добиените решенија се решенија и на почетната равенка.

18. Реши ја Диофантовата равенка:

а) $3x + xy = 11$,

б) $xy - 2x + 3y = 13$,

в) $5(x+y) = xy$,

г) $x^4 + 4y^4 = p$, p е прост број, $x, y \in \mathbf{N}$,

д) $x^2 + 2x + 13 = y^2$,

ѓ) $7p + 1 = n^2$, p е прост број, $n \in \mathbf{N}$,

е) $x^2 - 7xy + 12y^2 = 7$,

ж) $8x^2 + 10x + 3 = p$, p е прост број.

Решение. а) Од $3x + xy = 11$ добиваме $x(3+y) = 11$. Бидејќи 11 е прост број во множеството цели броеви важи $11 = 1 \cdot 11 = (-1) \cdot (-11)$, од каде добиваме $(x, y) \in \{(1, 8), (-1, -14), (11, -2), (-11, -4)\}$.

б) Од $xy - 2x + 3y = 13$ последователно добиваме

$$xy - 2x + 3y - 6 = 7,$$

$$(x+3)(y-2) = 7.$$

Но, 7 е прост број, па аналогно како под а) добиваме дека решенија на последната равенка се $(x, y) \in \{(-2, 9), (4, 3), (-10, 1), (-4, -5)\}$.

в) Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$(x-5)(y-5)=25$$

и бидејќи $25=1 \cdot 25=5 \cdot 5=(-5) \cdot (-5)=(-1) \cdot (-25)$ добиваме дека нејзини решенија се

$$(x, y) \in \{(6, 30), (30, 6), (4, -20), (-20, 4), (10, 10), (0, 0)\}.$$

г) Ако $x > 1$, тогаш

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2) \end{aligned}$$

е сложен број. Но, p е прост број, па затоа во овој случај равенката нема решение.

Ако $x=1$ и $y > x$, тогаш $x^4 + 4y^4$ е сложен број и како p е прост број добиваме дека и во овој случај равенката нема решение. Конечно, единствено решение е $x=y=1$, $p=5$.

д) *Упатство*. Равенката $x^2 + 2x + 13 = y^2$ последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned} y^2 - (x+1)^2 &= 12 \\ (y-x-1)(y+x+1) &= 12. \end{aligned}$$

Користејќи дека $12=1 \cdot 12=2 \cdot 6=3 \cdot 4=(-1) \cdot (-12)=(-2) \cdot (-6)=(-3) \cdot (-4)$ ги наоѓаме решенијата на равенката.

ѓ) Дадената равенка ја запишуваме во облик $7p=(n-1)(n+1)$. Можни се следниве случаи

$$\begin{cases} n-1=7 \\ n+1=p \end{cases} \quad \begin{cases} n-1=p \\ n+1=7 \end{cases} \quad \begin{cases} n-1=1 \\ n+1=7p \end{cases} \quad \begin{cases} n-1=7p \\ n+1=1 \end{cases}$$

Од првиот систем имаме $n=8$, $p=9$, што не е можно. Од вториот систем имаме $n=6$, $p=5$, а третиот и четвртиот систем доведуваат до противречност.

Значи, решение е $n=6$, $p=5$.

е) *Упатство*. Равенката последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy - 3xy + 12y^2 &= 7 \\ x(x-4y) - 3y(x-4y) &= 7 \\ (x-4y)(x-3y) &= 7. \end{aligned}$$

Користејќи дека $7=7 \cdot 1=(-7) \cdot (-1)$ ги наоѓаме решенијата на равенката.

ж) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(2x+1)(4x+3)=p$. Бидејќи еден од множителите мора да биде еднаков на 1, добиваме

$$\begin{cases} 2x+1=1 \\ 4x+3=p \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x+1=p \\ 4x+3=1 \end{cases},$$

од каде наоѓаме дека само првиот систем дава решение $x=0$, $p=3$.

19. Најди природен број n кој кога ќе се зголеми за 5 или ќе се намали за 11 е квадрат на некој број.

Решение. Нека n е бараниот број. Имаме $n+5=a^2$ и $n-11=b^2$, од каде добиваме $a^2-b^2=16$, т.е. $(a-b)(a+b)=16$. Од последната равенка ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=4 \end{cases}.$$

Од првиот систем имаме $a=5, b=3$, па е $n=20$. Вториот систем нема решенија во множеството природни броеви, а од третиот систем добиваме $a=4, b=0$, па е $n=11$.

20. Во множеството на целите броеви реши ја равенката: $x^2 - xy - 2y^2 = 27$.

Решение. Важи $x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 27$, т.е. $x(x+y) - 2y(x+y) = 27$, па затоа $(x+y)(x-2y) = 27$. Во множеството цели броеви делители на 27 се броевите $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$, па затоа треба да решиме осум системи линеарни равенки со две непознати. Четирите системи не даваат решение во множеството цели броеви, а од останатите четири ги добиваме подредените парови: $(5, -2); (-5, 2); (7, 2)$ и $(-7, -2)$.

21. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

а) $x^2 - y^2 = 61$, б) $x^3 - y^3 = 61$, в) $x^4 - y^4 = 61$.

Решение. Прво да забележиме дека 61 е прост број.

а) Од $x^2 - y^2 = 61$ следува $(x-y)(x+y) = 61$ и ако земеме предвид дека $x+y > x-y$ добиваме $x+y=61, x-y=1$, од каде следува $x=31$ и $y=30$.

б) Од $x^3 - y^3 = 61$ следува $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 61$, па затоа $x-y=1$ и $x^2 + xy + y^2 = 61$. Ако замениме $x=y+1$, добиваме $3y^2 + 3y = 60$, т.е. $y(y+1) = 20$ до каде следува $y=4$ и $x=y+1=5$.

в) Од $x^4 - y^4 = 61$ следува $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 61$, што значи $x^2 - y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 61$. Според тоа $2x^2 = 62$, т.е. $x^2 = 31$, што не е можно.

22. Дали постојат цели броеви x и y такви да $x^2 + 2012 = y^2$? Одговорот да се образложи и ако постојат да се најдат сите парови такви броеви.

Решение. Дадената равенка можеме да ја запишеме во видот $2012 = y^2 - x^2$, т.е.

$$(y-x)(y+x) = 2012.$$

Понатаму, $(y-x)(y+x) = 2 \cdot 2 \cdot 503$, од каде ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} y-x=1006 \\ y+x=2 \end{cases}, \text{ чие решение е парот } (-502, 504),$$

$$\begin{cases} y-x=-1006 \\ y+x=-2 \end{cases}, \text{ чие решение е парот } (502, -504),$$

$$\begin{cases} y - x = -2 \\ y + x = -1006 \end{cases}, \text{ чие решение е парот } (-502, -504),$$

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 1006 \end{cases}, \text{ чие решение е парот } (502, 504),$$

$$\begin{cases} y - x = 503 \\ y + x = 4 \end{cases} \text{ и сличните комбинации немаат решение во } \mathbf{Z}$$

$$\begin{cases} y - x = 2012 \\ y + x = 1 \end{cases} \text{ и сличните комбинации немаат решение во } \mathbf{Z}.$$

23. Најди ги сите парови цели броеви (x, y) такви што

$$2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1).$$

Решение. Последователно имаме

$$2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2y)(2x - y) = 5.$$

Сега од последната равенката можеме да ги формираме системите

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases},$$

од каде добиваме дека бараните парови се $(3, 1), (-1, -3), (-3, -1), (1, 3)$.

24. Во множеството цели броеви реши ја равенката $xy + 7x - 3y = 25$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$xy - 3y + (7x - 21) = 4,$$

т.е. со равенката

$$(x - 3)(y - 7) = 4.$$

Оттука добиваме

$$\begin{cases} x - 3 = 1 \\ y - 7 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 3 = -1 \\ y - 7 = -4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 3 = -2 \\ y - 7 = -2 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x - 3 = 2 \\ y - 7 = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 3 = 4 \\ y - 7 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 3 = -4 \\ y - 7 = -1 \end{cases}.$$

Решенијата на овие системи равенки ги даваат решенијата на почетната равенка, па затоа: $(x, y) \in \{(4, -3), (2, -11), (5, -5), (1, -9), (7, -6), (-1, -8)\}$.

25. Во множеството цели броеви реши ја равенката $y^2 - x^2 = 4x + 11$.

Решение. Равенка е еквивалентна на равенката $y^2 - (x + 2)^2 = 7$, т.е. на равенката $(y - x - 2)(y + x + 2) = 7$. Последната равенка е можна во множеството цели броеви ако важи

$$\begin{cases} y - x - 2 = 1 \\ y + x + 2 = 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - x - 2 = -1 \\ y + x + 2 = -7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - x - 2 = 7 \\ y + x + 2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - x - 2 = -7 \\ y + x + 2 = -1 \end{cases}$$

од каде добиваме дека $(x, y) \in \{(1, 4), (-5, -4), (-5, 4), (1, -4)\}$.

26. Најди три прости броја чиј производ е седум пати поголем од нивниот збир.

Решение. Нека p, q, r се бараните прости броеви. Имаме

$$pqr = 7(p + q + r)$$

па затоа еден од бараните броеви, на пример бројот r , е еднаков на 7. Тогаш $pq = p + q + 7$, т.е. $pq - p - q + 1 = 8$, односно $(p-1)(q-1) = 8$, од каде наоѓаме

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p-1=2 \\ q-1=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p-1=8 \\ q-1=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p-1=4 \\ q-1=2 \end{cases}$$

Единствени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се $p = 3$, $q = 5$ или обратно. Конечно, бараните прости броеви се 3, 5 и 7.

27. Најди ги сите цели броеви n за кои и $\sqrt{n^2 + 6n - 7}$ е цел број.

Решение. Од условот на задачата следува $n^2 + 6n - 7 = k^2$, односно $(n+3)^2 - k^2 = 16$, што значи $(n+3+k)(n+3-k) = 16$. Понатаму, броевите $n+k+3$ и $n-k+3$ се цели и се со иста парност, па од последната равека следува

$$\begin{cases} n+k+3=4 \\ n-k+3=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+3=-4 \\ n-k+3=-4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+3=8 \\ n-k+3=2 \end{cases} \text{ или } \\ \begin{cases} n+k+3=2 \\ n-k+3=8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+3=-8 \\ n-k+3=-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+3=-2 \\ n-k+3=-8 \end{cases},$$

од каде добиваме дека решенија се $n = 1, n = -7, n = 2, n = -8$.

28. Најди ги сите цели броеви n за кои и $\sqrt{n^2 + 4n - 5}$ е цел број.

Решение. Од условот на задачата следува $n^2 + 4n - 5 = k^2$, односно $(n+2)^2 - k^2 = 9$, што значи $(n+2+k)(n+2-k) = 9$. Ова е можно само ако

$$\begin{cases} n+k+2=1 \\ n-k+2=9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+2=-1 \\ n-k+2=-9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+2=3 \\ n-k+2=3 \end{cases} \text{ или } \\ \begin{cases} n+k+2=-3 \\ n-k+2=-3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+2=-9 \\ n-k+2=-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+k+2=9 \\ n-k+2=1 \end{cases},$$

од каде добиваме дека решенија се $n = 3, k = 4$; $n = -7, k = -4$; $n = 1, k = 0$; $n = -5, k = 0$; $n = 3, k = -4$; $n = -7, k = 4$. Вториот и петтиот случај не може да се решенија бидејќи $k < 0$, па затоа решенија на задачата се $n = 3, 1, -5, -7$.

29. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$m^2 - n^2 = 101010.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(m-n)(m+n) = 2 \cdot 50505.$$

Понатаму, броевите $m-n$ и $m+n$ се со иста парност, па затоа ако се парни, тогаш левата страна на последната равенка се дели со 4, а десната не се дели со 4, а ако се непарни, тогаш десната страна на равенката се дели со 2, а левата не се дели со 2, што повторно не е можно. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

30. Докажи дека равенката $n(n-5) = 408408408$ нема решение во множеството цели броеви!

Решение. Цифрата на единиците на производот на два броја е еднаква на цифрата на единиците од производот од цифрите на единиците на двата броја. Важи

Цифра на един. на n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цифра на един. на $n-5$	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
Цифра на един. на $n(n-5)$	0	6	4	4	6	0	6	4	4	6

Бидејќи цифрата на единиците на производот $n(n-5)$ не може да биде 8, заклучуваме дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

31. Дадено е множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Ова множество е поделено на две подмножества, така да првото подмножество содржи три елементи, да ги означиме со a, b, c , а сите останати елементи го формираат второто подмножество. Дали е можно вредноста на изразот $ab + bc + ca$ да биде еднаква на разликата на производот на елементите од првото множество и збирот на елементите од второто множество, ако е:

а) $n = 12$,

б) $n = 17$?

Решение. а) Имаме $ab + bc + ca = abc - (1 + 2 + \dots + 12 - a - b - c)$, па затоа $abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = 77$, односно

$$(a-1)(b-1)(c-1) = 1 \cdot 7 \cdot 11.$$

Ако претпоставиме дека $a < b < c$, тогаш $a-1=1, b-1=7, c-1=11$, т.е. $a=2, b=8, c=12$ и тоа е единствено решение, бидејќи броевите 7 и 11 се прости.

б) Слично како под а) наоѓаме $(a-1)(b-1)(c-1) = 152 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$. Но, ова не е можно, бидејќи при претпоставка дека $a < b < c$ за најголемиот број ќе важи $c-1=19$, т.е. $c=20 > 17$.

32. Дали постојат природни броеви a, b, c кои го задоволуваат условот

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340.$$

Решение. Бидејќи a, b, c се природни броеви имаме $a+b \geq 2, b+c \geq 2$ и $c+a \geq 2$. Понатаму, од дадената равенка имаме

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17.$$

Ќе докажеме дека не може $a+b$ и $b+c$ да бидат парни, а $c+a$ непарен. Имено, ако $a+b=2m$ и $b+c=2n$ добиваме $a+c=2m+2n-2b$. Во овој случај $(a+b)(b+c)(c+a)$ се дели со 8, а 340 не е делив со 8. Значи, само еден множител може да биде парен, што значи дека на пример $a+b=4$,

$b+c=5$ и $c+a=17$. Меѓутоа, овој систем равенки дава решение $a=8$, $b=-4$, $c=9$, што не е можно бидејќи b треба да е природен број.

33. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 - xy + x - 2y = 2000.$$

Решение. Дадената равенка ја трансформираме во еквивалентните равенки

$$x^2 + 2x - xy - 2y - x - 2 = 1998,$$

$$x(x+2) - y(x+2) - (x+2) = 1998,$$

$$(x+2)(x-y-1) = 1998.$$

Во множеството природни броеви важи $x+2 > x-y-1$ и ако се земе предвид дека

$$1998 = 1998 \cdot 1 = 999 \cdot 2 = 666 \cdot 3 = 333 \cdot 6 = 222 \cdot 9 = 111 \cdot 18 = 74 \cdot 27 = 54 \cdot 37$$

следува $x+2 \in \{1998, 999, 666, 333, 222, 111, 74, 54\}$, од каде добиваме

$$(x, y) \in \{(1996, 1994), (997, 994), (664, 660), (331, 324),$$

$$(220, 210), (109, 90), (72, 44), (52, 14)\}.$$

34. Определи ги целите броеви x и y такви што $x^2 y = y^3 + 10$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $x^2 = y^2 + \frac{10}{y}$, бидејќи не постои решение од облик $(x, 0)$. Ако (x, y) е решение на равенката, тогаш $y | 10$. Делители на 10 во множеството на целите броеви се $\{-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10\}$.

- Ако $y=1$ равенката го добива обликот $x^2=11$, која нема решение во множеството на целите броеви.
- Ако $y=-1$ равенката го добива обликот $x^2=-9$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=-2$ равенката го добива обликот $x^2=-1$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=2$ равенката го добива обликот $x^2=9$. Нејзини решенија во $\mathbb{Z}$ се $x=3$ и $x=-3$.
- Ако $y=-5$ равенката го добива обликот $x^2=23$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=5$ равенката го добива обликот $x^2=27$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=10$ равенката го добива обликот $x^2=101$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=-10$ равенката го добива обликот $x^2=99$, која нема решение во множеството цели броеви.

Значи, единствени решенија во множеството на целите броеви на дадената равенка се $(3, 2)$ и $(-3, 2)$.

35. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2(y+1)+y^2(x+1)=11$.

Решение. *Прв начин.* Дадената равенка последователно ја трансформираме во еквивалентни равенки:

$$x^2(y+1)+y^2(x+1)-4=7 \Leftrightarrow xy(x+y)+(x+y)^2-2xy-4=7 \Leftrightarrow$$

$$xy(x+y-2)+(x+y)^2-4=7 \Leftrightarrow (x+y-2)(xy+x+y+2)=7.$$

Во последната равенка и двата множители се делители на бројот 7 и како 7 е прост број можни се следниве случаи:

- 1) $\begin{cases} x+y-2=-7 \\ xy+x+y+2=-1 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=2 \end{cases}$, што не е можно за $x, y \in \mathbf{Z}$ и.
- 2) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ xy+x+y+2=-7 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-10 \end{cases}$, што исто така не е можно.
- 3) $\begin{cases} x+y-2=1 \\ xy+x+y+2=7 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ и ги добиваме решенијата (1;2) и (2;1).
- 4) $\begin{cases} x+y-2=7 \\ xy+x+y+2=1 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=-10 \end{cases}$ и ги добиваме решенијата (10;-1) и (-1;10).

Втор начин. Да означиме $x+y=p$ и $xy=q$, каде p и q се цели броеви.

Дадената равенка можеме да ја запишеме во видот $pq+p^2-2q=11$, т.е. во видот $q(2-p)=p^2-11$. Според тоа, $p \neq 2$ е таков да $p-2$ е делител на p^2-11 и бидејќи $p-2$ е делител на p^2-4 добиваме дека $p-2$ е делител на $p^2-4-(p^2-11)=7$. Според тоа, $p-2=\pm 1, \pm 7$. Оттука за (p,q) ги добиваме подредените парови (-5,2), (1,-10), (3,2) и (9,-10) и потоа продолжуваме како при првиот начин.

36. Во множеството цели броеви реши ги следниве равенки:

а) $y^4+x=xy+9$, б) $x^2+y^4=2x-1$,

в) $x^2+xy+y^2=1$.

Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$xy-x=y^4-9,$$

од каде добиваме

$$x = \frac{y^4-9}{y-1} = \frac{y^4-1-8}{y-1} = y^3 + y^2 + y + 1 - \frac{8}{y-1}. \quad (1)$$

Значи, $(y-1)|8$, односно $y \in \{2, 0, 3, -1, 5, -3, 9, -7\}$. Вредностите на непознатата x ги наоѓаме од (1). Едно решение на равенката е (7,2). Останатите најди ги за вежба.

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-1)^2 + y^4 = 0,$$

од каде добиваме $x-1=0, y=0$, т.е. $x=1, y=0$.

в) Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2,$$

$$x^2 + (x+y)^2 + y^2 = 2,$$

од каде следува дека еден од собирците е еднаков на нула, а другите два се еднакви на еден. Множеството решенија е

$$\{(1,0);(0,1);(-1,0);(0,-1);(1,-1);(-1,1)\}.$$

37. Во множеството цели броеви реши ја равенката $xy - 7x - y = 3$.

Решение. Дадената равека ја трансформираме и добиваме $xy - y = 3 + 7x$, односно $y(x-1) = 7x + 3$. За $x=1$ имаме $y \cdot 0 = 10$, што не е можно во множеството на целите броеви. За $x \neq 1$ добиваме

$$y = \frac{7x+3}{x-1} = \frac{7x-7+10}{x-1} = \frac{7(x-1)+10}{x-1} = 7 + \frac{10}{x-1},$$

и како $y \in \mathbf{Z}$ добиваме $\frac{10}{x-1} \in \mathbf{Z}$, т.е. $x-1 \in \{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\}$, односно $x \in \{2, 0, 3, -1, 6, -4, 11, -9\}$. Конечно, за најдените вредности на x со замена

во $y = 7 + \frac{10}{x-1}$ добиваме

$$(x, y) \in \{(2, 17), (0, -3), (3, 12), (-1, 2), (6, 9), (-4, 5), (11, 8), (-9, 6)\}.$$

38. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$xy - 3x + y = 5.$$

Решение. Имаме $y(x+1) = 3x + 5$. Јасно, $x \neq -1$, па затоа последната равенка е еквивалентна на равенката $y = \frac{3x+5}{x+1}$, т.е. на равенката $y = 3 + \frac{2}{x+1}$. Понатаму, y е цел број ако и само ако $(x+1) | 2$, односно ако и само ако $x+1$ е еднаков на $1, -1, 2$ или -2 , што значи ако и само ако x е еднаков на $0, -2, 1$ или -3 . Оттука следува дека во множеството цели броеви решенија на дадената равенка се подредените парови $(0, 5), (-2, 1), (1, 4), (-3, 2)$.

39. Најди најголем природен број n таков да $n^2 + 2006n$ биде квадрат на некој природен број.

Решение. Нека $n^2 + 2006n = m^2$. Тогаш $m = n + k$ и ако замениме во претходното равенство имаме $n^2 + 2006n = (n+k)^2$, т.е. $n = \frac{k^2}{2006-2k}$. Но, n е природен број, па затоа $2006-2k > 0$, т.е. $k < 1003$. Понатаму, се бара n да биде најголем, што значи $2006-2k$ да е најмал, а тоа е за $k = 1002$. Притоа добиваме $n = \frac{1002^2}{2} = 502002$ и тоа е бараниот број.

40. Најди ги сите двоцифрени броеви $\overline{xy}$ такви да $\sqrt{\frac{xy+24}{xy-24}}$ е природен број.

Решение. Потребно е да биде исполнето равенството $\sqrt{\frac{xy+24}{xy-24}} = n^2$, односно

$$\overline{xy} = \frac{24(n^2+1)}{n^2-1} = 24 + \frac{48}{n^2-1}.$$

Изразот на десната страна во последното равенство е цел број ако и само ако $(n^2 - 1) | 48$, т.е. $n^2 - 1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Целобројни решенија има-
ме за $n^2 \in \{4, 9, 25, 49\}$ и притоа $\overline{xy} \in \{40, 30, 26, 25\}$.

41. Во множеството природни броеви реши ги Диофантовите равенки:

а) $x^4 + y^4 = 33333$,

б) $5^n + 6^m = 123329$,

в) $x! + 2y = 5555$,

г) $x! + 2 = p^2$, p е прост број,

д) $x^2 + y^2 + z^2 = 1988$,

ѓ) $x! + y^2 = 987654$.

Решение. а) Бидејќи n^4 секогаш завршува на една од цифрите 0, 1, 5 или 6, добиваме дека $x^4 + y^4$ секогаш завршува на една од цифрите 0, 1, 2, 5, 6 или 7. Според тоа, дадената Диофантова нема решение.

б) Бројот 5^n завршува на цифрата 5, а бројот 6^m завршува на цифрата 6. Според тоа, збирот $5^n + 6^m$ секогаш завршува на цифрата 1, па затоа дадената Диофантова равенка нема решение.

в) За $x = 1$ добиваме $y = 2777$. Ако $x > 1$, тогаш $x!$ е парен број, па левата страна $x! + 2y$ е парен број, а десната страна е непарен број, што не е можно. Конечно, единствено решение е $x = 1$, $y = 2777$.

г) Ако $x < 3$, тогаш единствено решение е $x = 2$, $p = 2$. Ако $x > 2$, тогаш левата страна $x! + 2$ е парен број и како мора да е $p > 2$ добиваме дека десната страна е непарен број, што е противречност. Конечно, единствено решение е $x = 2$, $p = 2$.

д) *Упатство.* Квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1. Бидејќи $4 | 1988$ добиваме дека секој од броевите x^2, y^2, z^2 мора да е делив со 4. Значи, $x = 2m$, $y = 2n$, $z = 2k$, па затоа

$$m^2 + n^2 + k^2 = 497,$$

од што следува: $m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$, $k = 2c + 1$ или $m = 2a$, $n = 2b$, $k = 2c + 1$. Ако $m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$, $k = 2c + 1$, тогаш

$$4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 + 4c^2 + 4c + 1 = 497,$$

односно $2a(a + 1) + 2b(b + 1) + 2c(c + 1) = 247$, што не е можно бидејќи левата страна на последното равенство е парен, а десната страна е непарен број. Според тоа,

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 497,$$

односно $a^2 + b^2 + c^2 + c = 124$. Од последната равенка најди ги a, b, c , а потоа со замена најди ги m, n, k и определи ги x, y, z .

ѓ) Ако $x = 1, 2, 3$, тогаш $y^2 = 987653, 987652, 987648$, соодветно, што не е можно. Ако $x > 3$, тогаш $y = 2k$, па затоа левата страна $x! + y^2$ е делива со 4, а десната страна 987654 не е делива со 4, што е противречност.

42. Покажи дека равенката $x! + y! = 10z + 9$ нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Десната страна на равенката е непарен број, па затоа точно еден од броевите x и y мора да биде еднаков на 1. Нека $x = 1$. Тогаш $y! = 10z + 8$. Десната страна на последната равенка не е делива со 5, па заклучуваме дека $y \leq 4$. Но, $2! = 2 \neq 10z + 8$, $3! = 6 \neq 10z + 8$ и $4! = 24 \neq 10z + 8$, што значи дека дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

43. Да се реши во множеството прости броеви равенката $3p^2 + 3p = 166 + q$.

Решение. Имаме $3p^2 + 3p = 166 + q$, т.е. $3p(p+1) = 166 + q$. Јасно $p(p+1)$ е парен број, т.е. $2 \mid p(p+1)$ и бидејќи $2 \mid 166$ следува $2 \mid q$. Понатаму, по услов q е прост број, па добиваме дека $q = 2$. Сега лесно се добива $p(p+1) = 56$, од каде $p = 7$.

44. Во множеството природни броеви реши ја равенката $5a - ab = 9b^2$.

Решение. Десната страна на равенката е секогаш позитивна, а левата може да се запише во облик $a(5-b)$. Според тоа $b < 5$, односно $b \in \{1, 2, 3, 4\}$. Секоја од овие можности ќе ја разгледаме одделно.

- Ако $b = 1$, тогаш равенката го добива обликот $4a = 9$, која нема решение во $\mathbf{N}$.
- Ако $b = 2$, тогаш равенката го добива обликот $3a = 36$, чие решение е $a = 12$, а решението на почетната равенка е $a = 12, b = 2$.
- Ако $b = 3$, тогаш равенката го добива обликот $2a = 81$, која нема решение во $\mathbf{N}$. Во овој случај почетната равенка нема решение во $\mathbf{N}$.
- Ако $b = 4$, тогаш равенката го добива обликот $a = 144$. Решението на почетната равенка е $a = 144, b = 4$.

Значи, равенката има две решенија и тоа $a = 12, b = 2$ и $a = 144, b = 4$.

45. Во множеството $\mathbf{Z}$ реши ја равенката

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

Решение. Десната страна на равенката е парен број. Ако x и y се со различна парност, тогаш левата страна ќе биде непарен број, што е противречност.

Значи x и y мора да бидат со иста парност. Воведуваме замени $u = \frac{x+y}{2}$ и

$v = \frac{x-y}{2}$ и равенката го добива обликот $u^3 + uv^2 = 2(3u^2 + v^2 + 1)$, односно

$(u-2)(u^2 + v^2) = 4u^2 + 2$. Очигледно е дека $u > 2$, па затоа

$$4u^2 + 2 < 5(u^2 + v^2),$$

од каде што следува дека $u - 2 < 5$. Со проверка на броевите $u \in \{3, 4, 5, 6\}$ се добиваат целобројни решенија $u = 5, v = \pm 3$. Според тоа $(x, y) = (8, 2)$ или $(x, y) = (2, 8)$.

46. Да се најдат сите природни броеви n за кои постои цел број x таков што

$$499(1997^n + 1) = x^2 + x.$$

Решение. Нека n е решение на задачата. Тогаш

$$(2x+1)^2 = 1996 \cdot 1997^n + 1997.$$

За $n=1$ добиваме $2x+1 = \pm 1997$ и броевите $x=998$, $x=-999$ го исполнуваат условот на задачата. Нека $n \geq 2$. Бројот $(2x+1)^2$ се дели со 1997 и бидејќи 1997 е прост број заклучуваме дека $(2x+1)^2$ се дели со 1997^2 . Но тоа не е можно, бидејќи за $n \geq 2$ бројот $1996 \cdot 1997^n + 1997$ не се дели со 1997^2 . Конечно, единствено решение е $n=1$.

47. Најди ги сите цели броеви x, y и z такви што

$$x + y + z = 1 \text{ и } x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Решение. Од првата равенка го изразуваме z и го заменуваме во втората, па добиваме

$$x^3 + y^3 + (1 - (x + y))^3 = 1,$$

односно

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2 + x + y - 2) = 0.$$

Ако $x + y = 0$, тогаш $z = 1$ и секоја подредена тројка $(n, -n, 1)$, $n \in \mathbf{Z}$ е решение на задачата. Ако $x + y \neq 0$, тогаш

$$x^2 - xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$4x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 4y = 8,$$

т.е. на равенката

$$(2x - y + 1)^2 + 3(y + 1)^2 = 12$$

од која следува дека $(y + 1)^2 \leq 4$. Ако $(y + 1)^2 = 1$, тогаш

$$(2x - y + 1)^2 = 9,$$

а ако $(y + 1)^2 = 4$, тогаш $(2x - y + 1)^2 = 0$. Разгледувајќи ги сите можни случаи за y добиваме дека решенија се и подредените тројки:

$$(0, 1, 0); (1, 0, 0), (-2, -3, 6), (-3, -2, 6), (0, -2, 3) \text{ и } (-2, 0, 3).$$

48. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$4n(n+1) = m(m+1).$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2n+1)^2 = m^2 + m + 1. \quad (1)$$

Но, бидејќи за секој $m \in \mathbf{N}$ важи

$$m^2 < m^2 + m + 1 < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

добиваме дека бројот $m^2 + m + 1$ не може да биде полн квадрат, што значи дека равенката (1), а со тоа и дадената равенка нема решенија.

49. Покажи дека равенката $2x^2 - 5y^2 = 7$ нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Бројот y мора да е непарен број, т.е. $y = 2k + 1$. Тогаш

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 8 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + 1,$$

т.е. y^2 при делење со 8 дава остаток 1. Според тоа,

$$2x^2 = 5y^2 + 7 = 40 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + 12,$$

што значи дека бројот $2x^2$ при делење со 8 дава остаток 4. Но, тоа значи дека бројот x^2 се дели со 2, но не се дели со 4, што е противречност. Значи, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

50. Дали постојат цели броеви x, y такви да

$$x^5 + y^5 - 5x^3 + 4x - y = 2008.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^5 - x + y^5 - y - 5(x^3 - x) = 2008.$$

Броевите $x^5 - x$ и $y^5 - y$ се деливи со 5, па затоа левата страна на последната равенка се дели со 5, а десната не се дели со 5. Според тоа не постојат цели броеви x, y со бараното својство.

51. Докажи дека не постојат цели броеви a, b, c такви да $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Решение. Дадениот услов ќе го запишеме во обликот $a^2 + b^2 = 8c + 6$.

Според тоа, збирот $a^2 + b^2$ е парен број, па затоа или броевите a и b се и двата парни или се и двата непарни. Ако a и b се и двата парни, тогаш $a^2 + b^2$ се дели со 4, но $8c + 6$ не се дели со 4. Значи, a и b може да бидат само непарни броеви. Но, тогаш броевите

$$a^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1) \text{ и } b^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p(p+1)$$

се деливи со 8, па затоа левата страна на $a^2 + b^2 - 2 = 8c + 4$ се дели со 8, а десната не се дели со 8. Конечно, a и b се со иста парност, но не се ниту парни ниту непарни, што е противречност. Оттука следува дека не постојат цели броеви a и b такви да $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

52. Докажи дека равенката $a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 = 0$. Нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат цели броеви a и b такви што $a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 = 0$. Последното равенство е еквивалентно на равенството $(a-b)^3 = 2(6ab^2 - 3)$. Десната страна на последното равенство е парен број, па затоа $a-b$ треба да е парен број. Но, тогаш $(a-b)^3$ се дели со 8, а $2(6ab^2 - 3)$ не се дели со 8, што е противречност.

53. Најди ги сите трицифрени броеви кои се пет пати поголеми од производот на нивните цифри.

Решение. Нека бараниот трицифрен број е $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Од условот на задачата следува $100a + 10b + c = 5abc$, па затоа цифрите a, b, c се различни од нула. Од последното равенство следува дека бараниот број е делив со 5, што значи дека $c = 5$. Тогаш $100a + 10b + 5 = 25ab$, т.е. $20a + 2b + 1 = 5ab$, односно $2b + 1 = 5a(b - 4)$, од каде следува дека $2b + 1$ се дели со 5. Според тоа, $b = 2$ или $b = 7$. За $b = 2$ добиваме $a = -\frac{1}{2}$ што не е можно, а за $b = 7$ добиваме $a = 1$. Конечно, задачата има единствено решение и тоа е бројот 175.

54. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}.$$

Решение. Нека земеме дека $y \leq x$. Тогаш

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq \frac{2}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{2x-1}{xy} < \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y},$$

па затоа $y < 6$. Со непосредна проверка добиваме дека за $y = 1$, $y = 2$ и $y = 3$ равенката нема решение. За $y = 4$ добиваме $x = 9$, а за $y = 5$ добиваме $x = 6$. Конечно, заради симетрија добиваме дека решенија на дадената равенка се: $(x, y) \in \{(4, 9), (5, 6), (6, 5), (9, 4)\}$.

55. Да се најдат сите природни броеви x, y, z такви што

$$x > y + 1, y > z + 1 \text{ и } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} = 1.$$

Решение. Од неравенствата следува дека $x + 1 > y + 2 > z + 3$. Сега од

$$1 = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} < \frac{1}{z+3} + \frac{2}{z+3} + \frac{3}{z+3} = \frac{6}{z+3}$$

следува $z + 3 < 6$, т.е. $z < 3$. Значи $z = 1$ или $z = 2$. Нека $z = 2$. Тогаш $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = \frac{2}{5}$, па затоа $\frac{2}{5} < \frac{3}{y+2}$ т.е. $y + 2 < 7,5$, односно $6 \leq y + 2 \leq 7$ бидејќи $y + 2 > z + 3 = 5$. За $y + 2 = 6$ имаме $y = 4$, па $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$, што значи $x = 14$, $y = 4$ и $z = 2$. За $y + 2 = 7$ имаме $y = 5$, па е $\frac{1}{x+1} = \frac{4}{35}$ и оваа равенка нема решение по x во множеството на природните броеви. Нека $z = 1$. Тогаш $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ и бидејќи $\frac{3}{y+2} > \frac{1}{4}$ добиваме $y + 2 < 12$. Но $y + 2 > z + 3 = 4$ па затоа $5 \leq y + 2 \leq 11$ т.е. $3 \leq y \leq 9$. Со непосредна проверка наоѓаме уште две решенија $x = 35$, $y = 7$, $z = 1$ и $x = 19$, $y = 8$, $z = 1$.

56. Реши ја Диофантовата равенка $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

Решение. Имаме, $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1 > y^3$, па затоа $x > y$, што значи дека ако $x < y + 1$, тогаш равенката нема решение. Според тоа, ако

$$x < y+1 \Leftrightarrow (y+1)^3 > y^3 + 2y^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(y+3) > 0 \Leftrightarrow y > 0 \text{ или } y < -3$$

равенката нема решение. Затоа $y \in \{-3, -2, -1, 0\}$ и со непосредна проверка добиваме дека решенија на равенката се $(x, y) \in \{(-2, -3), (1, -2), (1, 0)\}$.

57. Нека $a, b \in \mathbf{N}$ и при делење на $a^2 + b^2$ со $a + b$ се добива количник q и остаток r . Најди ги сите (a, b) за кои е $q^2 + r = 1977$.

Решение. Броевите a, b, q и r мораат да ги задоволуваат условите:

$$a^2 + b^2 = (a+b)q + r, \quad 0 \leq r < a+b \text{ и } q^2 + r = 1977.$$

Од $q^2 \leq 1977$ следува $q \leq 44$, што значи

$$a^2 + b^2 < 44(a+b) + (a+b) = 45(a+b)$$

и бидејќи $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, добиваме $(a+b)^2 \leq 90(a+b)$, односно $a+b \leq 90$. Според тоа $r < 90$. Од

$$q^2 = 1977 - r > 1977 - 90 = 1887$$

добиваме $q > 43$ и бидејќи $q \leq 44$ имаме $q = 44$ и $r = 41$.

Останува уште да ги определиме природните броеви a и b кои ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41, \text{ т.е. } (a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009.$$

Да ја решиме равенката $x^2 + y^2 = 1009$, при услов $0 \leq x \leq y$. Од $y^2 \leq 1009$, следува $y \leq 31$, а од $2y^2 \geq 1009$ следува $y \geq 23$. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение е: $x = 15$, $y = 28$.

Според тоа, треба во $\mathbf{N}$ да ги решиме следните системи равенки

$$|a-22| = 15, |b-22| = 28 \text{ и } |a-22| = 28, |b-22| = 15.$$

Првиот систем има решенија $(a, b) = (37, 50)$ и $(a, b) = (7, 50)$, а вториот $(a, b) = (50, 37)$ и $(a, b) = (50, 7)$, и тоа се единствените парови природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

58. Докажи дека равенката $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbf{N}$ нема решенија во множеството природни броеви, такви што $z \leq n$.

Решение. Нека $x \leq y$. Тогаш важи $z > y$, $z > x$ и

$$x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + zy^{n-2} + y^{n-1}) > (z-y)nx^{n-1} \geq nx^{n-1},$$

односно $x \geq n$, па $z > n$, што противречи на условот на задачата.

59. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x(x+1) = (y^2+1)(y^2+y).$$

За $y=0$, добиваме $x=0$. За $y=1$, равенката $x(x+1)=4$ нема цели корени. За $y=2$, равенката $x(x+1)=5 \cdot 6$ има позитивен корен $x=5$. За $y \geq 3$, важат неравенствата

$$(y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2})(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}) < (y^2 + 1)(y^2 + y) < (y^2 + \frac{y}{2})(y^2 + \frac{y}{2} + 1),$$

па од

$$(y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2})(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}) < x(x+1) < (y^2 + \frac{y}{2})(y^2 + \frac{y}{2} + 1),$$

слиди дека

$$y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} < x < y^2 + \frac{y}{2}.$$

Бидејќи, од броевите $y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ и $y^2 + \frac{y}{2}$, еден е природен, а другиот е од обликот $(n - \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, последната неравенка нема решение во множеството на ненегативни цели броеви. Значи, единствени решенија се $(0,0)$ и $(5,2)$.

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^{2013} = x^{2012} + 2013$.

Решение. Од дадената равенка следува $x^{2013} - x^{2012} = 2013$. Ако x е парен број, тогаш x^{2013} и x^{2012} се парни броеви, па затоа нивната разлика не може да биде 2013. Ако x е непарен број, тогаш x^{2013} и x^{2012} се непарни броеви, па затоа низната разлика не може да биде 2013.

61. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^y = y^{x-y}$.

Решение. Според условот x^y и y^{x-y} се природни броеви, па затоа $x-y \geq 0$, т.е. $x \geq y$. Ако $x=y$, тогаш $x^x = x^0 = 1$, т.е. $x=y=1$.

Ако е $x > y$, тогаш од дадената равенка следува $x^y : y = y^{x-y-1}$. Но, $x-y-1 \geq 0$, па затоа y^{x-y-1} е природен број, што значи дека x^y е делив со y , односно $y | x$, т.е. $x = ky$. Понатаму,

$$(ky)^y = y^{ky-y} = y^{y(k-1)} = (y^{k-1})^y$$

од каде наоѓаме $ky = y^{k-1}$, т.е. $k = y^{k-2}$. Левата страна од последната равенка е поголема од 1, па затоа за степеновиот показател на дсната страна важи $k-2 > 0$. Можни се следниве случаи:

- $k=3$ и тогаш $3 = y^{3-2} = y$, $x = ky = 3^2 = 9$;
- $k=4$ и тогаш $4 = y^{4-2} = y^2$, па затоа $y=2$ и $x = ky = 8$; и
- $k > 5$ и тогаш ако $y \geq 2$ добиваме $y^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$, а ако $y < 2$ добиваме $y^{k-2} \leq 1 < k$, што значи дека во овој случај равенката нема решение.

Конечно, решенија на дадената равенка се $(1,1)$; $(8,2)$; $(9,3)$.

62. Најди три прости броја такви да нивниот производ е пет пати поголем од нивниот збир.

Решение. Ако се m, n, p бараните броеви, тогаш $mnp = 5(m+n+p)$, па следува дека, на пример, $p = 5$. Сега $mn = m+n+5$, па затоа $m = \frac{n+5}{n-1} = 1 + \frac{6}{n-1}$. Можни вредности за n се 2, 3 и 7, а соодветните вредности за m се 7, 4 и 2. Конечно, бараните прости броеви се 2, 5 и 7.

63. Во множеството цели броеви реши ја равенката $2^x + 1 = y^2$.

Решение. За $x < 0$ бројот $2^x + 1$ не е цел број, а y^2 е цел број, па дадената равенка нема решение. За $x = 0$ добиваме $y^2 = 2$ и оваа равенка нема решенија во множеството цели броеви. Нека x е природен број. Бројот $2^x + 1$ е непарен, па затоа и броевите y^2 и y се непарни. Нека $y = 2k + 1$. Тогаш $2^x + 1 = (2k + 1)^2$, па затоа $2^x = 4k(k + 1)$. Но, 2^x нема други прости делители освен бројот 2 и бидејќи еден од броевите k или $k + 1$ е непарен, заклучуваме дека еден од нив е еднаков на 1 или -1 и ниту еден од нив не е еднаков на нула. За $k = 1$ имаме $2^x = 8$, па е $x = 3$ и тогаш $y = 3$. За $k + 1 = -1$, т.е. $k = -2$ имаме $2^x = 8$, па $x = 3$ и тогаш $y = -3$. Конечно, равенката има две решенија $x = 3, y = 3$ и $x = 3, y = -3$.

64. Најди ги сите природни броеви x и n такви да

$$x^{2n} - 4 = 3(4 + 4^2 + \dots + 4^{2001}).$$

Решение. Од

$$\begin{aligned} 3(4 + 4^2 + \dots + 4^{2001}) &= (-1 + 4)(4 + 4^2 + \dots + 4^{2001}) \\ &= -4 + 4^2 - 4^2 + \dots + 4^{2001} - 4^{2001} + 4^{2002} \\ &= 4^{2002} - 4, \end{aligned}$$

следува дека равенка е еквивалентна со равенката $x^{2n} - 4 = 4^{2002} - 4$, т.е. со равенката $x^{2n} - 4^{2002} = 0$. Понатаму, последователно добиваме

$$\begin{aligned} (x^n)^2 - (2^{2002})^2 &= 0 & \Leftrightarrow \\ (x^n - 2^{2002})(x^n + 2^{2002}) &= 0 & \Leftrightarrow \\ x^n - 2^{2002} &= 0 & \Leftrightarrow \\ x^n - 2^{2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} &= 0. \end{aligned}$$

Така, ги имаме следниве шеснаесет можности:

$$\begin{array}{ll} x = 2, n = 2002; & x = 2^2, n = 1001; & x = 2^7, n = 286; \\ x = 2^{11}, n = 182; & x = 2^{13}, n = 154; & x = 2^{14}, n = 143; \\ x = 2^{22}, n = 91; & x = 2^{26}, n = 77; & x = 2^{77}, n = 26; \\ x = 2^{91}, n = 22; & x = 2^{143}, n = 14; & x = 2^{154}, n = 13; \\ x = 2^{182}, n = 11; & x = 2^{286}, n = 7; & x = 2^{1001}, n = 2 \text{ и} \end{array}$$

$$x = 2^{2002}, n = 1.$$

65. Мерните броеви на страните на правоаголен триаголник се природни броеви и притоа $2P = 3L$, каде P е плоштината и L е периметарот на триаголникот. Најди ги сите такви триаголници.

Решение. Нека c е хипотенузата и a и b , $a \leq b$, се катетите на триаголникот. Од условот $2P = 3L$ следува

$$ab = 3(a + b + c),$$

односно

$$3c = ab - 3a - 3b,$$

а од Питагоровата теорема добиваме

$$9a^2 + 9b^2 = (ab - 3a - 3b)^2 = a^2b^2 + 9a^2 + 9b^2 - 6a^2b - 6ab^2 + 18ab,$$

односно

$$ab(ab - 6a - 6b + 18) = 0.$$

Но, $ab > 0$, па затоа од последната равенка следува $ab - 6a - 6b + 18 = 0$, односно $b(a - 6) = 6a - 18$, од каде добиваме

$$b = \frac{6a - 18}{a - 6} = 6 + \frac{18}{a - 6}.$$

Бидејќи a и b се природни броеви, заклучуваме дека $a - 6$ може да биде $-3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9$ или 18 , односно a може да биде $3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 15$ или 24 . Но, тогаш b може да биде $0, -3, -12, 24, 15, 12, 9, 8$ или 7 . Од $0 < a \leq b$ и c е природен број добиваме дека задачата има три решенија:

$$a = 7, b = 24, c = 25; a = 8, b = 15, c = 17 \text{ и } a = 9, b = 12, c = 15.$$

66. Најди ги сите правоаголни паралелопипеди со цели должини на рабови a, b, c кај кои мерните броеви на волуменот и плоштината се еднакви.

Решение. Од условот на задачата добиваме $abc = 2(ab + bc + ca)$, односно

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Броевите a, b, c мора да се поголеми од 2 и да претпоставиме дека $2 < a \leq b \leq c$. Тогаш $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, па е $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$, т.е. $a \leq 6$. Значи $a \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Ако $a = 3$, тогаш $3bc = 2(3b + 3c + bc)$, т.е. $bc = 6b + 6c$, па затоа

$$c = \frac{6b}{b - 6} = 6 + \frac{36}{b - 6}.$$

Но, $b > 2$, па затоа $b - 6$ може да биде: $-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ или 36 , односно b може да биде: $3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24$ или 42 , соодветно. Тогаш c може да биде: $-6, -12, -30, 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8$ или 7 , соодветно.

Но, $b \leq c$, па затоа:

$$(a, b, c) \in \{(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12)\}.$$

На сличен начин за $a = 4$ добиваме $c = 4 + \frac{16}{b - 4}$, па

$$(a, b, c) \in \{(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8)\}.$$

За $a = 5$ имаме $3bc = 10b + 10c \leq 20c$, т.е. $b \leq 6$ и b е 5 или 6 , а c е 10 или $\frac{15}{2}$, па е $(a, b, c) = (5, 5, 10)$.

Слично, за $a = 6$ имаме едно решение $(a, b, c) = (6, 6, 6)$.

67. Најди ги сите четворки природни броеви (x, y, z, t) такви да

$$x + y = zt,$$

$$z + t = xy.$$

Решение. Ако ги собереме дадените равенства добиваме

$$xy - x - y + zt - z - t = 0, \text{ т.е. } (x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2.$$

Но, $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ и $t \geq 1$, што значи $x-1 \geq 0, y-1 \geq 0, z-1 \geq 0$ и $t-1 \geq 0$, па можни се следниве случаи:

1) $(x-1)(y-1) = 0$ и $(z-1)(t-1) = 2$,

2) $(x-1)(y-1) = 1 = (z-1)(t-1)$ и

3) $(x-1)(y-1) = 1$ и $(z-1)(t-1) = 0$.

Ако $(x-1)(y-1) = 0$, тогаш $x = 1$ или $y = 1$, а од $(z-1)(t-1) = 2$ следува $z = 2, t = 3$ или $z = 3, t = 2$. Бидејќи $zt = 6 = x + y$, добиваме дека можни решенија се $(1, 5, 2, 3)$, $(1, 5, 3, 2)$, $(5, 1, 3, 2)$ и $(5, 1, 2, 3)$.

Ако $(x-1)(y-1) = 1 = (z-1)(t-1)$, тогаш $x-1 = y-1 = z-1 = t-1 = 1$ и единствено решение е $(2, 2, 2, 2)$.

Во третиот случај со аналогни размислувања ги добиваме решенијата $(2, 3, 1, 5)$, $(2, 3, 5, 1)$, $(3, 2, 1, 5)$ и $(3, 2, 5, 1)$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ПЕТТА ГЛАВА

1. Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $d \mid m$, тогаш $a \equiv b \pmod{d}$. Докажи!

Решение. Од $a \equiv b \pmod{m}$ следува $m \mid (a-b)$ и бидејќи $d \mid m$ добиваме дека $d \mid (a-b)$, па затоа $a \equiv b \pmod{d}$.

2. Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $c > 0$, тогаш $ac \equiv bc \pmod{mc}$. Докажи!

Решение. Од $a \equiv b \pmod{m}$ следува $m \mid (a-b)$, па за $c > 0$ важи $mc \mid c(a-b)$ т.е. $mc \mid (ca-cb)$, од што следува $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

3. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.

Решение. Нека m е цел број. Тогаш $m \equiv i \pmod{4}$, за $i = 0, 1, 2, 3$, па затоа $m^2 \equiv i^2 \pmod{4}$, за $i = 0, 1, 2, 3$. Но,

$$0^2 \equiv 0 \pmod{4}, 1^2 \equiv 1 \pmod{4}, 2^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ и } 3^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

па затоа за секој цел број m важи $m^2 \equiv 0$ или $1 \pmod{4}$.

4. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.

Решение. Нека m е цел број. Тогаш $m \equiv i \pmod{8}$, за $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, па затоа $m^2 \equiv i^2 \pmod{8}$, за $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Но,

$$0^2 \equiv 0 \pmod{8}, 1^2 \equiv 1 \pmod{8}, 2^2 \equiv 4 \pmod{8}, 3^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

$$4^2 \equiv 0 \pmod{8}, 5^2 \equiv 1 \pmod{8}, 6^2 \equiv 4 \pmod{8} \text{ и } 7^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

па затоа за секој цел број m важи $m^2 \equiv 0, 1$ или $4 \pmod{8}$.

5. Докажи дека за $c = 2$, $m = 7$, $a = 2$ и $b = 9$ иако $a \equiv b \pmod{m}$, не е точно дека $c^a \equiv c^b \pmod{m}$.

Решение. За $c = 2$, $m = 7$, $a = 2$ и $b = 9$ важи $2 \equiv 9 \pmod{7}$, односно. $a \equiv b \pmod{m}$. Меѓутоа,

$$c^a = 2^2 = 4, c^b = 2^9 = 512 \text{ и } 4 \not\equiv 512 \pmod{7}.$$

Според тоа, ако $a \equiv b \pmod{m}$, не мора да важи $c^a \equiv c^b \pmod{m}$.

6. На која цифра завршува бројот

а) 6^{811} , б) 2^{1000} , в) 3^{9999} .

Решение. а) Од $6^2 \equiv 6 \pmod{10}$ следува дека $6^k \equiv 6 \pmod{10}$, за секој природен број k , па затоа бројот 6^{811} завршува на цифрата 6.

б) Бидејќи $2^4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}$, од решението под а) добиваме дека за секој природен број k важи

$$2^{4k} \equiv 6^k \equiv 6 \pmod{10}.$$

Според тоа,

$$2^{1000} = 2^{4 \cdot 250} \equiv 6 \pmod{10},$$

т.е. бројот 2^{1000} завршува на цифрата 6.

в) Од $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, следува дека

$$3^{9999} = 3^{4 \cdot 2499 + 3} = (3^4)^{2499} \cdot 3^3 \equiv 1^{2499} \cdot 27 \equiv 7 \pmod{10},$$

што значи дека бројот 3^{9999} завршува на цифрата 7.

7. За секој природен број k и за секој цели броеви a и b , $a \neq b$ важи $(a-b) \mid (a^k - b^k)$. Докажи!

Решение. Од $a \equiv b \pmod{a-b}$, следува дека $a^k \equiv b^k \pmod{a-b}$. Според тоа, $(a-b) \mid (a^k - b^k)$.

8. За секој природен број k и за секој цели броеви a и b , $a \neq -b$ важи $(a+b) \mid (a^{2k-1} + b^{2k-1})$. Докажи!

Решение. Од $a \equiv -b \pmod{a+b}$, следува дека

$$a^{2k-1} \equiv (-1)^{2k-1} b^{2k-1} \pmod{a+b}, \text{ т.е. } a^{2k-1} \equiv -b^{2k-1} \pmod{a+b}.$$

Според тоа, $(a+b) \mid (a^{2k-1} + b^{2k-1})$.

9. Најди го остатокот при делењето на бројот:

а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24,

б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9,

в) $(17^{17} + 116)^{21}$ со 8.

Решение. а) Од $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$ добиваме дека $5^{100} \equiv 1 \pmod{24}$. Според тоа, $5^{100} + 55 \equiv 56 \equiv 8 \pmod{24}$. Понатаму $8^2 \equiv 16 \pmod{24}$, па затоа за секој природен број k важи $8^{2k} \equiv 16^k \equiv 16 \pmod{24}$. Конечно, $(5^{100} + 55)^{100} \equiv 8^{100} = 8^{2 \cdot 50} \equiv 16 \pmod{24}$, што значи дека остатокот од делењето на бројот $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24 е 16.

б) Од $3^2 \equiv 0 \pmod{9}$, следува дека $3^{10} + 2 \equiv 2 \pmod{9}$. Понатаму, од $2^7 \equiv 2 \pmod{9}$ следува $(3^{10} + 2)^{77} \equiv 2^{11} \equiv 5 \pmod{9}$.

в) Од $17 \equiv 1 \pmod{8}$ следува дека $17^{17} \equiv 1 \pmod{8}$. Од друга страна $116 \equiv 4 \pmod{8}$, па затоа

$$17^{17} + 116 \equiv 5 \pmod{8}.$$

Понатаму, $5^2 \equiv 1 \pmod{8}$, па затоа

$$(17^{17} + 116)^{21} \equiv 5^{21} \equiv 5^{20} \cdot 5 \equiv 1 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{8}.$$

10. Нека $p > 2$ е прост број. Докажи дека секој делител на бројот $2^p - 1$ е од облик $2kp + 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека q е прост делител на бројот $2^p - 1$ (т.е. $2^p \equiv 1 \pmod{q}$) и нека d е најмалиот природен број, таков да $2^d \equiv 1 \pmod{q}$. Тогаш, $d \mid p$, па $d = 1$ или $d = p$. Бидејќи $2^d \equiv 1 \pmod{q}$, мора $d = p$. Од $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ следи дека $p = d \mid q - 1$. Бидејќи q е непарен, $q - 1$ е делив со 2. Следи дека $q = 2kp + 1$, за некој природен број k . Бидејќи производ на броеви од облик $2kp + 1$, $k \in \mathbb{N}$ е број од истиот облик, а секој делител на еден природен број е производ од неговите прости делители, се добива тврдењето на задачата.

11. Нека k е природен број. Докажи дека бројот $2^{2k-1} + 2^k - 1$ не е делив со 7.

Решение. Бидејќи $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ имаме:

- ако $k \equiv 0 \pmod{3}$, тогаш $2k - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, па

$$2^{2k-1} + 2^k - 1 \equiv 2^2 + 2^0 - 1 \equiv 4 \pmod{7},$$

- ако $k \equiv 1 \pmod{3}$, тогаш $2k - 1 \equiv 1 \pmod{3}$, па

$$2^{2k-1} + 2^k - 1 \equiv 2^1 + 2^1 - 1 \equiv 3 \pmod{7},$$

- ако $k \equiv 2 \pmod{3}$, тогаш $2k - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, па

$$2^{2k-1} + 2^k - 1 \equiv 2^0 + 2^2 - 1 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Од тука следува тврдењето на задачата.

12. Докажи дека бројот $13^{101} - 13^{95}$ се дели со 7.

Решение. Имаме $13 \equiv -1 \pmod{7}$, па затоа

$$13^{101} \equiv -1 \pmod{7} \text{ и } 13^{95} \equiv -1 \pmod{7},$$

од што следува дека $13^{101} - 13^{95} \equiv -1 - (-1) \equiv 0 \pmod{7}$.

13. Докажи дека бројот $2222^{5555} + 5555^{2222}$ се дели со 7.

Решение. Имаме $2222 \equiv 3 \pmod{7}$ и $5555 \equiv 4 \pmod{7}$. Од $3^3 \equiv -1 \pmod{7}$ следува $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, па затоа

$$2222^{5555} \equiv 3^{5555} \equiv 3^{6 \cdot 925 + 5} \equiv 1^{925} \cdot 3^5 \equiv 3^3 \cdot 3^2 \equiv (-1) \cdot 9 \equiv 5 \pmod{7}.$$

На сличен начин, $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$ и $5555^{2222} \equiv 2 \pmod{7}$. Конечно,

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 5 + 2 \equiv 0 \pmod{7}.$$

14. За секои природни броеви k, t, m збирот $3^{5k} + 4^{5t+2} + 5^{5m+1}$ се дели со 11. Докажи!

Решение. Од $3^2 \equiv -2 \pmod{11}$, следува дека $3^4 \equiv 4 \pmod{11}$, од што следува дека $3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$. Слично, $4^5 \equiv 1 \pmod{11}$ и $5^5 \equiv 1 \pmod{11}$. Тогаш

$$3^{5k} \equiv 1 \pmod{11}, 4^{5k+2} \equiv 4^2 \equiv 5 \pmod{11} \text{ и } 5^{5k+1} \equiv 5 \pmod{11},$$

па затоа

$$3^{5k} + 4^{5t+2} + 5^{5m+1} \equiv 1 + 5 + 5 \equiv 0 \pmod{11}.$$

15. Докажи дека за секој $n \geq 0$:

- а) $49 \mid (5 \cdot 3^{4n+2} + 53 \cdot 2^{5n})$, б) $14 \mid (2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3})$,
 в) $11 \mid (2^{6n+1} + 3^{2n+2})$, г) $57 \mid (7^{n+2} + 8^{2n+1})$,
 д) $37 \mid (2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1})$, ё) $17 \mid (2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2})$.

Решение. а) Од $3^4 \equiv -17 \pmod{49}$ и $2^5 \equiv -17 \pmod{49}$ следува дека

$$3^{4n} \equiv (-17)^n \pmod{49} \text{ и } 2^{5n} \equiv (-17)^n \pmod{49},$$

па затоа

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{4n+2} + 53 \cdot 2^{5n} &\equiv 5 \cdot 3^2 \cdot 3^{4n} + 53 \cdot 2^{5n} \equiv 45 \cdot 3^{4n} + 53 \cdot 2^{5n} \\ &\equiv 45 \cdot (-17)^n + 53 \cdot (-17)^n \equiv 0 \pmod{49}. \end{aligned}$$

б) Имаме $2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} \equiv (2 + 2^2 + 2^3)2^n \equiv 14 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{14}$.

в) Од $2^6 \equiv -2 \pmod{11}$ и $3^2 \equiv -2 \pmod{11}$, добиваме дека

$$2^{6n+1} + 3^{2n+2} \equiv (2^6)^n \cdot 2 + (3^2)^n \cdot 3^2 \equiv 2 \cdot (-2)^n + 9 \cdot (-2)^n \equiv 0 \pmod{11}.$$

г) Од $8^2 \equiv 7 \pmod{57}$, добиваме дека

$$7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv 49 \cdot 7^n + 8 \cdot (8^2)^n \equiv 49 \cdot 7^n + 8 \cdot 7^n \equiv 0 \pmod{57}.$$

д) Од $3^4 \equiv 7 \pmod{37}$ и $5^3 \equiv 2 \cdot 7 \pmod{37}$, добиваме дека

$$\begin{aligned} 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1} &\equiv 2^5 \cdot 2^n \cdot (3^4)^n + (5^3)^n \cdot 5 \\ &\equiv 32 \cdot 2^n \cdot 7^n + 5 \cdot (2 \cdot 7)^n \equiv 0 \pmod{37}. \end{aligned}$$

ё) Од $2^5 \equiv 3 \cdot 5 \pmod{17}$, добиваме дека

$$2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \equiv 2^3 \cdot (2^5)^n + 5^n \cdot 3^n \cdot 3^2 \equiv 8 \cdot (5 \cdot 3)^n + 9 \cdot 5^n \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

16. Докажи дека Ферматовиот број $f_5 = 2^{2^5} + 1$ е сложен.

Решение. Јасно, $f_5 > 641$, па затоа доволно е да докажеме дека $641 \mid f_5$.

Имаме $5^4 = 625 \equiv -16 \equiv -2^4 \pmod{641}$. Но, $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$, па затоа $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$, од што следува $5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$. Конечно,

$$2^{2^5} = 2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} \equiv -5^4 \cdot 2^{28} \equiv -1 \pmod{641},$$

па затоа $f_5 = 2^{2^5} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$, т.е. f_5 е сложен број.

17. Нека p е прост број и $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Докажи дека

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

Решение. Ако ги помножиме очигледните конгруенции

$$\begin{aligned}
 p-1 &\equiv -1 \pmod{p} \\
 p-2 &\equiv -2 \pmod{p} \\
 &\dots\dots\dots \\
 p-k &\equiv -k \pmod{p}
 \end{aligned}$$

добиваме

$$(p-1)(p-2)\dots(p-k) \equiv (-1)^k k! \pmod{p}.$$

Но, p е прост број и $k < p$, па затоа $\text{NZD}(p, k!) = 1$, па ако во горната конгруенција поделиме со $k!$ добиваме

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

18. Докажи дека меѓу броевите $2^n - 3$, $n = 0, 1, 2, \dots$ има бесконечно многу кои се деливи со 5 и бесконечно многу кои се деливи со 13.

Решение. Од $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ следува $2^{4m} \equiv 1 \pmod{5}$, за секој $m \geq 0$, од каде следува

$$2^{4m+3} \equiv 2^{4m} \cdot 2^3 \equiv 2^3 \equiv 3 \pmod{5},$$

па затоа за секој природен број n од облик $4m+3$ бројот $2^n - 3$ се дели со 5. Аналогно, од

$$2^6 \equiv -1 \pmod{13} \text{ имаме } 2^{12} \equiv 1 \pmod{13},$$

што значи дека

$$2^{12m+4} \equiv 2^{12m} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \equiv 3 \pmod{13},$$

па затоа за секој природен број n од облик $12m+4$ бројот $2^n - 3$ се дели со 5.

19. Најди ги сите природни броеви n , такви што $7 \mid (2^n - 1)$.

Решение. Ако $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, тогаш

$$2^n = (2^3)^k \equiv 1 \pmod{7},$$

па $2^{3k} - 1$ е делив со 7. Ако $n = 3k + i$, за $i = 1, 2$ тогаш

$$2^{3k+i} - 1 = 2^i (2^{3k} - 1) + 2^i - 1.$$

Бидејќи $2^{3k} - 1$ е делив со 7, а $2^i - 1$ не е делив со 7 добиваме дека $2^{3k+i} - 1$, за $i = 1, 2$ не е делив со 7. Значи, $2^n - 1$ е делив со 7 ако и само ако n е делив со 3.

20. Докажи дека $7 \nmid (2^n + 1)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Секој природен број n може да се запише во обликот $3k + i$, $i = 0, 1, 2$, $k \in \mathbf{N}$. Тогаш $2^n + 1 = 2^i (2^{3k} - 1) + 2^i + 1$. Според претходната задача првиот собирук е делив со 7, а вториот собирук не е делив со 7. Значи, $2^n + 1$ не е делив со 7, за секој $n \in \mathbf{N}$.

21. Нека $m, n \in \mathbf{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на броевите 1978^m и 1978^n (во декаден запис) се еднакви. Најди ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

Решение. Според условот на задачата бројот $1978^m(1978^{n-m}-1)$ е делив со $1000=8 \cdot 125$. Бидејќи бројот $1978^{n-m}-1$ е непарен, а 1978 е парен добиваме $8|1978^m$ и $125|(1978^{n-m}-1)$. Но, $1978=2 \cdot 989$ па од првиот услов следува $m \geq 3$, а од вториот услов $1978^{n-m} \equiv (-2)^{n-m} \equiv 1 \pmod{5}$. Ова е можно само за $n-m=4k$, $k \geq 1$. Останува да се определи најмалиот природен број k , таков што бројот $1978^{4k}-1$ е делив со 125 . Од $1978^4 \equiv 6 \pmod{125}$ добиваме $6^k \equiv 1 \pmod{125}$. Најмалиот таков број е 25 , па решението на задачата е $m=3$, $n=103$.

22. Нека d е природен број различен од $2, 5$ и 13 . Докажи дека во множеството $\{2, 5, 13, d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така да $ab-1$ не е квадрат на цел број.

Решение. Нека претпоставиме дека за секои $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, $a \neq b$, бројот $ab-1$ е потполн квадрат. Специјално, нека

$$2d-1=x^2, 5d-1=y^2, 13d-1=z^2,$$

за некои цели броеви x, y, z . Тогаш бројот x мора да биде непарен и $2d=x^2+1 \equiv 2 \pmod{8}$, па затоа и бројот d е непарен. Но, тоа значи дека y и z се парни броеви: $y=2a, z=2b$, $a, b \in \mathbf{Z}$. Сега од $z^2-y^2=8d$ следува $(a-b)(a+b)=(b-a)(b+a)=2d$, што значи дека броевите a и b се со иста парност, што е противречност, бидејќи d е непарен.

23. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{10}^4 = 2011.$$

Решение. Ако некој x_i е парен број, $x_i=2k$, тогаш $x_i^4=16k^4 \equiv 0 \pmod{16}$. Ако x_i е непарен број, тогаш

$$x_i^4-1=(x_i-1)(x_i+1)(x_i^2+1) \equiv 0 \pmod{16}$$

(првите два множителя се последователни парни броеви, а и третиот множител е парен број), од каде $x_i^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Тоа значи дека

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{10}^4 \equiv k \pmod{16}, \quad k \leq 10.$$

Од друга страна, $2011 \equiv 11 \pmod{16}$, што значи дека дадената равенка нема решенија.

24. Најди ги сите прости броеви p и q такви да бројот $p^2+3pq+q^2$ е квадрат на некој природен број.

Решение. Нека $p^2 + 3pq + q^2 = r^2$. За секој прост број $n \neq 3$ важи $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$, па затоа $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Затоа, ако $p \neq 3$ и $q \neq 3$ добиваме

$$p^2 + 3pq + q^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

и како $r^2 \equiv 1 \pmod{3}$ добиваме дека еден од броевите p или q е еднаков на 3. Нека $p = 3$. Тогаш равенката го добива обликот

$$9 + 9q + q^2 = r^2, \text{ т.е. } 36 + 36q + 4q^2 = 4r^2,$$

односно $(2q+9)^2 - (2r)^2 = 45$, од каде добиваме

$$(2q-2r+9)(2q+2r+9) = 45.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $r > 0$, па затоа од последната равенка добиваме

$$\begin{cases} 2q+2r+9=15 \\ 2q-2r+9=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2q+2r+9=45 \\ 2q-2r+9=1 \end{cases}$$

Од првиот систем наоѓаме $q = 0$, што не е можно, а додека од вториот добиваме $q = 7$ и $r = 11$. Според тоа, бараните броеви се 3 и 7.

25. Најди ги сите природни броеви a, b, c такви да $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

Решение. За секој природен број n важи $n = 3k$ или $n = 3k \pm 1$. Во првиот случај имаме $n^3 = 27k^3$, а во вториот

$$n^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9(3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1.$$

Според тоа, трет степен на природен број при делење со 9 дава остаток 0 или ± 1 . Значи, $n^3 \equiv 0 \pmod{9}$ или $n^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$. Сега, од $2001 = 9 \cdot 222 + 3$, следува дека сите три броја се од облик $3k+1$. Според тоа, треба да определиме броеви x, y, z такви да $a = 3x+1, b = 3y+1, c = 3z+1$ и $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$. Ако претпоставиме дека $a \leq b \leq c$, односно $x \leq y \leq z$, тогаш од $c^3 \leq 2001$ следува $3z+1 \leq 12$, па затоа $z \leq 3$. Понатаму, $7^3 = 343$ и $3 \cdot 343 < 2001$ следува дека не е можно $z \leq 2$. Според тоа, $z = 3$ и сега лесно наоѓаме дека $y = 3$ и $x = 0$. Конечно, бараните броеви се $a = 1, b = c = 10$.

26. За секој број $n = 0, 1, 2, \dots, 1999$ бројот A_n е дефиниран со

$$A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}.$$

Најди го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, \dots, A_{1999}$.

Решение. За $n = 0$ имаме $A_0 = 2^0 + 3^2 + 5^2 = 35$, што значи дека најголемиот заеднички делител, да го означиме со d , е еден од броевите 1, 5, 7 или 35. Но, за $n = 1$, бројот $A_1 = 2^3 + 3^8 + 5^8 = 6569 + 5^8$ не се дели со 5, па затоа остануваат две можности: или $d = 1$ или $d = 7$. Ќе докажеме дека броевите A_n се деливи со 7. Имаме

$$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3^{6n+2} = 9 \cdot (3^3)^{2n} = 9 \cdot 27^{2n} \equiv 2 \cdot (-1)^{2n} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$5^{6n+2} = 25 \cdot (5^3)^{2n} = 25 \cdot 125^{2n} \equiv 4 \cdot (-1)^{2n} \equiv 4 \pmod{7}$$

па затоа $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2} \equiv 1 + 2 + 4 = 7 \equiv 0 \pmod{7}$, што значи дека $7 \mid A_n$, т.е. $d = 7$.

27. Докажи дека бројот 2001 не може да биде збир на кубови на два природни броја.

Решение. Лесно се докажува дека за секој природен број n точни се конгруенциите $n^3 \equiv 0 \pmod{7}$ или $n^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$. Затоа збирот $m^3 + n^3$ при делење со 7 дава остатоци 0, ± 1 , ± 2 . Но, $2001 \equiv -1 \pmod{7}$, па затоа еден од кубовите во збирот мора да е делив со 7. Нека тоа е $m = 7k$ и како треба $(7k)^3 \leq 2001$ добиваме дека $k = 1$, па затоа $m = 7$. Меѓутоа, од $7^3 + n^3 = 2001$ следува $n^3 = 1658$, што не е можно бидејќи 1658 не е куб. Тоа го докажува тврдењето на задачата.

28. Докажи дека не постојат природни броеви x и y такви да $x^3 + y^3 = 2^{2006}$.

Решение. Во претходната задача видовме дека трет степен на природен број при делење со 7 дава остаток 0, 1 или 6. Од друга страна

$$2^{2006} = 2^{2004+2} = (2^3)^{668} \cdot 4 \equiv 4 \cdot 1^{668} \equiv 4 \pmod{7}.$$

Меѓутоа, со собирање на два од остатоците 0, 1 и 6 не може да се добие остаток 4, па затоа не постојат цели броеви x и y такви да $x^3 + y^3 = 2^{2006}$.

29. Ако природниот број n не се дели со 4, докажи дека 5 е делител на бројот $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$.

Решение. Ако n е непарен, тогаш

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n = 1^n + 2^n - 2^n - 1^n = 0 \pmod{5}.$$

Ако $n = 2k$, каде k е непарен број, тогаш

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n = 2(1^{2k} + 2^{2k}) \equiv 2(1 + (-1)^k) = 0 \pmod{5}$$

30. Ако p е прост број, докажи дека $7p + 3^p - 4$ не е квадрат на природен број.

Решение. За $p = 2$ имаме $7 \cdot 2 + 3^2 - 4 = 19$ и 19 не е квадрат на природен број. За $p > 2$ бројот $7p + 3^p - 4$ е парен, па затоа ако тој е квадрат на природен број мора да е делив со 4. Понатаму, за $p = 3$ имаме $7 \cdot 3 + 3^3 - 4 = 44$ и 44 не е квадрат на природен број. Секој прост број поголем од 3 е или од облик $4k + 1$ или $4k + 3$. Ако $p = 4k + 1$, тогаш

$$7p + 3^p - 4 = 7(4k + 1) + 3^{4k+1} - 4 = 28k + 3 \cdot 81^k + 3 \equiv 3 \cdot 1^k + 3 \equiv 2 \pmod{4},$$

што значи дека во овој случај $7p + 3^p - 4$ не е квадрат на природен број. Нека $p = 4k + 3$. Ќе ја користиме малата теорема на Ферма: ако a и p се

заемно прости броеви тогаш $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Во нашиот случај 3 и $p = 4k + 3, k > 1$ се заемно прости броеви па затоа

$$7p + 3^p - 4 = 7p + 3 \cdot 3^{p-1} - 4 \equiv 3 - 4 = -1 \pmod{p},$$

и ако $7p + 3^p - 4 = n^2$ добиваме дека $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$, т.е. $n^2 + 1$ се дели со p . Но, n^2 се дели со 4, па затоа $p = 4k + 1$, што противречи на претпоставката дека $p = 4k + 3$. Конечно, од добиената противречност следува дека и во овој случај $7p + 3^p - 4$ не е квадрат на природен број.

31. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите $4^n + 15n - 1, n \in \mathbf{N}$.

Решение. Заменувајќи $n = 1, n = 2, n = 3$ ги добиваме првите три од дадените броеви: 18, 45, 108 и нивниот најголем заеднички делител е 9. Ќе докажеме дека бројот 9 е најголемиот заеднички делител на дадените броеви. Секој природен број може да се запише во облик $3k, 3k + 1$ и $3k + 2$.

За $n = 3k$ имаме

$$4^{3k} + 15 \cdot 3k - 1 = 64^k + 45k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod{9}.$$

За $n = 3k + 1$ имаме

$$4^{3k+1} + 15 \cdot (3k + 1) - 1 = 4 \cdot 64^k + 45k + 14 \equiv 4 \cdot 1^k + 14 = 18 \equiv 0 \pmod{9}.$$

За $n = 3k + 2$ имаме

$$4^{3k+2} + 15 \cdot (3k + 2) - 1 = 16 \cdot 64^k + 45k + 29 \equiv 16 \cdot 1^k + 29 = 45 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека најголемиот заеднички делител на броевите од облик $4^n + 15n - 1, n \in \mathbf{N}$ е 9.

32. Дали можат броевите $1^1, 2^2, \dots, 2008^{2008}$ да се запишат еден по друг, во произволен редослед, така што добиениот број да биде точен квадрат.

Решение. Ќе ги користиме следниве тврдења:

1) Ако $x \in \mathbf{N}$, тогаш $x^2 \equiv 0$ или $1 \pmod{3}$.

2) За секој природен број a , важи $a \equiv S(a) \pmod{3}$, каде $S(a)$ е збирот на цифрите на бројот a .

Понатаму имаме

$$\begin{aligned} (6k+1)^{6k+1} &= [(6k+1)^k]^2 \cdot (6k+1) \equiv 1 \pmod{3} \\ (6k+2)^{6k+2} &= [(6k+2)^{3k+1}]^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (6k+3)^{6k+3} &\equiv 0 \pmod{3} \\ (6k+4)^{6k+4} &= [(6k+1)^{3k+2}]^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (6k+5)^{6k+5} &= [(6k+5)^{3k+2}]^2 \cdot (6k+5) \equiv 2 \pmod{3} \\ (6k+6)^{6k+6} &\equiv 0 \pmod{3}, \end{aligned} \tag{1}$$

за секој $k = 1, 2, 3, \dots$.

Броевите $1^1, 2^2, \dots, 2008^{2008}$ да ги разделиме во групи од по шест броја

$(6k+1)^{6k+1}, (6k+2)^{6k+2}, (6k+3)^{6k+3}, (6k+4)^{6k+4}, (6k+5)^{6k+5}, (6k+6)^{6k+6}, k=1, 2, \dots$
и да ставиме

$s_k = (6k+1)^{6k+1} + (6k+2)^{6k+2} + (6k+3)^{6k+3} + (6k+4)^{6k+4} + (6k+5)^{6k+5} + (6k+6)^{6k+6}$,
за $k=1, 2, 3, \dots$. Од конгруенциите (1) и од својствата на конгруенциите следува

$$s_k \equiv 1+1+0+1+2+0 \equiv 2 \pmod{3}. \quad (2)$$

за секој $k=1, 2, 3, \dots$.

Нека бројот A е добиен со запишување еден по друг, во произволен распоред, на броевите $1^1, 2^2, \dots, 2008^{2008}$. Тогаш збирот на цифрите $S(A)$, на бројот A , е еднаков на збирот од зборовите на цифрите $S(i^i)$ на броевите i^i , $i=1, 2, \dots, 2008$, па од тврдењето 2) следува дека:

$$A \equiv S(A) = S(1^1) + S(2^2) + \dots + S(2008^{2008}) \equiv 1^1 + 2^2 + \dots + 2008^{2008} \pmod{3}.$$

Понатаму, $2008 = 334 \cdot 6 + 4$ и ако ги искористиме конгруенциите (1) и (2), тогаш од својствата на конгруенциите добиваме

$$A \equiv 1^1 + 2^2 + \dots + 2008^{2008} \pmod{3}$$

$$A \equiv s_1 + s_2 + \dots + s_{664} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2007^{2007} + 2008^{2008} \pmod{3}$$

$$A \equiv 334 \cdot 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 671 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Конечно, од тврдењето 1) следува дека A не е точен квадрат.

33. Нека C е множество од ненегативни цели броеви кои може да се претстават во обликот: $2007t + 2008s$, каде t, s , се ненегативни цели броеви

а) Докажи дека 4026041 не припаѓа во C ,

б) Ако n е цел број таков што $0 \leq n \leq 4026041$ и $n \notin C$, тогаш

$$(4026041 - n) \in C.$$

Доказ. а) Да претпоставиме спротивно, односно, нека $4026041 \in C$. Тоа значи дека постојат t, s , - ненегативни цели броеви, т.ш.

$$4026041 = 2007t + 2008s \quad (1)$$

Ако разгледаме конгруенција по модул 2007, имаме: $s \equiv 2006 \pmod{2007}$, а бидејќи s е ненегативен цел број, одовде следува $s \geq 2006$, односно $2008s \geq 4028048$, што е во контрадикција со (1). Следува $4026041 \notin C$.

б) Нека $n = 2007a + b$, $0 \leq a$, $0 \leq b \leq 2006$, и нека важат поставените услови.

Тогаш, бидејќи $n = 2007(a - b) + 2008b$, за да биде исполнет условот $n \notin C$, мора $b > a$. Сега:

$$4026041 - n = 2008 \cdot 2006 - 2007 - (2007a + b) = 2008(2006 - b) + 2007(b - a - 1)$$

Следува $(4026041 - n) \in C$.

34. Најди го најмалиот збир на цифрите на број од облик $3n^2 + n + 1$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. За $n=1$ бројот е 5. За $n=8$ го добиваме бројот 201, кој има збир на цифри 3. Ќе докажеме дека ова е бараниот минимален збир на цифрите. Имаме

$$3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

што значи дека сите броеви од дадениот вид се непарни. Затоа не е можно броевите да имаат збир на цифри 1, како и да бидат од облик $2 \cdot 10^m$. Според тоа, треба да се испита дали равенката

$$3n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

има решение во множеството природни броеви. Со идентична трансформација добиваме

$$n(3n+1) = 10^m = 1 \cdot 10^m = 2^m 5^m.$$

Бидејќи броевите n и $3n+1$ се заемно прости и $n < 3n+1$ можни се два случаи: $n=1$, $3n+1=10^m$ или $n=2^m$, $3n+1=5^m$. Првиот случај не е возможен, додека за вториот добиваме $3 \cdot 2^m + 1 = 5^m$. За $m=1$ и $m=2$ не добиваме равенство ($3 \cdot 2 + 1 \neq 5$, $3 \cdot 4 + 1 \neq 25$), па затоа ја имаме следва оценка

$$5^m = 5^2 \cdot 5^{m-2} > 24 \cdot 5^{m-2} > 3 \cdot 2^3 \cdot 2^{m-2} = 3 \cdot 2^{m+1} > 3 \cdot 2^m + 1,$$

па дадената равенка нема решенија во множеството природни броеви. Бидејќи ги исклучивме 1 и 2, заклучуваме дека најмалиот збир на цифрите е еднаков на 3.

35. Одреди ги сите природни броеви n за кои бројот $2^n + 3^n + 4^n$ е квадрат на природен број.

Решение. За $n=1$, добиваме $2^1 + 3^1 + 4^1 = 9 = 3^2$.

Нека $n \geq 2$ и $2^n + 3^n + 4^n = x^2$ за некој природен број x . Бидејќи бројот $2^n + 3^n + 4^n$ е непарен и бројот x е непарен. Следува дека, $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$, односно дека $(-1)^n \equiv 1 \pmod{4}$. Од тука добиваме дека $n = 2k$, за некој природен број k . Значи

$$x^2 = 4^k + 9^k + (4^k)^2 \equiv 1 + 0 + 1 \equiv 2 \pmod{3},$$

што не е можно. Следува дека $n=1$ е единствениот број со бараното својство.

36. Најди ги сите природни броеви x, y, z и t такви што

$$2^x 3^y + 5^z = 7^t. \quad (1)$$

Решение. Од дадената равенка разгледувајќи по модул 3 добиваме $5^z \equiv 1 \pmod{3}$, што значи дека $z = 2c$, $c \in \mathbf{N}$. Понатаму, јасно е дека $t \geq 2$. Ако $t = 2d + 1$, $d \in \mathbf{N}$, тогаш равенката (1) го добива обликот $2^x 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$. Ако $x \geq 2$, тогаш разгледувајќи по модул 4 добиваме $1 \equiv 3 \pmod{4}$, што е противречност. Ако $x = 1$, добиваме $2 \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$ и разгледувајќи по модул 24 добиваме

$$2 \cdot 3^y + 1 \equiv 7 \pmod{24},$$

од што следува дека $24 \mid 6(3^{y-1} - 1)$, т.е. $4 \mid (3^{y-1} - 1)$, што значи дека $y-1$ е парен број. Тогаш $y = 2b + 1$, $b \in \mathbf{N}$ и добиваме дека $6 \cdot 9^b + 25^c = 7 \cdot 49^d$. Ако

во последното равенство разгледуваме по модул 5 добиваме $(-1)^b \equiv 2(-1)^d \pmod{5}$, што не е можно за кои било $b, d \in \mathbf{N}$. Од досега изнесеното следува дека t е парен број, т.е. $t = 2d, d \in \mathbf{N}$.

Според тоа, равенката (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 49^d,$$

односно

$$(7^d - 5^c)(7^d + 5^c) = 2^x 3^y.$$

Но, НЗД($7^d - 5^c, 7^d + 5^c$) = 2 и $7^d + 5^c > 2$, па можни се следниве три случаи:

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^c = 2 \cdot 3^y \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \cdot 3^y \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} 3^y \end{cases} \quad (4)$$

Од системот (2) добиваме $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ и ако разгледаме по модул 3, добиваме $2^{x-2} \equiv 1 \pmod{3}$, од што следува дека $x-2$ е парен број, т.е. $x = 2a + 2$, $a \in \mathbf{N}_0$, каде $a > 0$, бидејќи за $a = 0$ од претходната равенка следува $7^d = 1 + 3^y$, што не е можно (непарен број еднаков на парен број). Според тоа, $7^d - 5^c = 2 \cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 4 добиваме $7^d \equiv 1 \pmod{4}$, па затоа $d = 2e, e \in \mathbf{N}$. Тоа значи дека $49^e - 5^c = 2 \cdot 4^a$, па ако разгледаме по модул 8 добиваме $5^c \equiv 1 \pmod{8}$, од што следува дека $c = 2f, f \in \mathbf{N}$. Според тоа, $49^e - 25^f = 2 \cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 3 добиваме $0 \equiv 2 \pmod{3}$, што е противречност. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Да го разгледаме системот (3). Од $2^{x-1} = 7^d + 5^c \geq 12$ следува $x \geq 5$. Тогаш $7^d + 5^c \equiv 0 \pmod{4}$, т.е. $3^d + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, па затоа d е непарен број. Но, $7^d = 5^c + 2 \cdot 3^y \geq 11$, па затоа $d \geq 2$ и затоа $d = 2e + 1, e \in \mathbf{N}$. Како и во претходниот случај од $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ разгледувајќи по модул 5 добиваме $x = 2a + 2$ и како $x \geq 5$ добиваме $a \geq 2$. Според тоа, $7^d = 4^a + 3^y$, т.е. $7 \cdot 49^e = 4^a + 3^y$ и ако разгледаме по модул 8 добиваме $7 \equiv 3^y \pmod{8}$, бидејќи 3^y е конгруенстен со 1 по модул 8 ако y е парен, односно со 3 ако y е непарен. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (3) нема решенија во множеството природни броеви.

Од системот (4) следува $7^d = 5^c + 2$, што значи дека цифрата на единиците на бројот 7^d , што е можно само ако $d = 4k + 1, k \in \mathbf{N}$. Ако $c \geq 2$, тогаш разгледувајќи го $7^{4k+1} = 5^c + 2$ по модул 25 добиваме $7 \equiv 2 \pmod{25}$, што не е можно. За $c = 1$ добиваме $d = 1$ и решение на задачата е $x = 3, y = 1, z = t = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
2. Grozdev, S.; Kolev, E.; Mushkarov, O.; Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
3. Mičić, V.; Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
4. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjih škola, DMS, Beograd, 1991
5. Niven, I.; Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980
6. Shockley, J. E.: Introduction to Number Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1967
7. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
8. Stojanović, V.: Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd, 1985
9. Stojanović, V.; Zolić, A.: Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd, 1991
10. Tošić, R.: Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd, 1990
11. Tošić, R.; Vukoslavčević, V.: Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
12. Zolić, A.: Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd, 1990
13. Андрић, В.: Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 2006
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В.: 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд, 1997
15. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
16. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, 1972
17. Гаврилов, Ј.; Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, Софија, 1977
18. Димовски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јпсифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
19. Дуденков, С.; Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, Софија, 1999
20. Зубелевич, Г. И.: Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва, 1967

21. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
22. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
23. Малчески, Р.: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
24. Малчески, Р., Аневска, К.: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје, 2012
25. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
26. Малчески, Р.; Димовски, Д.; Тренчевски, К.: Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје, 1993
27. Малчески, Р.; Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури, ФОН универзитет, Скопје, 2011
28. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
29. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
30. Серпинский, В.: 250 задач по элементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976

ИНДЕКС НА ПОИМИ

Б

Бинарен броен систем, 26
Броен систем со основа b , 25

В

Вистински делител, 7

Д

Декаден систем, 23
Деленик, 13
Делив, 7
Делител, 7, 13

Е

Евклидов алгоритам, 45
Ератостеново сито, 60

З

Заеднички делител, 41
Заеднички содржател, 50
Заемно комплементарни делители, 8
Заемно прости броеви, 43
Заемно прости во целина броеви, 43
Заемно прости по парови броеви, 43

К

Каноничен запис, 65
Количник, 13
Конгруентен, 89

Л

Линеарна Диофантова равенка со две непознати, 74

М

Множество остатоци, 14
Модул, 89
Модуларна аритметика,

Н

Најголем заеднички делител, 41, 66
Најмал заеднички
содржател, 50, 53, 66
Неконгруентен, 89
Непарни броеви, 14

О

Ојлеров метод, 78
Основа (база) на броен систем, 23
Основна теорема на аритметиката, 64
Остаток, 13

П

Палиндром, 30
Парни броеви, 14
Признак за деливост со 11, 23, 94
Признак за деливост со 2, 18
Признак за деливост со 3, 21
Признак за деливост со 4, 18
Признак за деливост со 5, 20
Признак за деливост со 7, 95
Признак за деливост со 8, 18
Признак за деливост со 9, 21, 94
Прост број, 57

С

Сложен број, 50
Совршен број, 33
Содржател, 7

Т

Теорема за делење со остаток, 13

Теорема на Евклид, 61

Теорема на Ферма (голема), 80

Ф

Ферматов број, 98

Х

Хексадецимален систем, 26