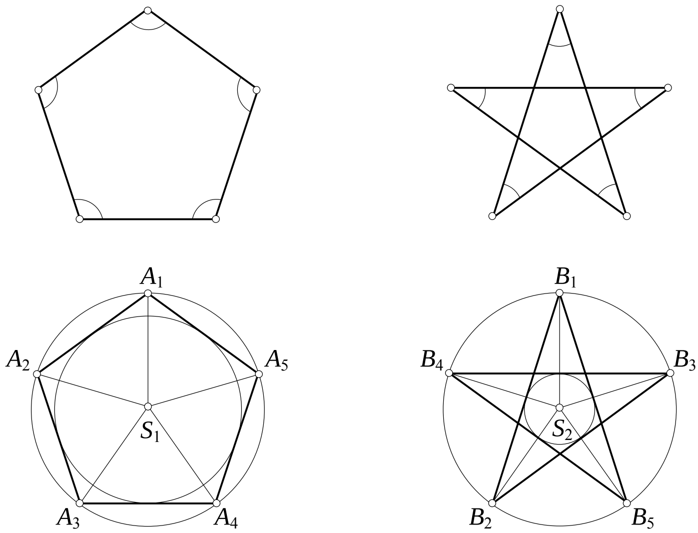
O poligonima kojima su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki

Studenti matematike i informatike[1]*, Rijeka*

Najprije ćemo ponoviti neke činjenice poznate iz osnovne škole.

Promotrimo sliku 1.



Slika 1.

Svaki od nacrtanih peterokuta ima sve stranice jednake i sve (unutarnje) kutove jednake. Lako je zaključiti da se svakom od njih može opisati i upisati kružnica i da je središte tih kružnica točka u kojoj se sijeku simetrale kutova. Naime, lako se vidi sukladnost odgovarajućih trokuta, tj. da je

$$\Delta S_1A_1A_2 \cong \Delta S_1A_2A_3 \cong \Delta S_1A_3A_4 \cong \Delta S_1A_4A_5 \cong \Delta S_1A_5A_1,$$

$$\Delta S_2B_1B_2 \cong \Delta S_2B_2B_3 \cong \Delta S_2B_3B_4 \cong \Delta S_2B_4B_5 \cong \Delta S_2B_5B_1.$$

Na isti način se uviđa da se svakom poligonu, koji ima sve stranice jednake i sve kutove jednake, može opisati i upisati kružnica.

Zadržimo se malo na kružnici opisanoj peterokutu $B_1B_2B_3B_4B_5$. Tu kružnicu obilazimo dva puta idući po njoj od vrha B_1 do vrha B_5. Primijetimo ovdje da je

$$\sphericalangle B_1S_2B_2 + \sphericalangle B_2S_2B_3 + \sphericalangle B_3S_2B_4 + \sphericalangle B_4S_2B_5 + \sphericalangle B_5S_2B_1 = 2 \text{ puna kuta},$$

[1] Rad su napisali studenti matematike i informatike četvrte godine Filozofskog fakulteta u Rijeci akademske 2006./ 2007. godine: J. Anić, A. Barić, S. Blašković, S. Bujačić, N. Bukal, M. Jadrić, I. Janežić, A. M. Kuharić, L. Kumpare, A. Lovrin, A. Lušini, M. Maksimović, K. Morsi, Ž. Načinović, I. Pendić, A. Pilipović, M. Sekulić, L. Simčić, M. Štanta, A. Švab, S. Vranić i I. Žikić.
Članak je inicirao profesor emeritus M. Radić na *Seminaru za diplomski rad*.

tj.

$$m\sphericalangle B_1S_2B_2 + m\sphericalangle B_2S_2B_3 + m\sphericalangle B_3S_2B_4 + m\sphericalangle B_4S_2B_5 + m\sphericalangle B_5S_2B_1 = 2 \cdot 360^\circ,$$

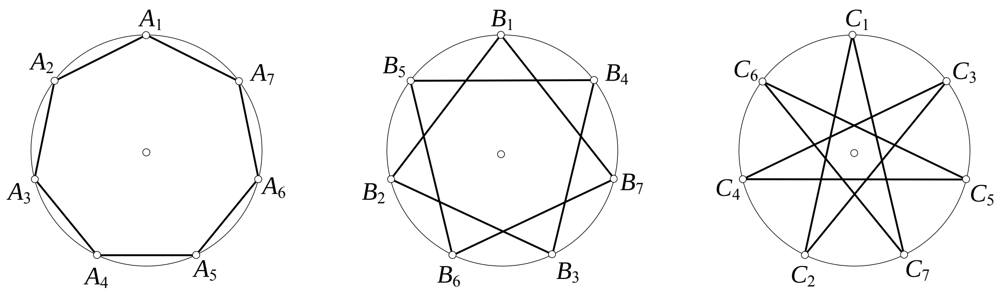
gdje slovo m označava riječ *mjera*. Zato se kaže da peterokut $B_1B_2B_3B_4B_5$ ima *kružnu opisanost* jednaku 2 ili, kraće rečeno, ima 2 *opisanost*.

Općenito, za poligon $A_1 \ldots A_n$ s n vrhova koji ima sve stranice jednake i sve kutove jednake kaže se da ima k *opisanost* ako je

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + \ldots + m\sphericalangle A_nSA_1 = k \cdot 360^\circ,$$

gdje S označava središte kružnice opisane poligonu $A_1 \ldots A_n$. Evo nekoliko primjera.

Peterokut $A_1A_2A_3A_4A_5$ na slici 1 ima 1 opisanost. Sedmerokut $A_1 \ldots A_7$ na slici 2 ima također 1 opisanost, dok sedmerokut $B_1 \ldots B_7$ na toj slici ima 2 opisanost. Sedmerokut $C_1 \ldots C_7$ na istoj slici ima 3 opisanost.



Slika 2.

Za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ postoji samo jedan poligon s n vrhova kojemu su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki i ima opisanost 1. Taj poligon je *konveksan*, tj. ima svojstvo da za svake svoje dvije točke sadrži i sve točke između njih. Svi ostali poligoni s n vrhova koji imaju sve stranice jednake i sve kutove jednake su nekonveksni i svaki od njih ima opisanost veću od 1.

Uobičajeno je da se konveksni poligon koji ima sve stranice jednake i sve kutove jednake naziva *pravilnim poligonom*. Mi ćemo ga ovdje, radi kraćeg izražavanja u narednom tekstu, zvati *pravilnim konveksnim poligonom*, a sve ostale poligone koji imaju jednake stranice i jednake kutove zvat ćemo *pravilnim nekonveksnim poligonima* ili *zvjezdolikim pravilnim poligonima*.

Dokazat ćemo da vrijedi ovaj teorem.

Teorem 1. *Neka je $A_1 \ldots A_n$ pravilni poligon (konveksan ili nekonveksan) i neka je s k označena njegova opisanost. Tada je*

$$k \in \left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right\} \quad \textit{ako je } n \textit{ neparan broj,}$$

ili

$$k \in \left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-2}{2}\right\} \quad \textit{ako je } n \textit{ paran broj.}$$

Drugim riječima, opisanost poligona $A_1 \ldots A_n$ ne može biti veća od $\frac{n-1}{2}$ ako je n neparan broj ili od $\frac{n-2}{2}$ ako je n paran broj.

Dokaz. Označimo s S središte kružnice opisane poligonu $A_1\ldots A_n$. Budući da je k opisanost poligona $A_1\ldots A_n$ mora vrijediti jednakost

$$m\sphericalangle A_1SA_2+m\sphericalangle A_2SA_3+\ldots+m\sphericalangle A_nSA_1=k\cdot 360^\circ$$

ili

$$m\sphericalangle A_1SA_2=m\sphericalangle A_2SA_3=\ldots=m\sphericalangle A_nSA_1=\frac{k\cdot 360^\circ}{n}$$

jer su kutovi $\sphericalangle A_1SA_2$, $\sphericalangle A_2SA_3,\ldots,\sphericalangle A_nSA_1$ sukladni i svaki ima manje od 180°. Dakle, treba pokazati da je $k\leqslant\frac{n-1}{2}$ ako je n neparan i da je $k\leqslant\frac{n-2}{2}$ ako je n paran. Dokaz je lagan. Odmah se, naime, vidi da za neparni n vrijede nejednakosti

$$\left(\frac{n-1}{2}\cdot 360^\circ\right):n<180^\circ,$$

$$\left(\left(1+\frac{n-1}{2}\right)\cdot 360^\circ\right):n>180^\circ,$$

jer se mogu napisati u obliku

$$(n-1)\cdot 180^\circ<n\cdot 180^\circ,\quad (n+1)\cdot 180^\circ>n\cdot 180^\circ.$$

U slučaju kad je n paran imamo jednu nejednakost i jednu jednakost

$$\left(\frac{n-2}{2}\cdot 360^\circ\right):n<180^\circ,$$

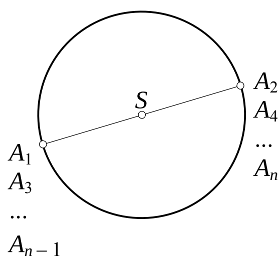
$$\left(\left(1+\frac{n-2}{2}\right)\cdot 360^\circ\right):n=180^\circ,$$

koje se mogu pisati u obliku

$$(n-2)\cdot 180^\circ<n\cdot 180^\circ,\quad n\cdot 180^\circ=n\cdot 180^\circ.$$

Primijetimo ovdje da u slučaju kad je $k=1+\frac{n-2}{2}$, tj. $k=\frac{n}{2}$, imamo tzv. degeneraciju poligona na dužinu. (Vidi sliku 3. Tu je $A_1=A_3=\ldots=A_{n-1}$, $A_2=A_4=\ldots=A_n$.)

Dakle, i u slučaju kad je n paran ne može biti $k>\frac{n-2}{2}$.

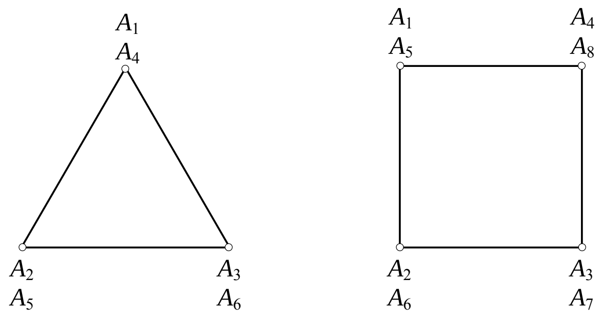


Slika 3.

Sada bi se moglo pomisliti da pravilnih n-terokuta, tj. pravilnih poligona s n stranica, ima $\frac{n-1}{2}$ u slučaju kad je n neparan, odnosno, $\frac{n-2}{2}$ kad je n paran. Ipak nije tako. Na primjer, "dvostruki" pravilni (jednakostraničan) trokut ne smatra se pravilnim šesterokutom, "dvostruki" pravilni četverokut (kvadrat) ne smatra se pravilnim osmerokutom, itd. Vidi sliku 4.

Da bismo to ispitali koristit ćemo neke nazive i činjenice koje se odnose na tzv. *relativno proste brojeve*. Kao što znamo, imamo *definiciju*:

Za dva prirodna broja a i b kaže se da su relativno prosti i piše $Nzm\,(a,b)=1$ ako je najveća zajednička mjera brojeva a i b jednaka 1. Na primjer, broj 1 je relativno prost sa svakim prirodnim brojem; broj 2 je relativno prost sa svakim neparnim prirodnim brojem. Ako je p prost broj, onda je on relativno prost sa svakim prirodnim brojem koji je manji od p. Tako je, na primjer, broj 7 relativno prost sa svakim od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6; broj 8 je relativno prost samo s brojevima 1, 3, 5, 7.



Slika 4.

Dokazat ćemo da vrijedi ovaj teorem.

Teorem 2. *Neka je $n \geqslant 3$ bilo koji zadani prirodni broj i neka je s W označen broj svih pravilnih n-terokuta koji nisu višestruki poligoni s manje od n vrhova.*
Tada u slučaju kad je n neparan imamo

W = broj svih onih prirodnih brojeva iz skupa $\left\{1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}\right\}$ koji su relativno prosti s brojem n.
U slučaju kad je n paran imamo

W = broj svih onih prirodnih brojeva iz skupa $\left\{1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}\right\}$ koji su relativno prosti s brojem n.

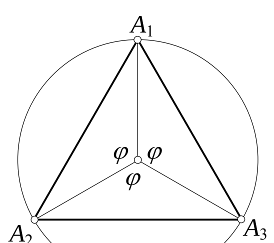
Dokaz. Pođimo od $n = 3$. Tu je $\dfrac{n-1}{2} = 1$ i broj 1 je relativno prost s brojem 3. Dakle, ako je $n = 3$, opisanost ne može biti veća od 1, pa imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + m\sphericalangle A_3SA_1 = 1 \cdot 360^\circ$$

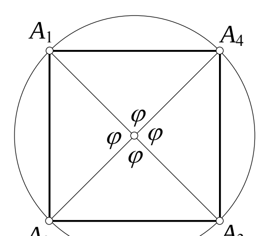
ili

$$\varphi + \varphi + \varphi = 360^\circ,$$

gdje je $\varphi = \dfrac{1 \cdot 360^\circ}{3} = 120^\circ$. Vidi sliku 5.



Slika 5.



Slika 6.

Slično vrijedi za $n = 4$, gdje je $\dfrac{n-2}{2} = 1$. Dakle, i za $n = 4$ ne može opisanost biti veća od 1, pa imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1SA_2 + m\sphericalangle A_2SA_3 + m\sphericalangle A_3SA_4 + m\sphericalangle A_4SA_1 = 1 \cdot 360^\circ$$

ili

$$\varphi + \varphi + \varphi + \varphi = 360^\circ,$$

gdje je $\varphi = \dfrac{1 \cdot 360^\circ}{4} = 90^\circ$. Vidi sliku 6.

Za $n = 5$ imamo skup $\{1, 2\}$ jer je $\dfrac{5-1}{2} = 2$. Tu imamo pravilni peterokut kojemu je opisanost 1 i pravilni peterokut kojemu je opisanost 2. Naime, tu imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1S_1A_2 + \ldots + m\sphericalangle A_5S_1A_1 = 1 \cdot 360^\circ,$$
$$m\sphericalangle B_1S_2B_2 + \ldots + m\sphericalangle B_5S_2B_1 = 2 \cdot 360^\circ,$$

ili

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_1 = 1 \cdot 360^\circ, \quad \varphi_2 + \ldots + \varphi_2 = 2 \cdot 360^\circ,$$

gdje je $\varphi_1 = \dfrac{1 \cdot 360^\circ}{5} = 72^\circ$, $\varphi_2 = \dfrac{2 \cdot 360^\circ}{5} = 144^\circ$. Vidi sliku 1.

I za $n = 6$ imamo skup $\{1, 2\}$ kao i za $n = 5$, jer je $\dfrac{6-2}{2} = 2$, ali ovdje broj 2 nije relativno prost s brojem 6. Za $k = 1$ imamo jednakost

$$m\sphericalangle A_1S_1A_2 + \ldots + m\sphericalangle A_6S_1A_1 = 1 \cdot 360^\circ,$$

ili

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_1 = 1 \cdot 360^\circ,$$

gdje je $\varphi_1 = \dfrac{1 \cdot 360}{6} = 60^\circ$.

Dakle, za $k = 1$ dobijemo pravilni šesterokut kojemu je opisanost l.

Za $k = 2$ imamo jednakost

$$m\sphericalangle B_1S_2B_2 + \ldots + m\sphericalangle B_6S_2B_1 = 2 \cdot 360^\circ$$

ili

$$\left(\frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6}\right) + \left(\frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6} + \frac{2 \cdot 360^\circ}{6}\right) = 2 \cdot 360^\circ.$$

Budući da je $Nzm\ (2, 6) = 2$, gornju jednakost možemo pisati i u obliku

$$\left(\frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3}\right) + \left(\frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3}\right) = 2 \cdot 360^\circ$$

ili

$$(\varphi + \varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi + \varphi) = 2 \cdot 360^\circ,$$

gdje je $\varphi = \dfrac{2 \cdot 360^\circ}{6} = 120^\circ$.

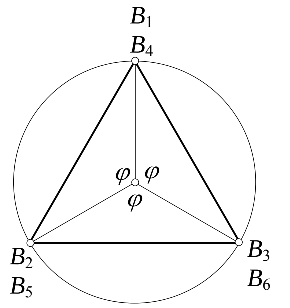
Vidi sliku 7. Ako se sumi $\varphi + \varphi + \varphi$ doda suma $\varphi + \varphi + \varphi$ opet se dobije isti pravilni trokut.

Uzmimo sada općenito da je $n \geqslant 3$ bilo koji zadani prirodni broj i da je k bilo koji zadani prirodni broj koji pripada skupu $\left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right\}$ ako je n neparan ili skupu $\left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-2}{2}\right\}$ ako je n paran. Ako je $Nzm(k,n) = 1$ imamo pravilni poligon $A_1 \ldots A_n$ za koji vrijedi jednakost

$$m\sphericalangle A_1S_1A_2 + \ldots + m\sphericalangle A_nS_1A_1 = k \cdot 360^\circ$$

ili

$$\frac{k \cdot 360^\circ}{n} + \ldots + \frac{k \cdot 360^\circ}{n} = k \cdot 360^\circ.$$



Slika 7.

U tom slučaju poligon $A_1 \ldots A_n$ ima k opisanost.

Ako je $Nzm(k,n) = d$, gdje je $d > 1$, imamo poligon $B_1 \ldots B_n$ za koji vrijedi jednakost

$$\frac{k \cdot 360^\circ}{n} + \ldots + \frac{k \cdot 360^\circ}{n} = k \cdot 360^\circ.$$

Ta se jednakost može pisati u obliku

$$\frac{h \cdot 360^\circ}{m} + \ldots + \frac{h \cdot 360^\circ}{m} = k \cdot 360^\circ,$$

gdje je

$$h = \frac{k}{d}, \quad m = \frac{n}{d},$$

tj. razlomak $\frac{h}{m}$ je dobiven skraćivanjem razlomka $\frac{k}{n}$ brojem (mjerom) d.

Dobivena jednakost može se pisati i u obliku

$$\left(\frac{h \cdot 360^\circ}{m} + \ldots + \frac{h \cdot 360^\circ}{m}\right) + \ldots + \left(\frac{h \cdot 360^\circ}{m} + \ldots + \frac{h \cdot 360^\circ}{m}\right) = k \cdot 360^\circ$$

ili

$$(h \cdot 360^\circ) + \ldots + (h \cdot 360^\circ) = k \cdot 360^\circ,$$

gdje pribrojnika $(h \cdot 360^\circ)$ ima d, jer je $dm = n$.

Dakle, poligon $B_1 \ldots B_n$ je u stvari poligon $B_1 \ldots B_m$ (s m vrhova) koji ima višestrukost d, tj. ispisuje se d puta. Tako je, na primjer, poligon $B_1 \ldots B_6$ u slučaju kada je $n = 6$ i $k = 2$, u stvari dvostruki trokut prikazan na slici 7.

Time je teorem 2 dokazan.

Taj se teorem može nadopuniti koristeći *Eulerovu funkciju* φ, čija definicija glasi:

Definicija. Neka je n bilo koji zadani prirodni broj. Tada je $\varphi(n)$ broj svih prirodnih brojeva koji su manji od n i relativno prosti s n.

Primjer. $\varphi(1) = 0,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4,\ \varphi(6) = 2.$

Teorem 3. *Neka je $n \geqslant 3$ bilo koji zadani prirodni broj. Broj svih pravilnih poligona s n vrhova jednak je $\frac{\varphi(n)}{2}$.*

Dokaz. Da se dokaz ne bi učinio preteškim, najprije ćemo razmotriti dva primjera.

Uzmimo najprije da je n neparan broj, recimo $n = 9$. Tada je $\dfrac{n-1}{2} = 4$. Nije teško vidjeti da se u svakom od skupova $\{1,2,3,4\}$ i $\{5,6,7,8\}$ nalazi jednak broj prirodnih brojeva koji su relativno prosti s brojem 9. U prvom skupu to su brojevi 1, 2, 4, a u drugom 5, 7, 8. Za svaki broj k iz prvog skupa koji je relativno prost s brojem 9 dobije se broj $9-k$ koji pripada drugom skupu i relativno je prost s 9. Tako su $9-1$, $9-2$, $9-4$ brojevi iz drugog skupa koji su relativno prosti s brojem 9.

Vrijedi i obratno, tj. za svaki broj l iz drugog skupa, koji je relativno prost s brojem 9, postoji broj $9-l$ iz prvog skupa koji je relativno prost s brojem 9. Tako je $9-5$ broj iz prvog, a 5 broj iz drugog skupa.

Uzmimo sada da je n paran broj, recimo $n = 10$. Tada je $\dfrac{n-2}{2} = 4$, pa imamo skupove $\{1,2,3,4\}$ i $\{5,6,7,8,9\}$. Možemo uočiti da između brojeva iz prvog skupa koji su relativno prosti s brojem 10 i brojeva iz drugog skupa koji su relativno prosti s brojem 10 postoji obostrano jednoznačno pridruživanje:

$$1 \to 10-1, \quad 3 \to 10-3,$$
$$9 \to 10-9, \quad 7 \to 10-7.$$

Dakle, da bismo dokazali teorem 3 dovoljno je dokazati da vrijede sljedeće dvije tvrdnje:

(1) U svakom od skupova

$$\{1,2,\ldots,m\}, \quad \{m+1, m+2,\ldots,2m\},$$

kojima su elementi prirodni brojevi, ima jednak broj onih koji su relativno prosti s brojem $2m+1$.

(2) U svakom od skupova

$$\{1,2,\ldots,m\}, \quad \{m+1, m+2,\ldots,2m, 2m+1\},$$

kojima su elementi prirodni brojevi, ima jednak broj onih koji su relativno prosti s brojem $2m+2$.

Te se tvrdnje lako povezuju s prethodna dva primjera. Naime, prva tvrdnja se odnosi na neparni n i tu je $m = \dfrac{n-1}{2}$, a druga tvrdnja se odnosi na parni n i tu je $m = \dfrac{n-2}{2}$.

Za prvu tvrdnju dovoljno je pokazati da vrijedi ekvivalencija

$$Nzm(k, 2m+1) = d \iff Nzm(2m+1-k, 2m+1) = d.$$

A to je lako, jer iz

$$k = pd, \quad 2m+1 = qd$$

slijedi jednakost

$$2m+1-k = (q-p)d.$$

Dakle svaka zajednička mjera od k i $2m+1$ je i mjera od $2m+1-k$. I obrnuto vrijedi, jer iz

$$k = ad, \quad 2m+1-k = bd$$

$2m+1 = (a+b)d$.

Dakle, svaka zajednička mjera od k i $2m+1-k$ je i mjera od $2m+1$.

Na isti način može se zaključiti da vrijedi i druga tvrdnja koja se odnosi na parni n.

Preporučujemo učenicima da obrate pozornost na vježbe koje slijede.

Zadaci

1. Neka je $n = 8$. Nacrtaj pravilne osmerokute koji se dobiju za $k = 1$ i $k = 3$. Što se dobije za $k = 2$? Nacrtaj.

2. Neka je $n = 12$. Nacrtaj pravilne dvanaesterokute za $k = 1$ i $k = 5$. Što se dobije za $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$? Nacrtaj.

3. Neka je $n = 21$. Uvjeri se da se za $k = 6$ dobije dvostruki pravilni sedmerokut koji ima 2 opisanost. Što se dobije za $k = 9$?

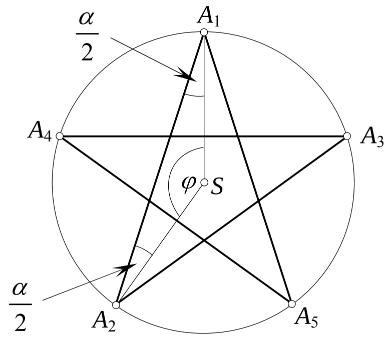
4. Zbroj kutova pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost k jednaka je

$$(n - 2k) \cdot 180^\circ.$$

Dokaži!

Uputa. Vidi sliku 8 za slučaj kada je $n = 5$ i $k = 2$. Vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} 5\alpha &= 5(180^\circ - \varphi) = 5 \cdot 180^\circ - 5\varphi \\ &= 5 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 360^\circ \quad \left(\text{jer je } \varphi = \frac{2 \cdot 360^\circ}{5}\right) \\ &= 5 \cdot 180^\circ - 4 \cdot 180^\circ \\ &= (5 - 4) \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$



Slika 8.

5. Ako je n neparan broj veći od 1, onda je $\frac{n-1}{2}$ relativno prosti s brojem n. Dokaži!

Uputa. Neka je m prirodan broj takav da je $n = 2m + 1$. Tada je $\frac{n-1}{2} = m$

6. Koliki je zbroj kutova pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost $\frac{n-1}{2}$?

7. Postoji li pravilni poligon $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost $\frac{n-2}{2}$ u slučaju kada je n paran broj? Navedi primjere ako postoji i primjere gdje ne postoji.

8. Koliki je zbroj kutova pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ koji ima opisanost $\frac{n-2}{2}$?

Pogovor

Dragi učenici,

vjerujemo da će ovaj članak biti zanimljiv svima vama koji volite matematiku i uživate u njenom otkrivanju i upoznavanju. Također, vjerujemo da će mnogi od vas izabrati studij matematike i biti naše kolege. Mi smo ponosni što studiramo matematiku, jer je to predmet koji se posebno cijeni u cijelome svijetu. Odavno se spoznalo da je svijet stvaran po zakonima matematike i da je matematika jezik kojim govori priroda. Zbog toga je već odavno matematika nazvana kraljicom znanosti.

Želimo vam puno uspjeha u vašem radu i odabiru studija.