

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 2016/17 година**

ЈОШ ЈЕДАН ДОКАЗ ОЈЛЕРОВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ЗА ТРОУГАО

Шефкеј Арсланаић, Сарајево, БиХ

Ако су R и r редом полупречници описане и уписане кружнице троугла, тада је

$$R \geq 2r, \quad (1)$$

при чему једнакост важи ако и само ако је троугао једнакостраничан. Неједнакост (1) је открио чувени швајцарски математичар Леонард Ојлер (1707-1783), те је у математичкој литератури позната као *Ојлерова неједнакост*.

Постоји више доказа Ојлерове неједнакости која има значајну улогу у извођењу других неједнакости о троуглу. Неки од тих доказа могу се наћи у књигама [1], [2], [3] и [4]. Штавише, у [3], [4] и [5] су представљена и побољшања ове неједнакости као што су:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}$$

$$\frac{R}{r} \geq 2 \frac{t_a}{h_a}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{2abc} \quad (\text{оштроугли троугао}).$$

Са a, b, c су означене дужине страница троугла ABC , а са h_a и t_a дужине висине и тежишне линије тог троугла повучених из темена A .

За још један доказ неједнакости (1) који ћемо изложити, неопходне су следеће две леме.

Лема 1. *Ако су α , β , γ унутрашњи улови троугла, тада важи неједнакост*

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Доказ. Како је $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, користећи формулу за збир косинуса добијамо

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}\quad (2)$$

С обзиром да је $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$ и $\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1$, имамо

$$\begin{aligned}2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) &\leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1\right) \\ &= -2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 1\end{aligned}\quad (3)$$

Овај квадратни трином по $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ можемо представити у облику

$$\begin{aligned}-2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 &= -2 \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} - \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Како је $\left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$, следи

$$\frac{3}{2} - \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{2}.\quad (5)$$

Из (2), (3), (4) и (5) следи тражена неједнакост.

□

Приметимо да се у (5) горња граница $\frac{3}{2}$ достиже само ако је $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} = 0$, односно $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2}$. То повлачи $\frac{\alpha + \beta}{2} = 60^\circ$ и $\alpha + \beta = 120^\circ$. Из тога даље следи да је $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$ ако, уз $\alpha + \beta = 120^\circ$, важи и једнакост у (3),

тј. ако је $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$. Из $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$ следи $\frac{\alpha - \beta}{2} = 0$, односно $\alpha = \beta$. Скупа са $\alpha + \beta = 120^\circ$, то даје $\alpha = \beta = 60^\circ$, тј. троугао је једнакостраничан.

Тако важи

Последица. За унутрашње улове α, β, γ троугла, важи једнакост

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$$

ако и само ако је троугао једнакостраничан.

□

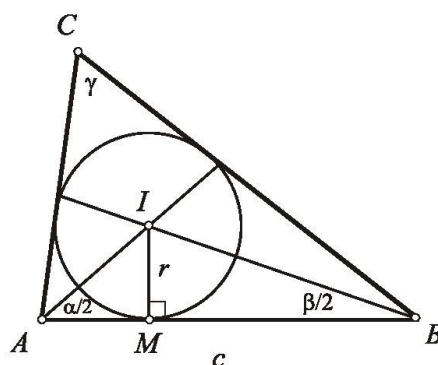
Лема 2. Ако су α, β, γ унутрашњи улови троугла и R и r редом полупречници описане и уписане кружнице, тада важи једнакост

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{2 \sin \gamma}. \quad (6)$$

Доказ. На основу синусне теореме, имамо

$$c = 2R \sin \gamma \quad (7)$$

С друге стране, уочимо тачку I – центар уписане кружнице у $\triangle ABC$ и M – тачку додира те кружнице и странице AB (сл. 1).



Сл. 1.

Тада је $c = AM + MB$. Како је $\angle AMI = \angle BMI = 90^\circ$, $\angle MAI = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MBI = \frac{\beta}{2}$ и $MI = r$, из правоуглих троуглова AMI и BMI следи $AM = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ и $MB = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$. Отуда је

$$c = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \quad (8)$$

Сада из (7) и (8) следи

$$2R \sin \gamma = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right),$$

односно

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{2 \sin \gamma}.$$

□

Доказ неједнакости (1). С обзиром на (6), довољно је доказати да је

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{2 \sin \gamma} \geq 2. \quad (9)$$

То је еквивалентно са $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \geq 4 \sin \gamma$ и даље

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \geq 4 \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \geq 4 \sin(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \geq 8 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \geq 8 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} &\leq 1 \Leftrightarrow \\
 2 \sin \alpha \sin \beta - 8 \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{2} &\leq 1 \Leftrightarrow \\
 2 \sin \alpha \sin \beta - 2(1 - \cos \alpha - \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta) &\leq 1 \Leftrightarrow \\
 \cos \alpha + \cos \beta - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) &\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
 \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) &\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
 \cos \alpha + \cos \beta - \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) &\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
 \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &\leq \frac{3}{2} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Како је неједнакост (10) тачна због леме 1, тачна је и неједнакост (9). Према последици леме 1, у (10) важи једнакост ако и само ако је троугао једнако-страничан. Отуда и у (1) важи једнакост само у случају једнакостраничног троугла.

Литература

- [1] Арсланагић, Ш., *Математика за надарене*, Босанска ријеч, Сарајево, 2005.
- [2] Арсланагић, Ш., *Методичка збирка задатака са основама теорије из елементарне математике*, Графичар промет д.о.о., Сарајево, 2006.
- [3] Арсланагић, Ш., *Математичка читанка*, Графичар промет д.о.о., Сарајево, 2008.
- [4] Арсланагић, Ш., *Математичка читанка 6*, Графичар промет д.о.о., Сарајево, 2013.
- [5] Арсланагић, Ш., *Математичка читанка 2*, Графичар промет д.о.о., Сарајево, 2010.
- [6] Арсланагић, Ш., *Математичка читанка 5*, Графичар промет д.о.о., Сарајево, 2013.