XIX РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

V ОДДЕЛЕНИЕ

1. Страните на еден триаголник имаат должини како три последователни природни броеви. Кои се тие броеви, ако периметарот на триаголникот е 33 cm?

Решение: а) Нека a, b, c се страните на тој триаголник, тогаш $L = a + b + c$. Според условот $b = a + 1$ и $c = a + 2$, па имаме:

$$L = a + a + 1 + a + 2;\ 33 = a + a + a + 3;\ 30 = 3a.$$

Оттука $a = 10$ cm, $b = 11$ cm и $c = 12$ cm.

б) Средната по големина страна на триаголникот е еднаква на (33 : 3), т.е. 11 cm, па другите две страни се 10 cm и 12 cm. Значи, страните на триаголникот се 10 cm, 11 cm и 12 cm.

2. Зајакот кој бега од волкот е оддалечен 120 m. Волкот трча 100 m за 20 s, а зајакот 100 m за 25 s. Зајакот од дупката во која може да се спаси е оддалечен 400 m. Дали волкот ќе го стаса зајакот?

Решение: а) Ако зајакот за 25 s трча 100 m, тогаш 400 m ќе истрча за $4 \cdot 25$ s = 100 s. Времето за кое волкот треба да истрча 400 m + 120 m за да го стигне зајакот е $(520 : 100) \cdot 20$ s, т.е. 104 s. Следствено, волкот не може да го стигне зајакот.

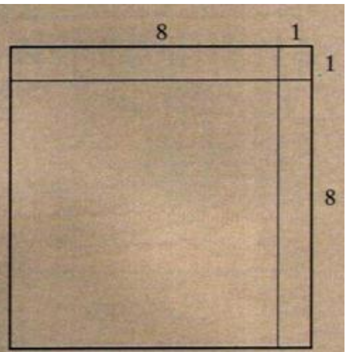
б) За 100 s зајакот истрчал $4 \cdot 100$ m и веќе е во дупката. Волкот, пак, за 100 s ќе помине $5 \cdot 100$ m = 500 m. Бидејќи растојанието меѓу волкот и дупката е 120 m + 400 m = 520 m, следува дека волкот не може да го стаса зајакот.

3. Производот на четири последователни природни броеви е 3024. Кои се тие броеви?

Решение: а) Бидејќи $3024=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7=6\cdot7\cdot8\cdot9$, следува дека бараните броеви се 6, 7, 8 и 9.

4. Ако страната на еден квадрат се зголеми за 1 cm, тогаш неговата плоштина ќе се зголеми за 17 cm^2. Колкав е периметарот на тој квадрат?

Решение: Ако страната на квадратот ја зголемиме за 1 cm, тогаш неговата плоштина ќе се зголеми за два еднакви правоаголници и за еден квадрат со страна 1 cm (цртеж). Во тој случај двата правоаголника имаат плоштина $17\ cm^2 - 1\ cm^2 = 16\ cm^2$. Значи секој од нив има плоштина $8\ cm^2$. Бидејќи едната страна од правоаголниците е 1 cm, тогаш другата страна им е 8 cm. Следува дека и квадратот има страна 8 cm, па неговиот периметар е $4 \cdot 8 = 32$ cm.



VI ОДДЕЛЕНИЕ

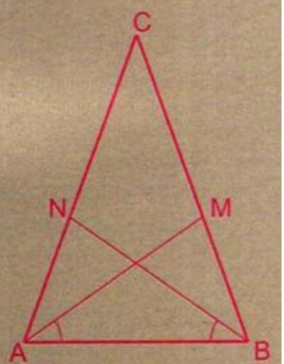
1. Докажи дека должините на симетралите на аглите при основата на еден рамнокрак триаголник се еднакви.

Решение: Нека AM и BN се симетралите на аглите при основата на рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) (цртеж). Ќе докажеме дека триаголниците ABN и BAM се складни. Имаме:

1° $\measuredangle BAN = \measuredangle ABM$, како агли при основата на рамнокрак триаголник:

2° AB – заедничка страна на триаголниците,

3° $\measuredangle ABN = \measuredangle BAM$, како половинки од еднакви агли. Следствено, $\Delta ABN \cong \Delta BAM$, според признакот АСА. Оттука следува дека $\overline{AM} = \overline{BN}$.



2. Збирот на растојанијата меѓу три точки е 12 cm. Тие растојанија се изразени со три последователни парни броеви. Дали тие точки лежат на иста права? Образложи!

Решение: Да ги означиме растојанијата со: a, b, c. Според условот имаме: $a = 2n$, $b = 2n + 2$, $c = 2n + 4$; $2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 12$. Оттука $n = 1$, па растојанијата се: $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. Бидејќи 2 cm + 4 cm = 6 cm, следува дека точките не формираат триаголник, т.е. лежат на иста права.

3. Природните броеви се напишани еден до друг на следниот начин: 12345678910111212...99100101102... Која цифра стои на 2001–то место?

Решение: За запишување на едноцифрените броеви се употребени 9 цифри, а за двоцифрените $2 \cdot 90 = 18$ цифри. За да одредиме која цифра стои на 2001–то место, треба да најдеме колку трицифрени броеви се употребени. Бидејќи $2001 - (9 + 18) = 1812$, а $1812 : 3 = 604$, следува дека се употребени 604 трицифрени броеви. Вкупно употребени броеви се: 9 едноцифрени, 90 двоцифрени и 604 трицифрени, што изнесува 703. Значи, последниот трицифрен број е 703, па заклучуваме дека цифрата 3 стои на 2001–то место.

4. Збирот на четири броеви е 100. Збирот на првиот, третиот и четвртиот е 65, а збирот на првиот, вториот и третиот е 78. Одреди ги тие броеви, ако првиот е за 10 помал од вториот.

Решение: Нека се тоа броевите a, b, c, d; тогаш од условите $a+b+c+d=100$ и $a+c+d=65$, следува дека $b=100-65=35$.

Од условите, пак, $a+b+c+d=100$ и $a+b+c=78$, следува дека $d=100-78=22$. Од условот $a+10=b$, следува $a=35-10=25$.

Од $a+b+c+d=100$, следува $c=100-25-35-22=18$.

Значи, бараните броеви се: 25, 35, 18 и 22.

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни природни броеви е непарен број.

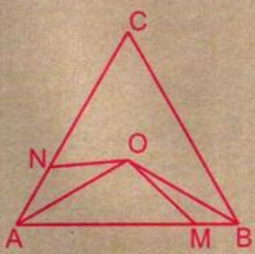
Решение: Нека се тоа броевите $n+1$ и n, тогаш разликата на нивните квадрати: $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$ е секогаш непарен природен број.

2. Јане има пет дела од еден искинат златен синџир. Еден дел има 3 алки, два дела имаат по 4 алки, еден дел има 5 алки и еден дел има 6 алки. Јане сака да има цел синџир, така што почетокот и крајот да бидат составени. Златарот за кинење на една алка наплатува по 30 денари, а за нејзино спојување – по 80 денари. Како Јане да ги состави сите делови од синџирот, а притоа на златарот да му плати најмалку пари?

Решение: Секоја алка од едниот дел со 4 алки ќе се раскине, па ќе има вкупно 4 кинења. Останатите 4 дела ќе се спојат со четирите раскинати алки и ќе се добие затворен синџир. Следствено, Јане ќе плати $4 \cdot (30+80)$ денари $= 440$ денари.

3. Нека O е центарот на впишаната кружница, во рамностраниот триаголник ABC и нека M и N се точки на страните AB и AC, соодветно, такви што $\overline{AM}+\overline{AN}=\overline{AB}$. Докажи дека $\overline{OM}=\overline{OE}$ и $\measuredangle MON=120°$.

Решение: Доволно е да докажеме дека триаголниците AON и BOM се складни (цртеж). Имаме:



1° $\overline{AO}=\overline{BO}=R$.

2° $\measuredangle OAN=\measuredangle OBM=30°$.

3° Од $\overline{AM}+\overline{AN}=\overline{AB}$ и $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$, следува $\overline{AM}=\overline{BM}$. Следствено, $\Delta AON\cong\Delta BOM$, според признакот САС. Оттука следува дека $\overline{OM}=\overline{ON}$ и $\measuredangle AON=\measuredangle BOM$.

Бидејќи $\measuredangle BOA=120°$, добиваме:

$$\measuredangle MON=\measuredangle MOA+\measuredangle AON=\measuredangle MOA+\measuredangle BON=\measuredangle BOA=120°.$$

4. Докажи дека за секој $x\in\mathbb{N}$, вредноста на полиномот

$$P(x)=2x^4+x^3+4x^2+x+2$$

е број делив со 2.

Решение: Бидејќи $P(x)=2(x^2+1)^2+x(x^2+1)$, следува дека за секој $x\in N$, првиот собирок е секогаш делив со 2. Ќе докажеме дека за секој $x\in N$ и вториот собирок е делив со 2. Ако x е парен број, тогаш деливоста со 2 е очигледна. Ако x е непарен број, тогаш и x^2 е непарен број, па x^2+1 е број делив со 2. Следствено, за секој $x\in N$, вредноста на полиномот $P(x)$ е број делив со 2.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Одреди го x од равенката $(a-3)x+(a+1)(3-x)=a+x-8$, ако се знае дека a е корен на равенката $\frac{a-5}{3}-\frac{a-2}{2}=a-3$.

Решение: Од $\frac{a-5}{3}-\frac{a-2}{2}=a-3$, добиваме: $2a-10-3a+6=6a-18$, од каде што $a=2$. Тогаш првата равенка го добива видот:

$(2-3)x+(2+1)(3-x)=2+x-8$, т.е. $-x+9-3x=x=x-6$, од каде што $x=3$.

2. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш p^2+11 е делив со 12. Докажи!

Решение: Секој прост број p поголем од 3 може да се запише во видот $p=6k+1$ или $p=6k-1$. Ако $p=6k+1$, тогаш:

$$p^2+11=(6k+1)^2+11=36k^2+12k+1+11=12(3k^2+2k+1),$$

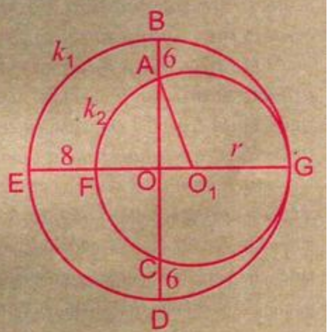
па следува дека $12|p^2+11$. Ако $p=6k-1$, тогаш

$$p^2+11=(6k-1)^2+11=36k^2-12k+1+11=12(3k^2-2k+1),$$

па следува дека $12|p^2+11$.

Следствено $12|p^2+11$ за секој прост број $p>3$.

3. Две кружници се допираат однатре во точката G. Нека $BD \perp EG$ се заемно нормални дијаметри на поголемата кружница. Пресметај ги радиусите на кружниците, ако $\overline{AB}=\overline{CD}=6$ cm и $\overline{EF}=8$ cm (види цртеж).



Решение: Нека R и r се бараните радиуси на кружниците. Тогаш $\overline{EG}=\overline{EF}+\overline{FG}$, $2R=8+2r$, $R=r+4$. Во правоаголниот триаголник OO_1A е: $\overline{OO_1}=R-r=4$,

$\overline{OA}=R-6=r-2$, $\overline{O_1A}=r$,

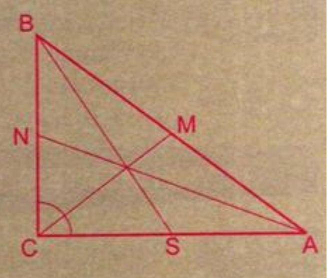
па имаме $r^2=4^2+(r-2)^2$, $r=5$.

Значи, радиусите се: 5 cm и 9 cm.

4. Ако t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии на правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C=90°$), тогаш $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$. Докажи!

Решение: Нека $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ се страните, а $\overline{AN}=t_a$, $\overline{BS}=t_b$, $\overline{CM}=t_c$ се тежишните линии во правоаголниот триаголник ABC (цртеж). Од правоаголниот триаголник ANC добиваме: $t_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$.

Слично, од правоаголниот триаголник BSC добиваме: $t_b^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2$.



Од овие две равенства следува

$$t_a^2+t_b^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}c^2.$$

Бидејќи $t_c=\frac{c}{2}$, т.е. $c=2t_c$ имаме $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$.