др Ратко Тошић (Нови Сад)

ЉУДИ, МА ЈЕ Л' ТО МОГУЋЕ?

Сигурно вам се дешавало да вам се неки задатак на први поглед учини бесмислен. После краћег или дужег размишљања, одједном вам сине идеја, и оно што је на први поглед изгледало бесмислено и немогуће, постаје чудесно лепо.

Пре него што прочитате решења следећих неколико геометријских задатака, покушајте да их сами решите.

ЗАДАЦИ

1. Постоји ли троугао са површином већом од 100, чија свака висина има дужину мању од 1?

2. Може ли троугао чија свака страница има дужину мању од 1 имати већу површину од троугла чија свака страница има дужину већу од 100?

3. Да ли се може изабрати

(а) 6 тачака у равни;

(б) 7 тачака у простору,

тако да су сваке три темена једнакокраког троугла?

4. Да ли постоји шестоугао, такав да се из неке његове унутрашње тачке ниједна његова страница не види цела?

5. Да ли се у равни могу нацртати два троугла тако да су они симетрични један другом у односу на две различите праве?

6. Конвексан четвороугао је повлачењем дијагонала разбијен на четири троугла чије су површине различити цели бројеви већи од 2, а мањи од 10. Одредити површину четвороугла.

7. У равни су дате две кружнице тако да свака лежи у спољашњости друге. Да ли у спољашњости обе кружнице постоји тачка, таква да свака права кроз ту тачку сече бар једну од датих кружница?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. Да. Такав је, на пример, једнакокраки троугао са основицом дужине не веће од 400 и њој одговарајућом висином $h = \frac{1}{2}$. Површина тог троугла већа је од 100, док су друге две висине међусобно једнаке и свака је мања од 1. (Образложити.)

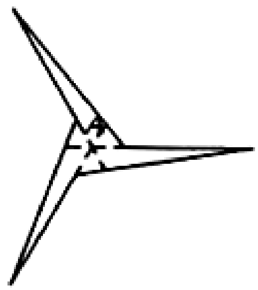
2. Да. Једнакостраничан троугао са страницом дужине 0.9 има већу површину од једнакокраког троугла са основицом дужине 200 и њој одговарајућом висином $h = \frac{1}{1000}$. Лако се види да сваки крак овог последњег троугла има дужину већу од 100. (Проверити тврђење израчунавањем површина троуглова.)

3. (а) Да. Пет темена правилног петоугла и центар тог петоугла (центар његове описане кружнице) представљају скуп од шест тачака са траженим својством.

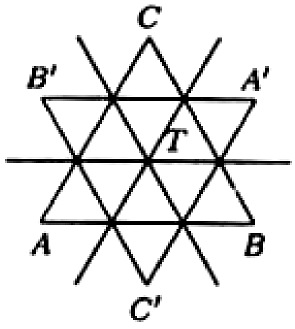
(б) Посматрајмо правилну петострану пирамиду чија је висина једнака полупречнику описане кружнице њене основе. Седам тражених тачака су темена пирамиде и центар њене основе.

Исто тако, ако две подударне правилне пирамиде имају заједничку основу, онда пет темена заједничке основе и врхови пирамида представљају седам тражених тачака.

4. Један такав шестоугао представљен је на слици 1. Из тачке A у унутрашњости тог шестоугла ниједна његова страница не види се цела.



Сл. 1



Сл. 2

5. Да. Нека је ABC једнакостраничан троугао и $A'B'C'$ троугао који је централно симетричан троуглу ABC у односу на тежиште T троугла ABC. Постоје чак три различите праве у односу на које су та два троугла симетрична. Свака права кроз заједничко тежиште T паралелна једној страници троугла ABC је таква симетрала (слика 2).

6. Претходно доказујемо следеће тврђење: Ако се дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу у тачки O, оне деле тај четвороугао на троуглове OAB, OBC, OCD и ODA тако да је производ површина троуглова OAB и OCD једнак производу површина троуглова OBC и ODA.

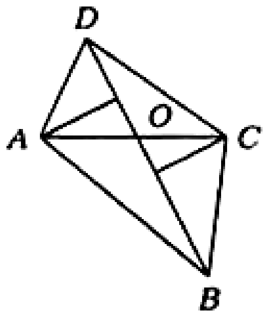
Доказ: Означимо површине наведених троуглова редом са S_1, S_2, S_3, S_4 (слика 3). Нека су h_1 и h_2 дужине нормала из тачака A и C редом на дијагоналу BD. Тада је

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot h_1, \; S_2 = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot h_2,$$
$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot DO \cdot h_2, \; S_4 = \frac{1}{2} \cdot DO \cdot h_1.$$

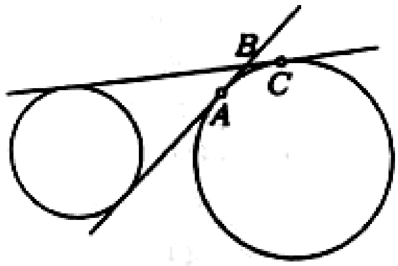
Непосредним израчунавањем лако се проверава да је

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 = \frac{1}{4} \cdot BO \cdot DO \cdot h_1 \cdot h_2.$$

Вратимо се сада нашем задатку. Четири различита броја, већа од 2, а мања од 10, таква да је производ два од њих једнак производу друга два, могу се изабрати само на један начин. То су бројеви 3, 4, 6 и 8. Површина четвороугла је онда једнака $3 + 4 + 6 + 8 = 21$.



Сл. 3



Сл. 4

7. Такву особину има свака тачка из унутрашњости криволинијског „троугла“ ABC, где је AB заједничка унутрашња тангента, BC заједничка спољашња тангента датих кружница, и AC лук кружнице (слика 4). Свака права која садржи неку тачку унутрашњости тог „троугла“, сече бар једну од дужи AB, AC, а тада она сече и бар једну од две кружнице. (Образложити.)

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

8. (а) Постоје ли два седмоугла једнаких површина чија се сва темена поклапају, али им се ниједан пар страница не поклапа?

(б) Постоје ли три таква седмоугла?

9. Да ли збир дужина дијагонала четвороугла може да буде 100 пута мањи од обима тог четвороугла?

10. Може ли збир растојања од неке тачке у унутрашњости конвексног четвороугла до његових темена бити већи од обима тог четвороугла?

11. Да ли се у простору може изабрати шест тачака тако да се при мерењу свих међусобних растојања између тих тачака добијају само два различита броја?

12. Да ли постоји осмоугао, такав да се из неке његове спољашње тачке ниједна његова страница не види цела?

13. Постоји ли четворострана пирамида код које су две наспрамне бочне стране нормалне на раван основе?

14. Од дрвене троугаоне пирамиде одсечени су неки делови и тако је добијена нова троугаона пирамида. Може ли збир дужина ивица те нове пирамиде бити већи од збира дужина ивица полазне пирамиде?

15. Може ли се квадрат разрезати на осам оштроуглих троуглова?

16. Из картона је исечен круг и означене су тачке O и A, где је O центар круга и $A \neq O$. Да ли се круг може расећи на два дела из којих се може саставити нови круг исте величине са центром у тачки A?

17. Пешак полази из тачке A, иде 10 километара према југу, затим скреће и иде 10 километара према истоку, поново скреће и иде 10 километара према северу. После 30 километара пређеног пута поново се нашао у тачки A. Колико има тачака A на површини Земље за које је такво путовање могуће?

Одговор на задатке **8-16** је: *ДА*.

Одговор на **17.** задатак: Има бесконачно много таквих тачака.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија