Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година

Једна неједнакост и њене примене

***Драгољуб Милошевић,* Горњи Милановац**

Нека је $x, y, z > 0$ и $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тада важи:

$$(*) \qquad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\\
\Leftrightarrow\ &(x+y+z)(a^2yz + b^2xz + c^2xy) \geqslant xyz(a+b+c)^2\\
\Leftrightarrow\ &b^2x^2z + c^2x^2y + a^2y^2x + c^2y^2x + a^2z^2y + b^2z^2x \geqslant 2abxyz + 2acxyz + 2bcxyz\\
\Leftrightarrow\ &x(b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) + y(a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2) + z(b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2) \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &x(bz-cy)^2 + y(az-cx)^2 + z(bx-ay)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Последња неједнакост је тачна, због $x, y, z > 0$. Самим тим је тачна и неједнакост $(*)$, чиме је доказ окончан. $\square$

Нопмена. Једнакост у $(*)$ важи ако и само ако је $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Последица 1. За $x = y = z = 1$ имамо $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2$. Ова неједнакост је за $a, b, c > 0$, еквивалентна са

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

што представља неједнакост између аритметичке и квадратне средине три позитивна броја a, b, c.

Последица 2. За $a = b = c = 1$ добијамо

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{x+y+z},$$

што је еквивалентно са

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geqslant \frac{x+y+z}{3}.$$

Ово је неједнакост између хармонијске и аритметичке средине три позитивна броја x, y, z.

Сада ћемо дати неколико примера примене неједнакости $(*)$.

Пример 1. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c). \tag{1}$$

Решење. Ако ставимо да је

$$b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z,$$

тада, на основу неједнакости $(*)$, следи да је

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $a=b=c$.

Пример 2. Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z важи

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Решење. Дата неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{x^2}{x(x+2y+3z)}+\frac{y^2}{y(y+2z+3x)}+\frac{z^2}{z(z+2x+3y)}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{3}$$

На основу доказане неједнакости $(*)$ следи
(4)

$$\frac{x^2}{x^2+2xy+3xz}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)}.$$

Познато је да

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \tag{5}$$

и[1]

$$(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx). \tag{6}$$

Сабирањем релација (5) и (6) добијамо

$$2(x+y+z)^2\geqslant x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx). \tag{7}$$

Из неједнакости (7) и (4) следи неједнакост (3), а самим тим и тражена неједнакост (2).

Задаци

1. Ако су a, b, c позитивни бројеви и $a+b+c=1$, доказати да је

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \geqslant \frac{9}{10}.$$

2. Нека су x, y, z, a позитивни реални бројеви и

$$M=\frac{x}{ax+y+z}+\frac{y}{x+ay+z}+\frac{z}{x+y+az}.$$

Доказати да је:

(а) $M \geqslant \dfrac{3}{a+2}$, за $0<a \leqslant 1$;

(б) $M \leqslant \dfrac{3}{a+2}$, за $a \geqslant 1$.

3. Ако је $k>1$, онда за странице a, b, c троугла важи неједнакост

$$\frac{a}{k(b+c)-a}+\frac{b}{k(a+c)-b}+\frac{c}{k(a+b)-c} \geqslant \frac{3}{2k-1}.$$

Када важи једнакост?

Литература

[1] Ш. Арсланагић, *Математичка читанка*, Графичар промет, Сарајево, 2008.

[2] D. Mitrinović, J. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1989.

[1] Неједнакост (6) је еквивалентна са $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$, тј. са $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$, што је тачно.