XXV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Во полињата на дадената лента допиши природни броеви во празните полиња, така што производот на било кои три последователни броеви е еднаков на 30. Колку решенија има задачата?

			5				

Решение. Постојат два начина на кои бројот 30 може да се претстави како производ на три природни броеви: $30=1\cdot5\cdot6$ или $30=2\cdot3\cdot5$. Во случајот $30=1\cdot5\cdot6$ имаме две можности:

5	6	1	5	6	1	5	6

5	1	6	5	1	6	5	1

Во случајот $30=2\cdot3\cdot5$ ги имаме уште следните две можности:

5	3	2	5	3	2	5	3

5	2	3	5	2	3	5	2

Значи, задачата има четири решенија.

Задача 2. Даме и Јане решиле да купат по една збирка задачи по математика за четврто одделение. На Јане му недостасувале 160 денари, а на Даме му недостасувале 40 денари. Затоа решиле да ги здружат парите и да купат една збирка. Но, и со здружени пари им недостасувале 20 денари за да ја купат збирката. Колку пари е цената на збирката и по колку пари имал секој од нив?

Решение. На Даме му недостасувале 40 денари, а откако ги здружиле парите вкупно им недостасувале 20 денари. Според тоа, Јане имал $40-20=20$ денари. Значи, збирката чини $160+20=180$ денари. Јане на почетокот имал 20 денари, а Даме имал $180-40=140$ денари.

Задача 3. Кога Марија се разбудила и погледнала во часовникот, утврдила дека поминала една четвртина од денонокието. Првиот училишен час на Марија ќе и започне за 75 минути, а во училиштето таа ќе престојува 4 часа и 50 минути. Во колку часот Марија ќе тргне од училиштето накај дома?

Решение. Бидејќи $24:4=6$, во моментот кога Марија погледнала во часовникот било 6 часот. Првиот училишен час ќе и започне после 75 минути што значи во 7 часот и 15 минути.Таа во училиштето ќе престојува уште 4 часа и 50 минути, па ќе замине накај дома во

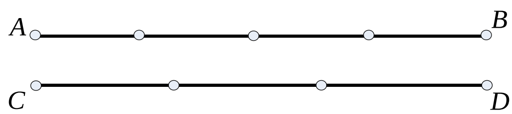
7ч.15мин.+4ч.50мин.=12ч.5мин.

Задача 4. На контролниот тест по математика наставникот поставил 30 задачи. Бројот на задачи кои точно ги решил еден ученик е за 20 поголем од бројот на задачите кои не ги решил. За секоја точно решена задача ученикот добива 8 поени, а за секоја нерешена или неточно решена губи 3 поени. Колку вкупно поени освоил ученикот на контролниот тест по математика?

Решение. Бројот на нерешени задачи е $(30-20):2=10:2=5$ задачи. Тогаш, бројот на точно решени задачи е $30-5=25$ задачи. Бидејќи, за секоја точно решена задача ученикот добива 8 поени, а за секоја нерешена губи 3 поени, затоа вкупниот број на поени кои ги освоил ученикот се $8\cdot 25-3\cdot 5=200-15=185$ поени.

Задача **5.** Квадрат и рамностран триаголник имаат еднакви периметри. Страните им се разликуваат за толку колку што е најмалиот парен број. Пресметај ги страните на квадратот и триаголникот и нивниот периметар.

Решение *Прв начин.* Нека отсечката *AB* го претставува периметарот на квадратот, а отсечката *CD* периметарот на



триаголникот. Тогаш, овие две отсечки се еднакви и *AB* е поделена на четири еднакви дела, а *CD* на три еднакви дела (види цртеж). Согледуваме дека секој од трите делови на отсечката *CD* е поголем од секој од четирите делови на отсечката *AB*, значи страната на триаголникот е поголема од страната на четириаголникот, а од условот на задачата имаме дека таа е поголема за 2 мерни единици. Од последново следи дека една од отсечките на отселката *AB* има должина колку што изнесува зголемувањето во секоја од трите отсечки на отсечката *CD*, односно страната на квадратот е

$3\cdot 2=6$ мерни единици, па страната на триаголникот ќе биде $6+2=8$ мерни единици. Тогаш, периметарот е $4\cdot 6=3\cdot 8=24$ мерни единици.

Втор начин. Нека a е должината на страната на квадратот, а b должината на страната на триаголникот. Бидејќи нивните периметри се еднакви, имаме дека $4a=3b.$ Од последното равенство, следува дека $b>a,$ па според условот имаме $b=a+2$. Тогаш, со замена во равенството за периметарот, се добива $4a=3\cdot(a+2)$, односно $4a=3a+6$, од каде страната на квадратот е $a=6$ мерни единици, а страната на триаголникот е $b=8$ мерни единици. Тогаш, периметарот е $4\cdot 6=3\cdot 8=24$ мерни единици.

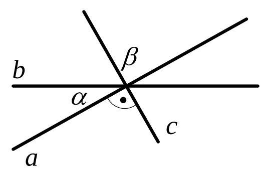
V одделение

Задача 1. Збирот на три броја е 300. Првиот е два пати поголем од вториот, а третиот е еднаков на збирот од првиот и вториот. Кои се тие броеви?

Решение. Од условот на задачата имаме $a+b+c=300$, $a=2b$, $c=a+b$. Од првата и третата равенка следува дека $c=300:2=150$, а со тоа и $a+b=150$. Потоа, од последнава равенка и втората, се добива $3b=150$, од каде $b=150:3=50$. Конечно, од втората равенка имаме $a=2b=2\cdot 50=100$. Значи, бараните броеви се 100, 50 и 150.

Задача 2. При пресекот на правите *a* и *b*, едниот од добиените агли е седум пати поголем од другиот. Во пресечната точка повлечена е нормала *c* на правата *a*. Пресметај го аголот меѓу правите *b* и *c*.

Решение. Да ги означиме со α и β, острииот и тапиот агол соодветно, што се добиваат при пресек на правите *a* и *b* (види цртеж) Од условот имаме дека $\beta=7\alpha$, па како $\alpha+\beta=180°$, се добива дека $8\alpha=180°$, односно



$$\alpha=180°:8=22{,}5°=22°30'.$$

Конечно, аголот меѓу правите *b* и *c* е

$$90°-\alpha=90°-22°30'=67°30', \text{ т.е. } 90°+\alpha=90°+22°30'=112°30'.$$

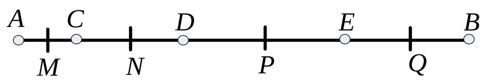
Задача 3. Дадени се цифрите 0, 1, 3, 4, 5. Со помош на овие цифри запиши ги сите петцифрени броеви со различни цифри, кои се деливи со 4, а не се деливи со 5.

Решение. Нека обликот на бараните броеви е $\overline{abcde}$, при што $a,b,c,d,e \in \{0,1,3,4,5\}$ и овие цифри се меѓусебе различни. Бидејќи бројот $\overline{abcde}$ треба да е петцифрен број, значи дека $a \neq 0$.Од $4 \mid \overline{abcde}$, следи дека $4 \mid \overline{de}$, односно $\overline{de} \in \{04,40\}$. од $5 \nmid \overline{abcde}$, следи дека $e \notin \{0,5\}$. Значи, мора $\overline{de} = 04$, т.е. $d = 0$ и $e = 4$. Остануваат цифрите 1, 3, 5 од кои треба да се формира трицифрениот почеток. Сите можни начини да се направи тоа се $\overline{abc} \in \{135,153,315,351,513,531\}$.

Значи, бараните петцифрени броеви се 13504, 15304, 31504, 35104, 51304, 53104.

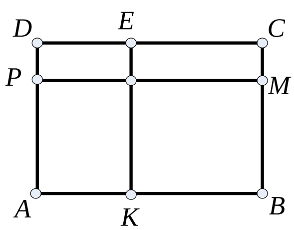
Задача 4. Дадена отсечка е поделена со три точки на четири нееднакви дела. Растојанието меѓу средините на внатрешните делови е 6*cm*, а растојанието меѓу средините на крајните делови е 16*cm*. Колку изнесува должината на дадената отсечка?

Решение. Нека крајните точки на дадената отсечка се *A* и *B*, и нека со точките *C, D, E* е поделена на четири нееднакви дела. Нека *M* е средина на



AC, N средина на *CD, P* средина на *DE* и *Q* средина на *EB*. Тогаш, од услов $\overline{NP} = 6cm$ и $\overline{MQ} = 16cm$.(види цртеж) Сега, од $\overline{NP} = 6cm$ имаме дека $\overline{CD} + \overline{DE} = 2 \cdot 6 = 12cm$. Од последново и од $\overline{MQ} = 16cm$, добиваме дека $\overline{MC} + \overline{EQ} = 16 - 12 = 4cm$, па бидејќи M е средина на AC и Q е средина на EB, следи дека и $\overline{AM} + \overline{QB} = 4cm$. И конечно, должината на дадената отсечка е $\overline{AB} = (\overline{AM} + \overline{QB}) + \overline{MQ} = 4 + 16 = 20cm$.

Задача 5. Низ точката *O* во правоаголникот *ABCD* повлечени се прави паралелни со страните на правоаголникот што го разбиваат на четири правоаголници *POED, OMCE, AKOP, KBMO* (види цртеж).



1) Ако плоштините на правоаголниците *POED, OMCE, AKOP*, се соодветно 2, 4, 6, определи ја плоштината на правоаголникот *ABCD*.

2) Ако периметрите на правоаголниците *POED, OMCE, AKOP*, се соодветно 6, 10, 10, пресметај го периметарот на правоаголникот *ABCD*.

Решение.1) Бидејќи плоштината на *OMCE* е два пати поголема од плоштината на *POED*, следи дека страната *OM* е два пати поголема од страната *OP*. Слично, бидејќи плоштината на *AKOP* е три пати поголема од плоштината на *POED*, следи дека *OK* е три пати поголема од *OE*. Заклучуваме дека плоштината на правоаголникот *BMOK* е $2\cdot 3=6$ пати поголема од плоштината на правоаголникот *POED*, т.е изнесува $6\cdot 2=12$. Плоштината на *ABCD* е сума од плоштините на четирите правоаголници и е еднаква на $2+4+6+12=24$.

2) Од тоа што периметарот на *OMCE* е за 4 поголем од периметарот на *POED*, следува дека *OM* е за 4:2=2 поголема од *OP*. Аналогно, *OK* е за два поголема од *OE*. Следи дека периметарот на *KBMO* е за $2\cdot 2+2\cdot 2=8$ поголем од периметарот на *POED*, и изнесува $6+8=14$. За да се определи периметарот на правоаголникот *ABCD*, треба да се соберат периметрите на четирите правоаголници и збирот да се подели со 2, односно периметарот на *ABCD* е $\frac{6+10+10+14}{2}=20$.

VI одделение

Задача 1. Едно буре е наполнето со вода до $\frac{5}{6}$ од својот волумен. Ако во бурето се налеат уште 10 литри вода, бурето ќе се дополни до $\frac{7}{8}$ од својот волумен. Колку литри вода собира бурето?

Решение. Нека бурето собира *x* литри вода. Од условот на задачата имаме дека $\frac{5}{6}x+10=\frac{7}{8}x$, односно $10=(\frac{7}{8}-\frac{5}{6})\cdot x$ т.е. $10=\frac{1}{24}\cdot x$, од каде $x=24\cdot 10=240$. Значи, бурето собира 240 литри вода.

Задача 2. Одреди ги сите можни вредности на цифрите a и b, така што производот на броевите $\overline{54a}$ и $\overline{63b1}$ да е делив со 12.

Решение. За да производот $\overline{54a}\cdot\overline{63b1}$ е делив со 12, треба да биде делив и со 3 и со 4. Бројот $\overline{63b1}$ е непарен број за секој избор на цифрата b па не може да е делив со 4, значи треба бројот $\overline{54a}$ да е делив со 4. Според признакот за деливост со 4, бројот $\overline{54a}$ е делив со 4 кога двоцифрениот завршеток $\overline{4a}$ е делив со 4, односно само кога $a=0$, $a=4$ или $a=8$.

Ако $a=0$, тогаш $\overline{54a}=540$ е број делив и со 3, па цифрата b може да биде било која цифра.

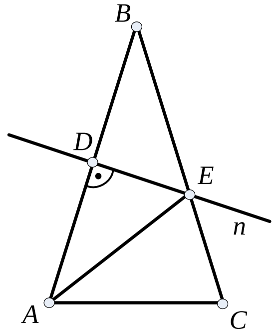
Ако $a=4$ или $a=8$, тогаш бројот $\overline{54a}=544$, односно бројот $\overline{54a}=548$ не е делив со 3, па производот $\overline{54a}\cdot\overline{63b1}$ е делив со 12 ако бројот $\overline{63b1}$ е делив со 3. Значи, треба збирот на неговите цифри $6+3+b+1=10+b$ да биде делив со 3, што е исполнето ако $b=2$, $b=5$ или $b=8$.

Според тоа, производот $\overline{54a}\cdot\overline{63b1}$ е делив со 12 ако $a=0$ и $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ или ако $a\in\{4,8\}$ и $b\in\{2,5,8\}$.

Задача 3. Во едно училиште се запишани 180 момчиња и 192 девојчиња. Од нив се формирани паралелки со еднаков број на ученици, така што бројот на момчиња во секоја од паралелките е еднаков. Во училниците каде ја посетуваат наставата има најмногу по 40 столчиња. По колку момчиња и девојчиња има во секоја од паралелките?

Решение. Нека x е бројот на паралелки. Бидејќи, во секоја од паралелките има по еднаков број на момчиња и сите паралелки се со еднаков број на ученици, следи дека во секоја од паралелките има и по еднаков број на девојчиња. Бројот на момчиња во секоја од паралелките е $m=180:x$, а бројот на девојчиња во секоја од паралелките е $d=192:x$. Значи, x е делител и на 180 и на 192. Од разложувањата $180=2\cdot2\cdot5\cdot3\cdot3$ и $192=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$, имаме дека $x\in\{1,2,4,6,12\}$. Да забележиме дека треба $m+d\leq40$, од каде заклучуваме дека и $m\leq40$ и $d\leq40$. Значи, $x\geq5$ (имено ако $x<5$, тогаш $m\geq180:4=45$ и $d\geq192:4=48$). Значи, останува $x\in\{6,12\}$. Ако $x=6$, тогаш $m=180:6=30$, $d=192:6=32$ и $m+d=62>40$. Ако $x=12$, тогаш $m=180:12=15$, $d=192:12=16$ и $m+d=31\leq40$. Значи, во секоја од паралелките има по 15 момчиња и по 16 девојчиња.

Задача 4. Нека е даден рамнокракиот триаголник ABC, каде $\overline{AB}=\overline{CB}$, со основа $\overline{AC}=10cm$. Низ средината D на кракот AB повлечена е нормала n на кракот AB која го сече кракот CB во точката E. Ако периметарот на триаголникот ABC е $40cm$, пресметај го периметарот на триаголникот AEC.

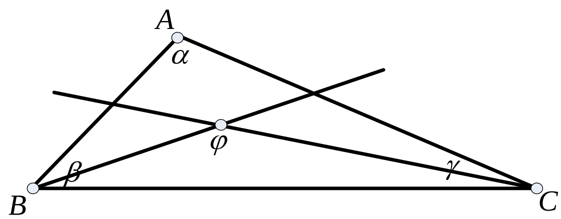


Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник ($\overline{AB}=\overline{CB}$), D средина на кракот AB, n нормала на AB низ D која го сече кракот CB во точката E (види цртеж) Од $\overline{AC}=10cm$ и $L_{ABC}=40cm$, следи дека должината на секој од краците е $\overline{AB}=\overline{CB}=(40-10):2=15cm$. Триаголниците ADE и BDE се складни (САС: $\overline{AD}=\overline{BD}$ од D средина на кракот AB, $\angle ADE=\angle BDE=90°$, $\overline{DE}$ заедничка страна). Од тука следува дека $\overline{AE}=\overline{BE}$. Па сега, периметарот на триаголникот AEC е

$$L_{AEC}=\overline{AE}+\overline{EC}+\overline{AC}=(\overline{BE}+\overline{EC})+\overline{AC}=\overline{BC}+\overline{AC}=15+10=25cm.$$

5. Одреди го аголот во триаголникот кој е за 20% помал од аголот меѓу симетралите на другите два агли на триаголникот.

Решение. Нека бараниот агол е α, а нека со φ го означиме аголот меѓу симетралите на другите два агли β и γ на триаголникот (види цртеж) Тогаш, од условот имаме дека



$$\alpha=80\%\varphi=\tfrac{80}{100}\varphi=\tfrac{4}{5}\varphi.$$

Од својството дека збирот на аглите во еден триаголник е $180°$, ги имаме следните равенства

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \text{ и } \varphi+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma=180°.$$

Со замена за $\alpha=\frac{4}{5}\varphi$ во првото равенство и разложување на собироци на истото, добиваме

$$(\tfrac{4}{5}\varphi+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)+(\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)=180°,$$

а со разложивање на собироци на второто равенство, добиваме

$$(\tfrac{4}{5}\varphi+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)+\tfrac{1}{5}\varphi=180°.$$

Од последните две равенства се согледува дека $\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{5}\varphi$. Од друга страна $\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=180°-\varphi$. Следува дека $\frac{1}{5}\varphi=180°-\varphi$, од каде $\frac{6}{5}\varphi=180°$, и конечно $\varphi=180°\cdot\frac{5}{6}=150°$. Тогаш, бараниот агол во триаголникот е $\alpha=\frac{4}{5}\varphi=\frac{4}{5}\cdot150°=120°$.

VII одделение

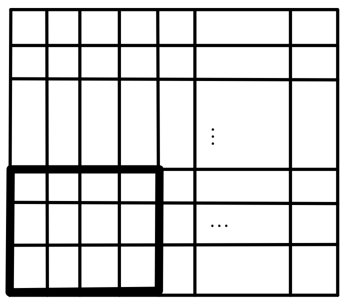
Задача 1. Одреди ја вредноста на бројниот израз

$$8004^2-8003^2+8002^2-8001^2+\ldots+4^2-3^2+2^2-1^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned}8004^2-8003^2+8002^2-8001^2+...+4^2-3^2+2^2-1^2=\\ &=(8004-8003)(8004+8003)+(8002-8001)(8002+8001)+...\\ &\quad+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1)\\ &=8004+8003+8002+8001+...+4+3+2+1\\ &=(8004+1)+(8003+2)+...+(4003+4002)\\ &=4002\cdot 8005=32036010.\end{aligned}$$

Задача 2. Од квадратен лист хартија, исшрафиран со цел број на единични квадрати (на листот нема делови од квадрати) исечен е квадрат со цел број на исти такви единични квадрати. Колку квадрати содржи првобитниот лист хартија ако бројот на преостанатите квадрати е 124?



Решение. Нека страната на листот е a единици. Толку и единични квадрати ќе има вдолж страната на листот. Значи се вкупно a^2 на број, бидејќи според условот на задачата на листот нема делови од единични квадрати. Нека е исечен квадрат како на цртежот и нека неговата страна е b, т.е. во него има b^2 единични квадрати. Ова значи дека за останатите 124 единични квадрати ќе важи

$$a^2-b^2=124 \text{ т.е. } (a-b)(a+b)=1\cdot 2\cdot 2\cdot 31.$$

Значи

$a-b=1,\ a+b=124$ или $a-b=2,\ a+b=62$ или $a-b=4,\ a+b=31.$ Бидејќи од првиот и третиот систем решенијата не се целобројни, следува дека решението е $a=32,\ b=30$, т.е. листот хартија содржи $32\cdot 32=1024$ квадрати.

Задача 3. За роденден принцезата Арабела добила прстен украсен со скапоцен камен. Каменот имал форма на квадар така што плоштината на трите ѕида на каменот се $1mm^2$, $3mm^2$, $12mm^2$ соодветно. Колку тежи каменот, ако се знае дека $1mm^3$ од него тежи 0,003 грама?

Решение. Да ги означиме со a, b, c должините на трите раба на каменот. Од условот на задачата имаме дека важи $a \cdot b = 1$, $b \cdot c = 3$ и $a \cdot c = 12$. Користејќи ги последните равенства добиваме дека,

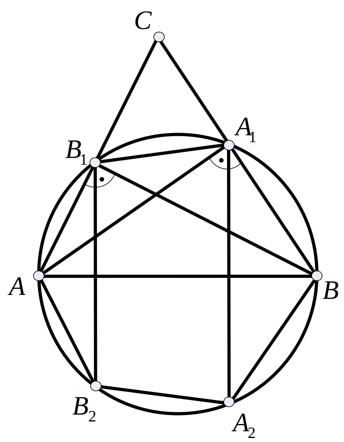
$$1 \cdot 3 \cdot 12 = (ab) \cdot (bc) \cdot (ca) = (abc) \cdot (abc) = V \cdot V = V^2,$$

каде V е волуменот на каменот, па од тука за волуменот на скапоцениот камен добиваме дека е $V = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6mm^3$. Конечно, бараната тежина на каменот е $6 \cdot 0,003 = 0,018$ грама.

Задача 4. На кружна патека долга 1650m се движат двајца мотоциклисти со постојана брзина. Ако моторциклистите се движат во спротивна насока ќе се сретнуваат секоја минута, а ако се движат во иста насока, тогаш моторциклистот кој се движи со поголема брзина ќе го престигнува другиот на секои 11 минути. Определи ги брзините на моторциклистите.

Решение. Нека v_1 е брзината со која се движи побрзиот, а v_2 е брзината на побавниот моторциклист. Од првиот услов (времето е 1 минута или 1/60 часа) имаме $v_1 \frac{1}{60} + v_2 \frac{1}{60} = \frac{1650}{1000}$, а од вториот (времето е 11 минути, или 11/60 часа) $v_1 \frac{11}{60} - v_2 \frac{11}{60} = \frac{1650}{1000}$. Добиваме систем од две линеарни равенки со две непознати: $v_1 + v_2 = 99$, $v_1 - v_2 = 9$, чие што решение е $v_1 = 54$ km/h, v_2 =45 km/h.

Задача 5. Нека е даден триаголникот ABC. Нека A_1 и B_1 се подножјата на висините повлечени од темињата A и B соодветно. Нека точките A_2 и B_2 се симетрични на точките A_1 и B_1 соодветно, во однос на отсечката AB. Докажи дека четириаголниците ABA_1B_1, AB_2A_2B и $A_1B_1A_2B_2$ се тетивни.



Решение. Нека е даден триаголникот ABC и нека A_1, B_1, A_2 и B_2 се точки кои го задоволуваат условот на задачата (види цртеж). Ако ја нацртаме кружницата со центар во средината на страната AB на триаголникот и радиус колку што е должината на половината на оваа страна, тогаш заради тоа што A_1 и B_1 се подножјата на висините повлечени од темињата A, односно B соодветно и Талесовата теорема, точките A_1 и B_1 лежат на нацртаната кружница. Точките A_2 и B_2 исто така лежат на кружницата бидејќи тие заради својата симетрија во однос на страната AB формираат тетиви во кружницата нормални на дијаметарот и преполовени од него. Па, бидејќи шесте точки кои ги формираат трапезите ABA_1B_1, AB_2A_2B и $A_1B_1A_2B_2$ лежат на истата кружница, следува дека истите се тетивни.

VIII одделение

Задача 1. Во соба се наоѓаат столици со 3 и столици со 4 ногарки. На секоја столица седи по еден човек, па така на подот има 69 нозе. Одреди го бројот на столиците со 3 и столиците со 4 ногарки.

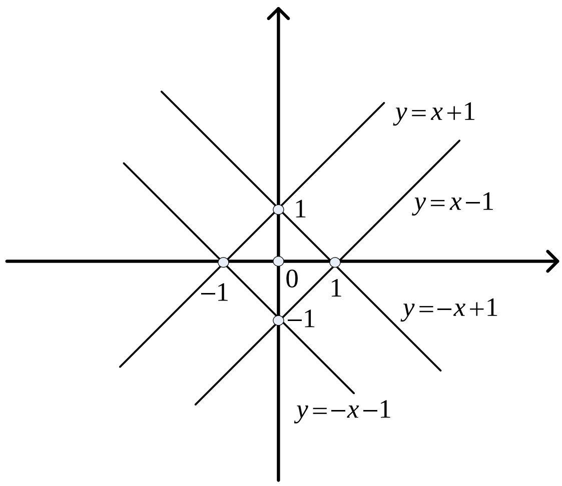
Решение. Нека x е бројот на столици со 3, а y бројот на столици со 4 ногарки. Од условот на задачата имаме $3x+4y+2(x+y)=69$, односно $5x+6y=69$. Решението го бараме во множеството природни броеви. Бидејќи, $6y$ е парен број, мора бројот x да биде непарен. Последното равенство го множиме со 2 и добиваме $10x+12y=138$, од каде $12y=138-10x$. Значи, $12y$ мора да завршува на 8 и x да е помал од 12. Од тука заклучуваме дека задачата има две решенија: $x=3, y=9$ или $x=9$, $y=4$.

Задача 2. Во правилен шестаголник чија страна е $a=2\text{cm}$, на случаен начин се распоредени 51 точка, при што некои се обоени во сина, а некои во црвена боја. Покажи дека постојат барем две точки во иста боја чие растојание не е поголемо од 1cm.

Решение. Повлекуваме отсечки кои го сврзуваат центарот на шестаголникот со неговите темиња. Шестаголникот е разделен на шест рамнострани триаголници со страна 2 *cm*. Во секој од овие триаголници ги повлекуваме средните линии, со што тие се делат на четири рамнострани триаголници со страна 1 *cm*. Растојанието меѓу кои било две точки од овие триаголници со страна 1 *cm* не е поголемо од 1 *cm*. Бројот 51 е непарен, па бројот на точки од една боја е поголем од бројот на точки од другата боја. Нека x е бројот на црвени точки и е поголем од бројот на сини точки.

Тогаш, $x > 51 - x$, од каде $2x > 51$, па $x > 25$. Бројот на рамностраните триаголници со страна 1 *cm* е 24, а бројот на црвени точки е поголем од 25, што значи дека во еден од овие триаголници има барем две црвени точки чие растојание не е поголемо од 1 *cm*.

Задача 3. Дадена е линеарната функција $y = kx + n$, каде што $k, n \in \{-1, 1\}$. Претстави ги графички сите линеарни функции $y = kx + n$ на ист координатен систем, а потоа пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со нив.



Решение. Функциите кои треба да се претстават се: $y = -x - 1$, $y = -x + 1$, $y = x - 1$, $y = x + 1$ (види цртеж). Ограничениот дел е квадрат со дијагонала $d = 2$, па бараната плоштина е $P = \frac{d^2}{2} = 2$ кв.ед.

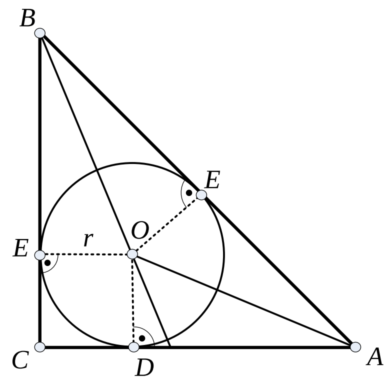
Задача 4. Иван замислил број. Бројот што го замислил е три пати помал од аритметичката средина на пет последователни парни броеви. 75% од вредноста на првиот број во низата парни последователни броеви е еднаква на аритметичката средина на првиот број од низата и бројот што го замислил Иван. Кој број го замислил Иван?

Решение. Нека x е бројот што го замислил Иван и нека низата од пет последователни парни броеви е y, $y+2$, $y+4$, $y+6$, $y+8$, каде y е парен број. Тогаш, од условите го добиваме системот $3x = \frac{y+(y+2)+(y+4)+(y+6)+(y+8)}{5}$, $\frac{75}{100}y = \frac{y+x}{2}$, од каде со средување се добива $3x = y + 4$, $3y = 2y + 2x$, односно $x = 4$, $y = 8$. Значи, Иван го замислил бројот 4.

Задача 5. Во рамнокракиот правоаголен триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) симетралата на аголот повлечена од темето B ја сече страната $\overline{AC}$ во точка D. Да се докаже дека должината на отсечката $\overline{AD}$ е еднаква на дијаметарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Решение. Нека $\overline{AC}=\overline{BC}=a$ и r е радиусот на впишаната кружница која ги допира страните $\overline{BC}$ и $\overline{AB}$ во точките E и F соодветно. Триаголниците AFO, FBO и OBE се складни, па следува дека

$$\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{BE}=a-r.$$



Според Питагоровата теорема, за хипотенузата на триаголникот ABC имаме $\overline{AB}=a\sqrt{2}.$ Од друга страна

$$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB},$$

па добиваме $2(a-r)=a\sqrt{2},$ односно $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$. Триаголниците OBE и DBC се слични, па следува дека $\frac{a-r}{a}=\frac{r}{\overline{CD}}$, од каде што $\overline{CD}=\frac{ar}{a-r}$. Тогаш, $\overline{DA}=a-\overline{CD}=a-\frac{ar}{a-r}=\frac{a(a-2r)}{a-r}$. Заменувајќи ја вредноста на $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$, добиваме

$$\overline{DA}=\frac{a(a-(2-\sqrt{2})a)}{a-\frac{2-\sqrt{2}}{2}a}=\frac{2a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}a=2r\ .$$