Ристо Малчески,
Скопје

ЗАКЛУЧУВАЊЕ ПО АНАЛОГИЈА

Заклучувањето по аналогија е мисловен процес при кој од согледувањето дека два определени објекта се согласуваат во одредени својства или односи, се изведува заклучок дека тие се согласуваат и во други својства или односи кои претходно не биле согледани.

Заклучоците по аналогија се само веројатно точни и затоа, како и заклучоците добиени со непотполна индукција, треба да подлежат на проверка, т.е. на верификација (доказ) со некој дедуктивен метод.

Пример 1. Паралелограмот и паралелопипедот можеме да ги сметаме за аналогни фигури (паралелограм може да се добие со поместување на дадена отсечка во даден правец, а паралелопипед со поместување на паралелограм во даден правец). Знаеме дека кај паралелограмот дијагоналите заемно се преполовуваат, така што по аналогија можеме да заклучиме дека кај паралелопипедот просторните дијагонали веројатно заемно се преполовуваат. ■

За заклучувањето по аналогија карактеристична е следнава шема:

1) A ги има својствата $P_1, P_2, ..., P_k; Q$

2) B ги има својствата $P_1, P_2, ..., P_k;$

3) **Заклучок:** B го има својството Q.

Примената на оваа шема ќе ја дадеме на следниов пример.

Пример 2. Во овој пример ќе ја констатираме аналогијата меѓу класата триаголници и класата тетраедри, а потоа ќе изведеме заклучок по аналогија.

Прво, можеме да прифатиме дека улогата на правата во дводимензионалниот простор ја има рамнината во тридимензионалниот простор (според аксиомите на планиметријата и стереометријата). Во оваа смисла, рамнината е аналогна на правата. Потоа забележуваме дека секој триаголник е ограничен од $3=2+1$ прави, а тоа е најмалиот број прави со кои може да се формира затворена и ограничена фигура во рамнината, а секој тетраедар е ограничен со $4=3+1$ рамнини, најмалиот број рамнини со кои може да се формира затворена и ограничена фигура во просторот, па затоа *тетраедарот го сметаме за фигура аналогна на триаголникот.*

Секој триаголник ги има следниве својства:

i) триаголникот е конвексна фигура;

ii) околу секој триаголник може да се опише кружница;

iii) симетралите на страните на секој триаголник се сечат во една точка, која е центар на опишаната кружница;

iv) за плоштината P на секој триаголник важи $P=\frac{ah}{2}$, каде a е должина на основата, а h е должина на припадната висина, и

v) збирот на внатрешните агли во секој триаголник е π.

Сега, заклучувајќи по аналогија, добиваме:

vi) секој тетраедар е конвексна фигура;

vii) околу секој тетраедар може да се опише сфера;

viii) симетралните рамнини на рабовите на тетраедарот (вкупно 6) се сечат во една точка, центарот на опишаната сфера;

ix) за волуменот V на секој тетраедар важи $V=\frac{BH}{3}$, каде B е плоштина на основата, а H е должина на припадната висина, и

x) збирот на сите 6 диедарски агли на тетраедарот изнесува 2π.

Дали се точни тврдењата од *vi*) до *x*), кои се добиени по аналогија. Да забележиме дека при искажувањето на тврдењето *ix*) предвид ја зедовме и димензијата на просторот, но ако тоа не го направевме, тогаш можевме по аналогија да го искажеме и тврдењето:

ix') за волуменот V на секој тетраедар важи $V=\frac{BH}{2}$, каде B е плоштината на основата, а H е должина на припадната висина;

за што знаеме дека не е точно. Исто така, да забележиме дека не е точно тврдењето *x)*, а дури и не постои никаква причина за ова тврдење, бидејќи збирот на сите 6 диедарски агли во тетраедарот може да биде било која вредност меѓу 2π и 3π. ■

Од дефиницијата на аналогијата, но и од разгледаните примери гледаме дека заклучувањето по аналогија овозможува пренос на информација за објектот A (модел) на друг објект B (прортотип). Но, како што видовме во примерот 2, заклучувањето по аналогија не е секогаш точно. Затоа, како што рековме, при заклучувањето по аналогија треба да водиме сметка за појавата на можни грешки, што значи дека секој заклучок добиен со аналогија мора да подлежи на строг математички доказ.

Сепак заклучувањето по аналогија има важна улога и во математиката, бидејќи токму по пат на аналогија се добиени многу важни математилчки тврдења, за кои покасно е добиен строг математички доказ. Ќе наведеме уште неколку примери на заклучување по аналогија.

Пример 3. Според Питагоровата теорема плоштината на квадратот конструиран над хипотенузата на произволен правоаголен триаголник е еднаква на збирот на плоштините на квадратите конструирани над катетите на тој триаголник. Во врска со ова може да се претпостави, по аналогија, дека и плоштината на било кој многуаголник, конструиран над хипотенузата на произволен правоаголен триаголник, е еднаква на збирот на плоштините на нему сличните многуаголници, конструирани над катетите на тој триаголник (при сличноста катетите соодветствуваат на хипотенузата). Во овој случај може да се докаже дека наведеното тврдење е точно. ■

Пример 4. Собирањето и множењето во $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ се аналогни операции. Така имаме:

$$\begin{array}{lcl} a+b=b+a & & ab=ba \\ (a+b)+c=a+(b+c) & \text{и} & (ab)c=a(bc) \\ a+0=a & & a\cdot 1=a \end{array}$$

што значи дека броевите 0 и 1 се аналогни. Едната и другата операција дозволуваат инверзна операција, т.е. равенките

$$a+x=b \quad \text{и} \quad ax=b, \quad a\neq 0$$

имаат единствено решение

$$x=b-a \quad \text{и} \quad x=\tfrac{b}{a}, a\neq 0,$$

соодветно. ■

Во пример 2 видовме дека заклучоците добиени по аналогија може да се само делумно точни. Еве уште еден таков пример.

Пример 5. Познато е дека од $a=b$ следува $a\pm c=b\pm c$ и $ac=bc$ за секој $c\in\mathbb{R}$. Аналогно на ова може да се претпостави дека од $a>b$ следува $a\pm c>b\pm c$ и $ac>bc$. Меѓутоа, од последните два заклучоци вториот е точен само ако $c>0$, додека за $c=0$ важи $ac=bc$, а за $c<0$ важи $ac<bc$. ■

Пример 6. Знаеме дека во секој триаголник може да се впише единствена кружница, чиј центар е пресекот на симетралите на аглите. По аналогија можеме да заклучиме дека во секој четириаголник може да се впише кружница. Меѓутоа, при проверката дали ова тврдење важи добиваме дека истото не важи за било кој правоаголник, а важи за некои четириаголници. Сепак, оваа аналогија не наведува да истражиме за кои четириаголници важи наведеното тврдење? Така, со помош на аналогијата се концентрираме на истражувањето на тетивните четириаголници. ■

Во следните примери ќе наведеме случаи кога заклучувањето по аналогија може да доведе до сосема погрешни заклучоци.

Пример 7. *i)* Точно е

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b},$$

така што по аналогија може да се заклучи дека

$$\frac{a+c}{b+c}=\frac{a}{b},$$

што секако не е точно.

ii) Точно е

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd},$$

така што по аналогија

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$$

што секако не е точно.

iii) Точно е $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, по аналогија може да се заклучи

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

што секако не е точно.

iv) Точно е $\sqrt{a^2b^2}=|ab|$, по аналогија може да се заклучи дека

$$\sqrt{a^2+b^2}=|a+b|,$$

што секако не е точно. ■

Пример 8. Точно е следново тврдење:

Единствена непрекината реална функција $f(x)$ *која ја задоволува Кошиевата равенка*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

е линеарната функција $f(x)=ax, a=const$.

Меѓутоа, често учениците го „генерализираат“ ова тврдење, па можат да се сретнат равенства од типот

$$
\begin{aligned}
&\cos(x+y)=\cos x+\cos y,\\
&\sin(x+y)=\sin x+\sin y,\\
&\log(a+b)=\log a+\log b,\\
&(a+b)^2=a^2+b^2,\\
&\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b},\\
&\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=|a|+|b|,
\end{aligned}
$$

итн., кои не се точни. ■

Пример 9. Ако едната страна на правоаголникот се зголеми два пати, а другата се намали два пати, тогаш за неговата плоштина добиваме

$$P=2a\cdot\tfrac{b}{2}=ab\,,$$

т.е. таа не се менува.

Меѓутоа, следниот заклучок, добиен по аналогија со ова тврдење, не е точен:

Ако едната страна на правоаголникот се зголеми за 20%, *а другата се намали за* 20%, *тогаш неговата плоштина не се менува.*

Навистина, во случајов за должините a и b на новиот правоаголник добиваме $a+\frac{20}{100}a=1{,}2a$ и $b-\frac{20}{100}b=0{,}8b$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $1{,}2a\cdot 0{,}8b=0{,}96ab=0{,}96P$, т.е. таа е помала за 4%. ■

Исто така, до погрешни заклучоци по аналогија може да се дојде и ако, на пример, познатите правила за собирање на конечни збирови се пренесат на бесконечни збирови. Следниот пример покажува дека постојат суштински разлики во наоѓањето на конечните и бесконечните збирови.

Пример 10. Да го разгледаме збирот

$$S=1-1+1-1+1-1+\dots\,.$$

Ако ги користиме правилата за пресметување на конечни збирови, од една страна добиваме:

$$
\begin{aligned}
S&=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots\\
&=0+0+0+\dots=0.
\end{aligned}
$$

Понатаму, од друга страна имаме

$$\begin{aligned} S &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots \\ &= 1-0-0-0-\ldots = 1, \end{aligned}$$

а од трета страна добиваме

$$\begin{aligned} &S = 1-(1-1+1-1+1-1+\ldots) \\ &S = 1-S, \\ &2S = 1, \\ &S = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Јасно, ниту еден од добиените резултати не е точен, а точниот одговор на барањето да се пресмета дадениот бесконечен збир е дека истиот не е определен, односно не постои. ■