X олимпијада

1. Докажи дека постои само еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. I *начин.* Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ и како $\beta=2\alpha$, $\gamma=\pi-3\alpha$, добиваме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{c}{\sin 3\alpha}$. Затоа $b>a$.

Воведуваме ознака $\frac{a}{\sin\alpha}=\lambda$. Тогаш од равенствата

$$a^2=\lambda^2\sin^2\alpha,\ b^2=\lambda^2\sin^2 2\alpha,\ c^2=\lambda^2\sin^2 3\alpha$$

добиваме

$$b^2-a^2=\lambda^2(\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha),\ ac=\lambda^2\sin\alpha\sin 3\alpha.$$

Од идентитетот

$$\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha=\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha,$$

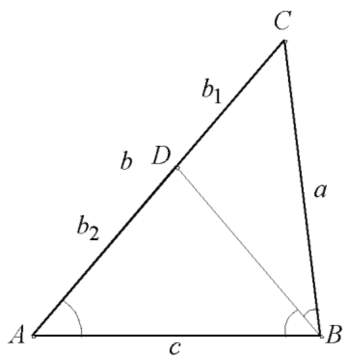
следува дека за бараниот триаголник е исполнето равенството $b^2-a^2=ac$ или $b^2=a(a+c)$. Според тоа, можни се следните случаи:

1) $a=n, b=n+1, c=n+2$. Тогаш $(n+1)^2=n(2n+2)$, т.е. $n^2-1=0$, од каде што $n=1$ и $a=1, b=2, c=3$, т.е. се добива дегенериран триаголник.

2) $a=n, b=n+2, c=n+1$. Тогаш $(n+2)^2=n(2n+1)$, т.е. $n=4$ и $a=4$, $b=6, c=5$, и тоа е решение на задачата.

3) $c=n, a=n+1, b=n+2$, од каде што $n^2-n+3=0$, а оваа равенка нема целобројни решенија.

Останува да докажеме дека триаголникот со должини на страни $a=4,\ b=6$, $c=5$ ги задоволува условите на задачата. Ќе покажеме дека $\beta=2\alpha$. Од косинусната теорема имаме $\cos\beta=\frac{1}{8}, \cos\alpha=\frac{3}{4}$ па затоа $\cos 2\alpha=\cos\beta$, т.е. $\beta=2\alpha$.



II *начин.* Нека $b>a$. Повлекуваме симетрала BD на аголот β и воведуваме ознаки $\overline{CD}=b_1$ и $\overline{DA}=b_2$. Тогаш $\triangle ABC\sim\triangle BDC$ и заради тоа $\frac{c}{b_2}=\frac{a}{b_1}=\frac{b}{a}$, од каде што добиваме $c=\frac{bb_2}{a}$, $a=\frac{bb_1}{a}$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$c+a=(b_1+b_2)\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a}$$

каде $c+a$ е цел број.

Според условот на задачата, должините на страните мора да бидат последователни цели броеви, па затоа $b=a+1$ или $b=a+2$.

1) $b=a+1$, $\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+2a+1}{a}=a+2+\frac{1}{a}$, па затоа $a=1, b=2, c=3$, и овој триаголник е дегенериран.

2) $b=a+2$, $\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+4a+4}{a}=a+4+\frac{4}{a}$, па затоа $a\,|\,4$, т.е. $a=1$ или $a=2$ или $a=4$. Ако $a=1$, тогаш $b=3$ и $c=\frac{b^2}{a}-a=8$, а триаголник со такви страни не постои. Ако $a=2$, тогаш $b=4$ и $c=6$, и овој триаголник е дегенериран. Ако $a=4$, тогаш $b=6$ и $c=5$, што е решение на задачата.

Понатаму, решението на задачата е како при првиот начин на решавање.

2. Определи ги сите природни броеви x чиј производ на цифри (во декаден запис) е еднаков на $x^2-10x-22$.

Решение. Бидејќи производот на цифрите е ненегативен добиваме

$$x^2-10x-22\ge 0,$$

од што следува

$$x\ge 5+\sqrt{47}>11.$$

Понатаму, производот на цифрите на секој природен број не е поголем од самиот број. Имено, за секој $x=\overline{a_1a_2...a_n}$, важи

$$a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n\le a_1\cdot 9^{n-1}<a_1\cdot 10^{n-1}\le a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_n=x.$$

Според тоа

$$x^2-10x-22<x,$$

од што следува

$$x<\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{209}}{2}<13.$$

Значи бројот x ги задоволува неравенствата $11<x<13$, па единствена можност е $x=12$. Со непосредна проверка се уверуваме дека бројот 12 ги задоволува условите на задачата.

3. Даден е системот равенки

$$\begin{aligned}
&ax_1^2+bx_1+c=x_2\\
&ax_2^2+bx_2+c=x_3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n\\
&ax_n^2+bx_n+c=x_1
\end{aligned}$$

каде $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\ne 0$. Докажи а) ако $(b-1)^2-4ac<0$, тогаш системот нема реално решение;

б) ако $(b-1)^2-4ac=0$, тогаш системот има точно едно реално решение;

в) ако $(b-1)^2-4ac>0$, тогаш системот има повеќе од едно реално решение.

Решение. Нека $y_k=x_{k+1}-x_k$, $i=1,2,...,n$, $x_{n+1}=x_1$. Тогаш

$$y_k=ax_k^2+(b-1)x_k+c \text{ и } \sum_{k=1}^{n} y_k=0$$

а) Ако $(b-1)^2-4ac<0$, тогаш полиномот $ax^2+(b-1)x+c$ нема реални корени и прима вредности со ист знак, т.е. $y_k<0$ или $y_k>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$, па според тоа $\sum_{k=1}^{n} y_k\neq 0.$ Затоа системот нема реални решенија.

б) Ако $(b-1)^2-4ac=0$, полиномот $ax^2+(b-1)x+c$ има еден единствен корен и при тоа или сите $y_k\leq 0$ или сите $y_k\geq 0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Бидејќи $\sum_{k=1}^{n} y_k=0$ добиваме

$$y_k=ax_k^2+(b-1)x_k+c=0 \text{, за } k=1,2,...,n \text{, и } x_1=x_2=...=x_n=x_0,$$

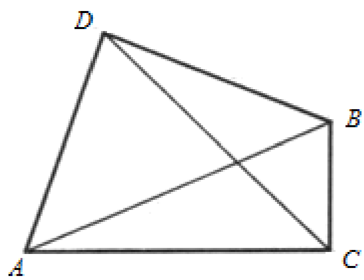
каде што x_0 е единственото решение на равенката $ax^2+(b-1)x+c=0$. Значи, во овој случај системот има единствено решение $x_k=x_0$, $k=1,2,...,n$.

в) Ако $(b-1)^2-4ac>0$, тогаш системот има барем две различни решенија, $x_k=x_0'$ и $x_k=x_0''$, каде x_0', x_0'' се решенија на равенката $ax^2+(b-1)x+c=0$.

4. Докажи дека во секој тетраедар постои теме, такво што со рабовите кои излегуваат од него може да се конструира триаголник.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот тетраедар и нека AB е работ со најголема должина. Тогаш од несрвбенството на триаголник применето на триаголниците ABC и ABD следува

$$\begin{aligned}&(\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{AB})+(\overline{BC}+\overline{BD}-\overline{BA})=\\&(\overline{AC}+\overline{CB}-\overline{AB})+(\overline{AD}+\overline{DB}-\overline{AB})>0\end{aligned}.$$



Од последнот неравенство следува дека $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{AB}$ или $\overline{BC}+\overline{BD}>\overline{BA}$. Според тоа, од рабовите AC, AD, AB или од рабовите $BC, BD.BA$ се формира триаголник (останатите неравенства за триаголник се исполнети бидејќи AB е работ со најголема должина).

5. Нека $a>0$ е реален број и $f(x)$ е реална функција дефинирана за секој $x\in\mathbb{R}$ таква што

$$f(x+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\text{, за секој } x\in\mathbb{R}.$$

а) Докажи дека функцијата f е периодична, т.е. дека постои реален број $b>0$ таков што за секое $f(x+b)=f(x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) За $a=1$ најди пример на таква функција f, $f\not\equiv\text{const}$.

Решение. а) За функцијата f исполнето е

$$\begin{aligned}f(x+2a)=f[(x+a)+a]&=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}\\&=\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-(\tfrac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}+f(x)-[f(x)]^2))^2\\&=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}=\tfrac{1}{2}+|f(x)-\tfrac{1}{2}|.\end{aligned}$$

Но, бидејќи

$$f(x)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\geq\tfrac{1}{2}$$

тогаш $f(x+2a)=f(x)$, т.е. $b=2a$.

б) За $a=1$ $(b=2)$ дадениот услов го задоволува, на пример периодичната непрекината функција

$$f(x)=\tfrac{1}{2}(1+|\cos\tfrac{\pi x}{2}|).$$

Друга таква функција е

$$f(x)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}+c(x-2n), & 2n\leq x<2n+1,\\ \tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-c^2(x-2n-1)^2}, & 2n+1\leq x<2n+2,\end{cases}\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

6. Нека $n\in\mathbb{N}$. Пресметај го збирот

$$[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+\dots+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+\dots.$$

Решение. I *начин.* Прво ќе го докажеме идентитетот

$$[x+\tfrac{1}{2}]=[2x]-[x].\qquad(1)$$

Доказ. Секој реален број x може да се запише во облик $x=k+\alpha$ или $x=k+\tfrac{1}{2}+\alpha$ каде што $k\in\mathbb{Z}$ и $0\leq\alpha<\tfrac{1}{2}$.

Ако $x=k+\alpha$, тогаш

$$[k+\alpha+\tfrac{1}{2}]=k;\ [2k+2\alpha]=2k;\ [k+\alpha]=k,$$

т.е.

$$[x+\tfrac{1}{2}]=[2x]-[x].$$

Ако $x = k + \alpha + \frac{1}{2}$, тогаш

$$[k+\alpha+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}] = k+1\,;\ [2k+2\alpha+1] = 2k+1\,;\ [k+\alpha+\tfrac{1}{2}] = k\,,$$

т.е.

$$[x+\tfrac{1}{2}] = [2x]-[x]\,. \ \blacksquare$$

Да го примениме идентитетот на бараниот збир. Имаме

$$[\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{n}{4}+\tfrac{1}{2}]+....+[\tfrac{n}{2^{k+1}}+\tfrac{1}{2}]+... = [n]-[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2}]-[\tfrac{n}{4}]+...+[\tfrac{n}{2^k}]-[\tfrac{n}{2^{k+1}}]+.. = n$$

бидејќи почнувајќи од $k = [\log_2 n]+1$ сите собирци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

II *начин.* Нека $n = \overline{x_m x_{m-1} ... x_1 x_0} = \sum_{k=0}^{m} 2^i x_i$, $x_i \in \{0.1\}$ е запис на бројот n во бинарен броен систем. Тогаш

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] = [\tfrac{n}{2^{k+1}}+\tfrac{1}{2}] = [\sum_{k=0}^{m} 2^{i-k-1} x_i + 2^{-1}],$$

па затоа важи

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] = \begin{cases} \overline{x_m x_m ....x_{k+1}} + x_k, & k < m \\ x_m, & k = m \\ 0, & k > m \end{cases}$$

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] &= (\overline{x_m x_{m-1} ... x_1} + x_0) + (\overline{x_m x_{m-1} ... x_2} + x_1) + ... + (x_m + x_{m-1}) + x_m \\ &= x_m (2^{m-1} + ... + 2^0 + 1) + x_{m-1}(2^{m-2} + ... + 2^0 + 1) + ... + x_1(2^0 + 1) + x_0 \\ &= 2^m x_m + 2^{m-1} x_{m-1} + ... + 2x_1 + x_0 = n. \end{aligned}$$