Сојузен натпревар 1970

II година

1. Определи три комплексни броја со модул 1 такви што и нивниот збир и нивниот производ е еднаков на 1.

Решение. Нека бараните броеви се z_1, z_2, z_3. Тогаш $z_1+z_2+z_3=1=z_1z_2z_3$ и

$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}+\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}+\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\overline{z_1+z_2+z_3}=1.$$

Според тоа, од Виетовите формули следува дека бараните броеви се решенија на равенката

$$z^3-z^2+z-1=0,$$

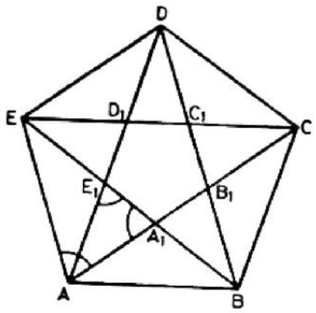
т.е. тоа се броевите $1, i$ и $-i$.

2. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$. Дијагоналите на овој петаголник формираат петаголник $A_1B_1C_1D_1E_1$ и петкрака ѕвезда.

а) Определи го збирот на аглите на петкраката ѕвезда во темињата A, B, C, D и E.

б) Ако дадениот петаголник $ABCDE$ е правилен, определи го односот на плоштините на тој петаголник и петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Решение. а) Збирот на внатрешните агли на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ е еднаков на $3\cdot180^\circ$, а збирот на внатрешните агли на десетаголникот AA_1B $B_1CC_1DD_1EE_1$ е еднаков на $8\cdot180^\circ$. Секој од аглите на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ собран со соодветниот агол на десетаголникот дава 360° *цртеж десно). Затоа бараниот збир на аглите на ѕвездата, кој е еднаков на збирот на аглите на десетаголникот во темињата A, B, C, D и E, е



$$8\cdot180^\circ+3\cdot180^\circ-5\cdot580^\circ=180^\circ.$$

Забелешка. Бараниот збир може да се пресмета ако од збирот на аглите на петаголникот $ABCDE$ кој е еднаков на $3\cdot180^\circ$ се одземе разликата на збирот на аглите на триаголниците $ABA_1, BCB_1, CDC_1, DED, EAA_1$ и збирот на аглите на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ која е еднаква на $5\cdot180^\circ-3\cdot180^\circ=2\cdot180^\circ$. Конечно, бараниот збир е еднаков на $3\cdot180^\circ-2\cdot180^\circ=180^\circ$.

б) Ако петаголникот $ABCDE$ е правилен, тогаш е симетричен во однос на симетралата на секој од своите агли, па затоа $AA_1=AE_1=EE_1$, $AC\parallel ED$ и

$\measuredangle AA_1E = \measuredangle A_1ED = \measuredangle CEA = \measuredangle EAA_1$. Според тоа, триаголникот AEA_1 е рамнокрак. Да означиме $AE = a$ и $A_1E_1 = x$. Тогаш од сличноста на рамнокраките триаголници A_1AE_1 и A_1EA (еднакви агли на основата) добиваме $AA_1 : A_1E_1 = A_1E : AA_1$, т.е.

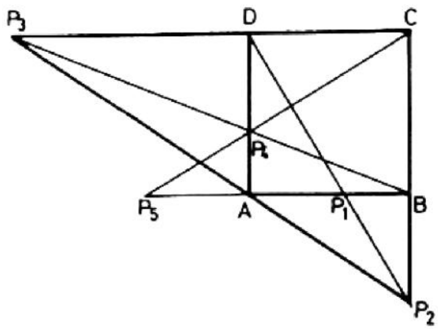
$$(a-x):x = a:(a-x).$$

Решавајќи ја последната равенка по x и земајќи предвид дека $x<a$ добиваме $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$. Петаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ се слични, па затоа односот на нивните плоштини е

$$S:S_1 = (\tfrac{a}{x})^2 = (\tfrac{2}{3-\sqrt{5}})^2 = (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})^2 = \tfrac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

3. Даден е квадрат $ABCD$. Нека P_1 е произволна внатрешна точка на страната AB, P_2 е пресек на правите DP_1 и BC, P_3 епресек на правите AP_2 и CD, P_4 е пресек на правите BP_3 и DA, P_5 е пресек на правите CP_4 и AB, а точките $P_6, P_7, ..., P_{13}$ понатаму се конструирани според истата постапка. Докажи дека $P_{13} = P_1$.

Решение. Прво ќе докажеме дека точката P_4 е меѓу точките D и A (цртеж десно).



Бидејќи точката P_1 е меѓу точките A и B, таа е меѓу паралелните прави AD и BC, па затоа е меѓу D и P_2. Понатаму, од $AB \| CD$ следува дека B е меѓу C и P_2, па затоа P_2 е од онаа страна на правата AB на која не е правата CD. Значи, A е меѓу P_2 и P_3. Од паралелните прави AD и BC следува дека D е меѓу P_3 и C, па добоиваме дека P_4 е меѓу P_3 и B. Значи, P_4 е меѓу правите AB и CD, па затоа е меѓу точките A и D.

Сега ќе докажеме дека $AP_1 : P_1B = DP_4 : P_4A$.

Од сличноста на триаголниците AP_1D и BP_1P_2 следува

$$AP_1 : P_1B = DA : BP_2 = CB : BP_2,$$

а од паралелноста на правите AD и P_2C следува

$$CB : BP_2 = DP_4 : P_4A.$$

Конечно, од горните две равенства следува $AP_1 : P_1B = DP_4 : P_4A$.

Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека точката P_7 е меѓу точките D и C и дека $CP_7 : P_7D = AP_1 : P_1B$, потоа дека точката P_{10} и меѓу точките C и B и дека $BP_{10}:P_{10}C=AP_1:P_1B$ и најпосле дека точката P_{13} е меѓу точките A и B и дека $AP_{13}:P_{13}B=AP_1:P_1B$. Последното е можно само ако $P_{13}=P_1$.

4. Нека се $a,a_1,a_2,...,a_m$ цели броеви, а n е природен број. Докажи дека:

а) $a(a^{2n}-1)$ е делив со 6,

б) збирот $S'=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+...+a_m^{2n+1}$ е делив со 6 ако и само ао збирот $S=a_1+a_2+...+a_m$ е делив со 6.

Решение. а) Од

$$a(a^{2n}-1)=a(a-1)(a+1)(a^{2n-2}+a^{2n-4}+...+1)$$

следува дека дадениот број е делив со производ на три последователни цели броја, па затоа е делив со 6.

б) Важи

$$S'-S=a_1(a_1^{2n}-1)+a_2(a_2^{2n}-1)+...+a_m(a_m^{2n}-1)\,.$$

Според а) секој од собироците на десната страна е делив со 6, па затоа $S'-S$ е делив со 6, т.е. S' е делив со 6 ако и само ако S е делив со 6.

III година

1. Дадена е елипса $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, која права p паралелна со оската Oy ја сече во точките M и N, при што M има позитивна, а N негативна ордината. Определи го геометриското место на пресечната точка P на правите AM и BN и пресечната точка Q на правите AN и BM, каде $A(-a,0)$ и $B(a,0)$ се темињата на елипсата, кога правата p се движи останувајќи паралелна со оската Oy.

Решение. Нека правата p има равенка $x=t,-a<t<a$. Тогаш точките M и N имаат координати $(t,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2})$ и $(t,-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2})$. Правите AM и BN имаат равенки

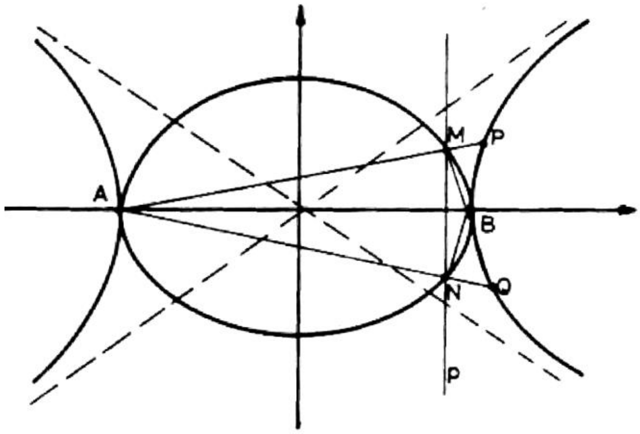
$$y=\tfrac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\tfrac{x+a}{t+a} \text{ и } y=\tfrac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\tfrac{x-a}{a-t}\,.$$

Во нивната пресечна точка е $\frac{x+a}{t+a}=\frac{x-a}{a-t}$, од каде добиваме $x=\frac{a^2}{t}$ (случајот $t=0$ се исклучува, бидејќи правите AM и BN се паралелни). Значи, точката P има координати

$$x=\tfrac{a^2}{t},\ y=\tfrac{b}{t}\sqrt{a^2-t^2}\,,\qquad (-a<t<a,\ t\neq 0).$$

Со елиминација на параметарот t се добива

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (xy>1),$$



т.е. точката P припаѓа на еден од лаците на оваа хипербола во првиот или третиот квадрант. Со обратната постапка се докажува дека секоја точка од ови лаци може да се добие на опишаниот начин.

Слично се докажува дека геометриското место на точките Q е унија на лаците на хиперболата во вториот и четвртиот квадрант.

2. Ако a,b,c е страните на триаголникот ABC, а α,β,γ се неговите агли, докажи го равенството

$$(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\cos\alpha+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\cos\gamma+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a})\cos\beta=3.$$

Решение. Од косинусната теорема имаме:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \ \cos\lambda=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}&(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\cos\alpha+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\cos\gamma+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a})\cos\beta=\\ &=(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a})\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ &=\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2c^2}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2}+\frac{(c^2+a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2c^2a^2}=3\end{aligned}$$

3. Во координатната рамнина xOy нацртана е целобројна координатна мрежа. Отсечката (p) во таа рамнина е определна со

$$(p) \qquad\qquad 7x-3y-5=0, \quad 0\le x\le 100.$$

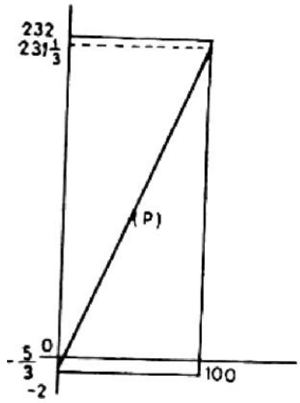
Определи го бројот на квадратите на оваа мрежа во кои има точки од отсечката (p).

Решение. Прво да го определиме бројот на јазлите низ кои минува дадената отсечка. За таа цел треба да ги определиме целобројните решенија на равенката

$7x-3y-5=0$ при услов $0\leq x\leq 100$. Сите решенија на дадената равенка се дадени со

$$x=5+3t,\ y=10+7t,\ t\in\mathbb{Z}.$$

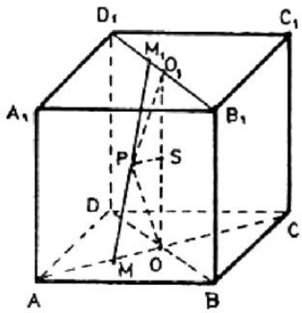
За да е $0\leq x\leq 100$ треба да важи $-1\leq t\leq 31$. Според тоа, отсечката (p) минува низ 33 јазли на координатната мрежа.



Гледано од лево на десно, при секое пресекување на некоја линија на координатната мрежа, отсечката (p) „влегува“ во нов квадрат. Единствено при „преминот“ низ јазол таа пресекува две линии, а „влегува“ во еден нов квадрат. Затоа бројот на бараните квадрати е еднаков на бројот на пресеците на отсечката со линиите на мрежата, намален за бројот на јазлите низ кои таа минува, т.е. на $100+234-33=301$.

4. Определи го геометриското место на средините на отсечките со дадена должина c, чии крајни точки се движат по разминувачките дијагонали на горната и долната основа на дадена коцка со раб a ($a<c<a\sqrt{2}$).

Решение. Дадената коцка да ја означиме со $ABCDA_1B_1C_1D_1$, правите определени со дијагоналите AC и B_1D_1 со p и p_1, средините на основите со O и O_1, а крајните точки на дадената отсечка со M и M_1, при што $M\in p$ и $M_1\in p_1$. Понатаму, нека S и P се средините на отсечките OO_1 и MM_1, цртеж десно. Правата p е нормална на рамнината на дијагоналниот пресек BB_1D_1D, па затоа е нормална и на правата OM_1 во таа рамнина. Затоа триаголникот MOM_1 е правоаголен, а P е средина на неговата хипотенуза MM_1, па е $OP=\frac{MM_1}{2}=\frac{c}{2}$. Слично се докажува дека $O_1P=\frac{c}{2}$. Значи, триаголникот OO_1P е рамнокрак, а S е средина на неговата основа, па е PS негова висина. Според тоа, средината на отсечката MM_1 припаѓа на кружницата која е во рамнината паралелна со основите, чиј центар е точката S, а радиусот е еднаков на $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2}$.



Ќе докажеме дека споменатата кружница е бараното геометриско место, т.е. дека секоја нејзина точка е средина на некоја отсечка со должина c и крајни точки на правите p и p_1. Нека P е произволна точка од оваа кружница. Нека рамнината определена со правата p и точката P ја сече правата p_1 во точка M_1, а рамнината определена со правата p_1 и точката P ја сече правата p во точка M (овие пресеци секогаш постојат). Првата од овие рамнини ја содржи нормалата p на дијагоналниот пресек BDD_1B_1 на дадената коцка, па затоа е нормална на тој пресек. Затоа триаголникот MOM_1 е правоаголен, а точката P е средина на неговата хипотенуза, бидејќи се наоѓа во рамнина во однос на која рамнините на основите на коцката се симетрични. Од правоаголниот триаголник PSO во кој катетите се $PS=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2}$ и $SO=\frac{a}{2}$ се добива $OP=\frac{c}{2}$, па затоа $PM=PM_1=\frac{c}{2}$, што значи дека P е средина на отсечката MM_1 со должина c и крајни точки на правите p и p_1.

IV година

1. Определи кој број е поголем $\log_3 4$ или $\log_4 5$.

Решение. Од неравенството емѓу средините следува

$$\log_4 5\cdot\log_4 3\le\left(\frac{\log_4 5+\log_4 3}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2<1,$$

па затоа

$$\log_4 5<\frac{1}{\log_4 3}]\log_3 4.$$

2. Членовите на аритметичката прогресија $1,1+2n,1+4n,\dots\ (n\in\mathbb{N})$ ги групираме редоследно во групи, така што во првата група го ставаме првиот член, во втората група ги ставаме следните $1+n$ членови, во третата група ги ставаме следните $1+2n$ членови итн. Докажи дека збирот на сите членови во секоја група е еднаков на третиот степен на бројот на членовите во таа група.

Решение. Групата која е $k-$та по ред има $1+(k-1)n$ членови. Првите k групи имаат вкупно

$$\sum_{i=1}^{k}(1+(i-1)n)=k+\frac{(k-1)k}{2}n$$

членови. Затоа првиот член на $(k+1)-$та група е

$$a=1+\left(k+\frac{(k-1)k}{2}n\right)\cdot 2n=1+2kn+(k-1)kn^2,$$

а нејзиниот последен член е

$$b=a+kn\cdot 2n=1+2kn+k(k+1)n^2.$$

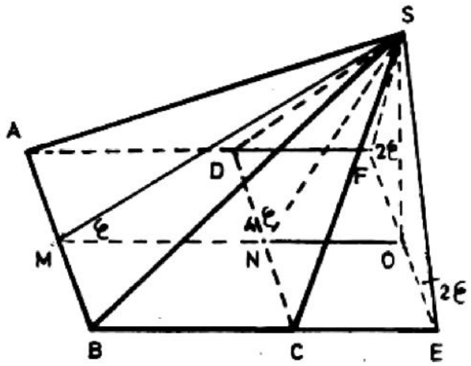
Според тоа, збирот на сите членови на оваа група е еднаков на

$$(1+kn)\frac{a+b}{2}=(1+kn)(1+2kn+k^2n^2)=(1+kn)^3,$$

што и требаше да се докаже.

3. Основата на пирамидата е квадрат. Нагибните агли на бочните ѕидови на пирамидата спрема основата се однесуваат редоследно како $1:2:4:2$. Определи ги овие агли.

Решение. Нека $ABCD$ е основата, а S е врвот на пирамидата. Нагибните агли на бочните ѕидови SAB, SBC, SCD, SDA нека се $\varphi, 2\varphi, 4\varphi, 2\varphi$. Со a да ја означиме страната на основата, а ос H висината на пирамидата (цртеж десно). Прво да претпоставиме дека $\frac{\pi}{2} < 4\varphi < \pi$ (покасно ќе докажеме дека не може да е $4\varphi \le \frac{\pi}{2}$).



Рамнината која го содржи врвот на пирамидата и е нормална на правите BC и DA ги сече овие прави надвор од отсечките BC и DA, тие пресеци да ги означиме со E и F. Пресеците на рамнината низ S нормална на AB и CD, со тие прави да ги означиме со M и N (овие точки припаѓаат на AB и CD, соодветно). Овие рамнини ја содржат висината на пирамидата чие подножје го означуваме со O. По претпоставка имаме

$$\measuredangle SMN = \varphi,\ \measuredangle SEF = \measuredangle SFE = 2\varphi,\ \measuredangle SNM = 4\varphi.$$

Од соодветните правоаголни триаголници добиваме

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{OM}{H},\ \operatorname{ctg}2\varphi = \frac{OE}{H} = \frac{a}{2H},\ \operatorname{ctg}4\varphi = -\frac{ON}{H}\ ,$$

односно

$$\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}4\varphi = \frac{OM - ON}{H} = \frac{MN}{H} = \frac{a}{H} = 2\operatorname{ctg}2\varphi\ .$$

Оваа равенка за $\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ редоследно се трансформира во следните на неа еквивалентни равенки

$$\operatorname{ctg}4\varphi - \operatorname{ctg}2\varphi = \operatorname{ctg}2\varphi - \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\frac{\sin(4\varphi - 2\varphi)}{\sin 4\varphi \sin 2\varphi} = \frac{\sin(2\varphi - \varphi)}{\sin 2\varphi \sin\varphi},$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi,$$

па е $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Значи, бараните агли се $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

Ќе докажеме дека не може да е $4\varphi \le \frac{\pi}{2}$. Навистина ако тоа е случај, со слична постапка како претходно се добива дека φ треба да ја задоволува равенката $\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}4\varphi = 2\operatorname{ctg}2\varphi$, која нема решенија за кои $0 < \varphi \le \frac{\pi}{8}$.

4. Ако p е прост број, докажи дека $N = \frac{(2p)!}{(p!)^2} - 2$ е делив со p^2.

Решение. За секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$(1+x)^p(1+x)^p=(1+x)^{2p}.$$

Ако изразите во горното равенство ги развиеме по биномната формула и ги изедначиме коефициентите пред x^p добиваме

$$1+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\binom{p}{2}\binom{p}{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}\binom{p}{1}+1=\binom{2p}{p},$$

односно

$$N=\frac{(2p)!}{(p!)^2}-2=\binom{2p}{p}-2=\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2.$$

Бидејќи p е прост број, секој од броевите $\binom{p}{i}=\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!}$ е делив со p, па затоа збирот на десната страна на последното равенство е делив со p^2, што значи $p^2\mid N$.

Мала олимпијада

1. Природните броеви a и b имаат во декаден запис по n цифри. Нека $\frac{n}{2}<m<n$ и нека секоја од првите m цифри на бројот a (сметајќи од лево кон десно) е еднаква на соодветните цифри на бројот b. Докажи дека $a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}$.

Решение. Можеме да претпоставиме дека $n\geq 2$ и $a>b$ (останатите случаи се тривијални). Од условот на задачата непосредно следува

$$a-b<10^{\frac{n-1}{2}}.$$

Од друга страна, важи $a>b\geq 10^{n-1}$, па затоа $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}\geq 10^{\frac{n-1}{n}}$. Затоа

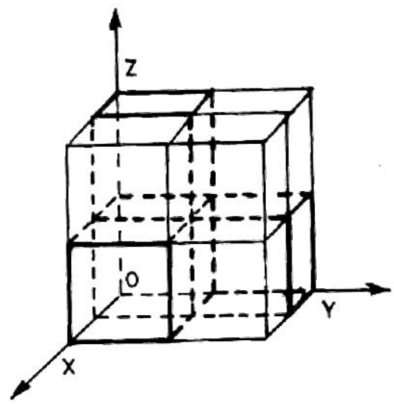
$$a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}=\frac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+\ldots+b^{\frac{n-1}{n}}}<\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{n\cdot 10^{\frac{(n-1)^2}{n}}}=\frac{10^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2n}}}{n}\leq\frac{1}{n}.$$

2. Во коцка или на нејзината површина размести темиња на триаголник, така што неговата најмала страна ќе биде што е можно поголема.

Решение. Нека должината на работ на коцката K е еднаква на 2. Воведуваме правоаголен координатен систем таков што точките $O(0,0,0)$, $X(2,0,0)$, $Y(0,2,0)$ и $Z(0,0,2)$ се темиња на коцката. Триаголникот XYZ се содржи во коцката и важи

$$XY=YZ=ZX=2\sqrt{2}.$$

Нека претпоставиме дека триаголникот ABC се содржи во дадената коцка K. Рамнините $x=1, y=1, z=1$ ја делат коцката на осум коцки со раб 1. Овие осум коцки имаат заедничко теме $(1,1,1)$, некои од овие коцки имаат заеднички раб, а некои заеднички ѕид (цртеж десно). Да разгледаме две од овие коцки чија единствена заедничка точка е темето $(1,1,1)$. Секоја од останатите шест коцки има заеднички ѕид со една од овие две коцки. Оттука следува дека: Ако постојат две единечни коцки чија единствена заедничка точка е темето $(1,1,1)$, така што секоја од нив содржи барем едно теме на триаголникот ABC, тогаш некои две од единичните точки имаат заедничка страна и содржат барем две од темињата на триаголникот ABC, на пример, A и B. Тогаш



$$\min\{AB,BC,CA\}\le AB\le\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<2\sqrt{2}\ .$$

Останува да го разгледаме случајот кога секој квадар кој е формиран од две единечни коцки со заедничка страна содржи најмногу едно теме на триаголникот ABC. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$A\in\{(1+x,y,z)\mid 0\le x\le1, 0\le y\le1, 0\le z\le1\},$$
$$B\in\{(a,1+b,c)\mid 0\le a\le1, 0\le b\le1, 0\le c\le1\},$$
$$C\in\{(p,q,1+r)\mid 0\le p\le1, 0\le q\le1, 0\le r\le1\}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=(1+x-a)^2+(y-1-b)^2+(z-c)^2\\&\quad+(a-p)^2+(1+b-q)^2+(c-1-r)^2\\&\quad+(p-1-x)^2+(q-y)^2+(1+r-z)^2\\&=S_1+S_2+S_3\end{aligned}$$

каде

$$\begin{aligned}S_1&=(1+x-a)^2+(p-1-x)^2+(a-p)^2,\\S_2&=(y-1-b)^2+(1+b-q)^2+(q-y)^2,\\S_3&=(1+r-z)^2+(c-1-r)^2+(z-c)^2.\end{aligned}$$

Бидејќи $x,a,p\in[0,1]$, важи $|x-a|\le1, |a-p|\le1, |p-x|\le1$, па затоа

$$\begin{aligned}S_1&=2+(x-a)^2+(a-p)^2+(p-x)^2+4x-2a-2p\\&\le2+|x-a|+|a-p|+|p-x|+4x-2a-2p.\end{aligned}$$

Нека $a\le p$ (аналогно се разгледува случајот $p\le a$). Ако $x\le a\le p$, тогаш

$$S_1\le2+(a-x)+(p-a)+(p-x)+4x-2a-2p=2+2x-2a\le4\ .$$

Ако $a<x\le p$, тогаш

$$S_1 \leq 2+(x-a)+(p-a)+(p-x)+4x-2a-2p=2+4x-4a \leq 6.$$

Ако $a \leq p < x$, тогаш

$$S_1 \leq 2+(x-a)+(p-a)+(x-p)+4x-2a-2p=2+6x-4a-2p \leq 8.$$

Во секој случај важи $S_1 \leq 8$ и аналогно $S_2 \leq 8, S_3 \leq 8$. Според тоа,

$$AB^2+BC^2+CA^2 \leq 24.$$

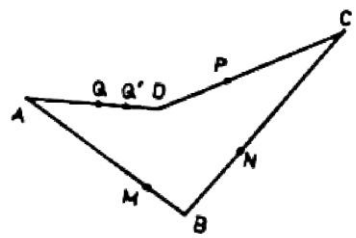
Затоа барем еден од броевите AB^2, BC^2, CA^2 е помал или еднаков на 8, па затоа

$$\min\{AB, BC, CA\} \leq 2\sqrt{2}.$$

Равенство се достигнува ако $x=1, a-p=0, b=1, y=q=0, r=1, z=c=0$, т.е. ако $A=X, B=Y, C=z$. Според тоа, максимумом M на множеството кое ги содржи сите броеви од видот $\min\{AB, BC, CA\}$, каде ABC е триаголник кој се содржи во коцката K е еднаков на $2\sqrt{2}$ единици должина.

3. Ако сите страни на просторниот четириаголник допираат сфера, тогаш сите четири допирни точки припаѓаат на една рамнина. Докажи!

Решение. Ако дадениот четириаголник е рамнински, тогаш тврдењето на задачата е тривијално. Нека претпоставиме дека четириаголникот не е рамнински.



Нека четириаголникот е $ABCD$, а допирните точки на четириаголникот со сферата се M, N, P, Q (цртеж десно). Нека α е рамнината определена со точките M, N и P. Јасно, таа не содржи ниту едно теме на дадениот четириаголник (ако, на пример, го содржи темето A, тогаш ќе ја содржи правата AM, па и точката B, а потоа, слично, точките C и D, па четириаголникот ќе биде рамнински). Точките A и B се на различни страни од таа рамнина, исто важи за точките B и C, како и за точките C и D. Затоа и точките D и A се на различни страни од рамнината α, што значи дека отсечката DA ја сече рамнината во некоја точка Q' (види цртеж). Ако со h_A, h_B, h_C, h_D ги означиме растојанијата од точките A, B, C, D до рамнината α, тогаш

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ'}{Q'A} = \frac{h_A}{h_B} \cdot \frac{h_B}{h_C} \cdot \frac{h_C}{h_D} \cdot \frac{h_D}{h_A} = 1.$$

Од друга страна, отсечките AM и AQ се еднакви, како тангентни отсечки на дадената сфера. Исто така $BM=BN, CN=CP, DP=DQ$, па затоа

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1.$$

Од добиените релации следува $\frac{DQ'}{Q'A} = \frac{DQ}{QA}$, што е можно само ако $Q \equiv Q'$. Со тоа е докажано дека точките M, N, P, Q припаѓаат на рамнината α.