XLV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Дедо Јордан и неговиот внук Иван имаат роденден на ист ден. Годините на едниот и на другиот се пишуваат со истите цифри. „Разликата на нивните години е еднаква на бројот на твојата куќа“ - му рече Марко на Петар. Петар многу брзо пресмета колку години имаат Јордан и Иван. Колку се стари дедото и внукот?

Решение. Разликата од двоцифрените броеви $10a+b$ и $10b+a$ изнесува $9(a-b)$. Разликата $a-b$ е единствена, бидејќи a и b се цифри различни од 0, значи оваа разлика може да биде 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8. Според тоа, производот $9(a-b)$ е единствен. На Петар, за да ги пресмета a и b му е доволно што го знае бројот на својата куќа. Затоа разликата на годините на дедото и внукот е $9(a-b)=72$. Имено, за останатите случаи би имале барем две можности, па Петар не би можел да го определи решението. Навистина,к на пример ако $a-b=6$, тогаш можни се три случаи $a-b=7-1=8-2=9-3$.

Значи, $a-9, b=1$, т.е. дедото Јордан има 91 година, а внукот Иван има 19 години.

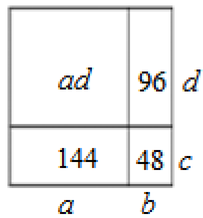
2. Михаил и Мартин живеат на иста оддалеќеност од училиштето и истовремено тргнале кон училиштето. Чекорот на Михаил е за 10% пократок од чекорот на Мартин, но Михаил за исто време направил 10% повеќе чекори од Мартин. Кој од нив стигнал прв во училиште?

Решение. Нека должината на чекорот на Мартин е x. Бидејќи 10% од x е $0,1x$, добиваме дека чекорот на Михаил е долг $0,9x$. Понатаму, ако Мартин направил y чекори, бидејќи 10% од y е $0,1y$, Михаил направил $1,1y$ чекори. Според тоа, кога Михаил поминува пат со должина xy, тогаш Мартин поминува пат со должина $0,9x\cdot 1,1y=0,99xy<xy$, што значи дека Мартин прв стигнал на училипте.

3. Еден квадрат е поделен со две прави на четири правоаголници. Колкава е страната на дадениот квадрат, ако се познати плоштините на три од четирите правоаголници кои што изнесуваат $48\,cm^2$, $96\,cm^2$ и $144\,cm^2$.

Пресекот е направен така што двата поголеми од споменатите три правоаголници имаат само едно заедничко теме.

Решение. Нека ги означиме страните на правоаголникот како на цртежот. Тогаш



$$ad=144, bc=48 \text{ и } bd=96,$$

а треба да го определиме ad. Ако ги помножиме првото и третото равенство добиваме $abcd=96\cdot 144$, т.е.

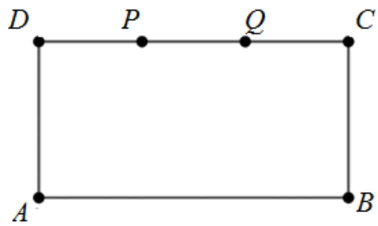
$$(ad)(bc)=96\cdot 144.$$

Но, $bc=48$ и со замена во претходното равенство наоѓаме $ad=288$. Според то, плоштината на квадратот е еднаква на

$$144+48+96+288=576\, cm^2,$$

што значи дека должината на неговата страна е $24\, cm$.

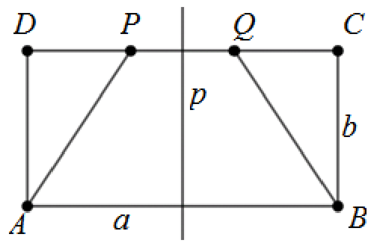
4. Даден е правоаголник $ABCD$. Со точките P и Q едната од поголемите страни е поделена на три еднакви дела (види цртеж).



а) Докажи дека трепезот $ABQP$ е рамнокрак.

б) Одреди го односот меѓу плоштините на правоаголникот и трапезот.

Решение. а) Нека p е симетралата на страните AB и CD. Бидејќи правата p е оска на симетрија на правоаголникот и $\overline{CQ}=\overline{QP}=\overline{PD}$, заклучуваме дека правата p е оска на симетрија на отсечката PQ, Сега, од својствата на осната симетрија следува $\overline{AP}=\overline{BQ}$ што значи дека трапезот $ABQP$ е рамнокрак.



б) Плоштината на правоаголникот е ab, а плоштината на рамнокракиот трапез е $\frac{1}{2}(a+\frac{a}{3})b=\frac{2}{3}ab$. Според тоа, бараниот однос е

$$ab:(\tfrac{2}{3}ab)=3:2.$$

VII одделение

1. Предната гума на еден мотоцикл се потрошува по поминати $25000\,km$, а задната по $15000\,kn$. По колку поминати километри треба да се сменат местата на гумите за тие истовремено да се потрошат? По колку поминати километри мотоциклистот мора да стави нови гуми?

Решение. За да се потрошат подеднакво гумите, мораат да поминат ист број километри на предното и на задното тркало. Да претпоставиме дека секоја гума поминува $x\,km$ на предното и $x\,km$ на задното тркало додека потполно не се потроши. Тогаш непознатата x го задоволува условот $\frac{1}{25000}+\frac{1}{15000}=\frac{1}{x}$, од каде добиваме $x=9375\,km$.

Мотоциклистот ќе ги смени местата на гумите по поминати $9375\,km$ km, а по $2\cdot 9375\,km 18750\,km$ ќе мора да стави нови гуми.

2. Јован и Гоце со своите синови биле на риболов. Јован уловил риби исто колку и неговиот син, а Гоце три пати повеќе од неговиот син. Вкупно уловиле 25 риби. Синот на Јован се вика Ристо. Како се вика синот на Гоце?

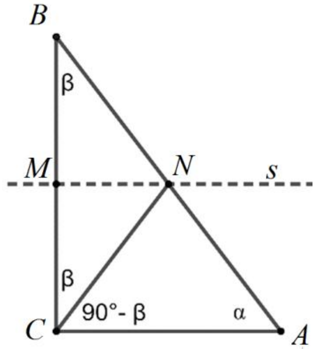
Решение. Нека Јован уловил x риби. Толку уловил и неговиот син Ристо. Ако синот на Гоце уловил y риби, тогаш Гоце уловил $3y$ риби. Според тоа, сите заедно уловиле $2x+4y$ риби, па затоа $2x+4y=25$. Последното равенство не е можно, бидејќи левата страна е делива со 2, а десната страна не е делива со 2.

Значи, на риболовот биле двајца татковци и двајца синови, но не биле четири различни луѓе. Ова е можно само ако едниот човек е истовремено и татко и син. Бидејќи Јован и Ристо се татко и син кои уловиле еднаков број риби, а Гоце уловил три пати повеќе риби од својот син, заклучуваме дека единствено Јован е во улога и на татко и на син, т.е. синот на Гоце се вика Јован. Навистина, во овој случај ја добиваме равенката $3x+x+x=25$, т.е. $x=5$, што значи дека Јова и Ристо уловиле по 5 риби, а Гоце уловил 15 риби.

3. Докажи дека во секој правоаголен триаголник, должината на тежишната линија кон хипотенузата е половина од хипотенузата.

Решение. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен со прав агол во темето C, $\measuredangle A=\alpha$ и $\measuredangle B=\beta$.

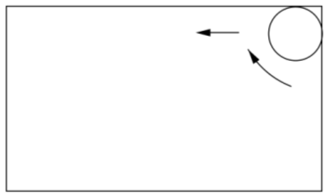
Нека M е средината на катетата BC и s е симетралата на страната BC. Симетралата s ја сече хипотенузата AC во точката N. Бидејќи N е точка од симетралата s, важи $\overline{BN} = \overline{CN}$. Според тоа, $\triangle BCN$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BCN = \beta$. Сега,



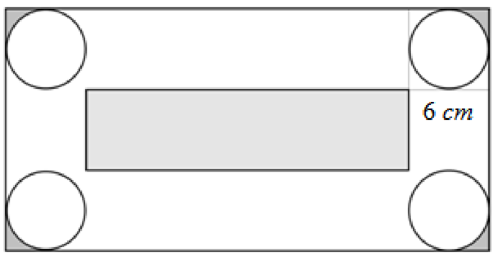
$$\measuredangle A = \alpha = 90^\circ - \beta = \measuredangle ACN,$$

па затоа $\triangle CAN$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AN} = \overline{CN}$. Според тоа, $\overline{BN} = \overline{CN} = \overline{AN}$, што значи дека точката N е средина на хипотенузата AB. Конечно CN е тежишната линија повлечена кон хипотенузата и нејзината должина е еднаква на половина од должината на хипотенузата.

4. Круг со радиус $3cm$ од внатрешната страна на правоаголникот должина $25cm$ и ширина $20cm$ се тркала по неговите страни (види цртеж). Одреди ја плоштината на оној дел од правоаголникот кој не се покрива при тркалањето на кругот.



Решение. Јасно, при тркалањето на кругот нема да се покријат осенчените делови од аглите на правоаголникот. Понатаму, бидејќи дијаметарот на кругот е $6cm$, при неговото тркалање ќе се покријат сите останати точки од правоаголникот кои од неговите страни се на растојание помало или еднакво од $6cm$. Значи, при тркалањето на кругот нема да се покрие осенчениот правоаголник чии страни се еднакви на $25-2\cdot 6=13cm$ и $20-2\cdot 6=8cm$. Конечно, плоштината на непокриениот дел од правоаголникот ќе биде еднаква на



$$8\cdot 13+6^2-\pi\cdot 3^2=140-9\pi.$$

VIII одделение

1. Докажи дека изразот $3^{2020}-1$ е делив со 80.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$\begin{aligned}3^{2020}-1&=(3-1)(1+3+3^2+\ldots+3^{2018}+3^{2019})\\&=2\cdot[(1+3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6+3^7)+\ldots\\&\quad+(3^{2016}+3^{2017}+3^{2018}+3^{2019})]\\&=2\cdot(1+3+3^2+3^3)(1+3^4+\ldots+3^{2016})\\&=2\cdot 40\cdot(1+3^4+\ldots+3^{2016})\\&=80\cdot(1+3^4+\ldots+3^{2016}),\end{aligned}$$

т.е. $80\,|\,3^{2020}-1$.

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}3^{20}-1&=(3^4)^{505}-1=(3^4-1)((3^4)^{504}+(3^4)^{503}+\ldots+3^4+1)\\&=80\cdot((3^4)^{504}+(3^4)^{503}+\ldots+3^4+1),\end{aligned}$$

т.е. $80\,|\,3^{2020}-1$.

Трет начин. Имаме:

$$\begin{aligned}&3\equiv 3(\bmod 80)\\&3^2\equiv 9(\bmod 80)\\&3^3\equiv 27(\bmod 80)\\&3^4\equiv 1(\bmod 80)\\&(3^4)^{505}\equiv 1^{505}=1(\bmod 80)\end{aligned}$$

т.е. $3^{2020}\equiv 1(\bmod 80)$, што значи $80\,|\,3^{2020}-1$.

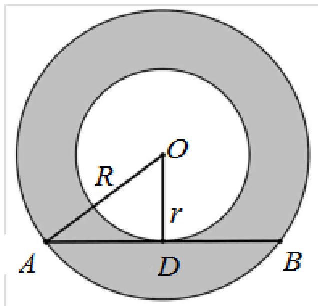
2. Радмила на пазар донела корпа со јајца. На првиот купувач му продала половина од вкупниот број јајца и уште половина јајце. На вториот, му продала половина од преостанатите јајца и уште половина јајце. Слично, на третиот му продала половина од преостанатите јајца и уште половина јајце. Потоа, во корпата останало едно јајце. Колку јајца донела Радмила на пазарот?

Решение. *Прв начин*. Пред третиот купувач да купи половина јајце, во корпата имало 1,5 јајца, а пред да купи половина од јајцата, во корпата имало 3 јајца. Пред вториот купувач да купи половина јајце, во корпата имало 3,5 јајца, а пред да купи половина од јајцата, во корпата имало 7 јајца. Пред првиот купувач да купи половина јајце, во корпата имало 7,5 јајца, а пред да купи половина од јајцата, во корпата имало 15 јајца. Значи, Радмила на пазарот донела 15 јајца.

Втор начин. Нека во корпата на Радмила имало x јајца. Откако, првиот купувач купил половина од вкупниот број на јајца и уште половина јајце, во корпата останале $x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$ јајца. Откако, вториот купувач купил половина од преостанатите јајца и уште половина јајце, во корпата останале $\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{4}$ јајца. Откако, третиот купувач купул половина од преостанатите јајца и уште половина јајце, во корпата останале $\frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{x-7}{8}$ јајца. Затоа $\frac{x-7}{8}=1$, т.е. $x=15$. Конечно, Радмила на пазарот донела 15 јајца.

3. Нека се дадени две концентрични кружници и нека тетива на поголемата кружница што ја допира помалата кружница има должина $2cm$. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен!

Решение. Нека со точката O го означиме центарот на дадените кружници, со AB дадената тетива и со D ја означиме средината на AB.



Радиусите на кружниците се $R=\overline{OA}$ на поголемата и $r=\overline{OD}$ на помалата. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle ADO$ добиваме $R^2-r^2=\overline{AD}^2=1$. Плоштината на прстенот е

$$P=R^2\pi-r^2\pi=(R^2-r^2)\pi=1\cdot\pi=\pi\,cm^2.$$

4. Докажи дека во секој триаголник ABC важи формулата

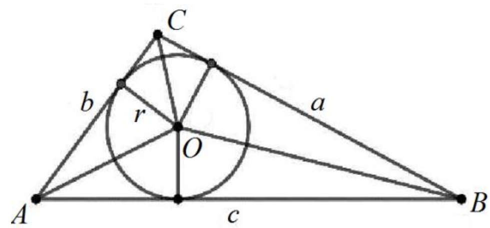
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

каде h_a,h_b,h_c се висините, а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC (види цртеж).

Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците ABO, ACO, BCO. Висината на секој од овие триаголници е еднаква на r, па затоа

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}.$$



Сега, ако земеме предвид дека $\frac{2P}{a} = h_a, \frac{2P}{b} = h_b, \frac{2P}{c} = h_c$, од последното равенство последователно добиваме

$$\frac{ar}{2P} + \frac{br}{2P} + \frac{cr}{2P} = 1,$$

$$\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1,$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

што и требаше да се докаже.

IX одделение

1. Докажи дека за произволни реални броеви x, y и z важи неравенството:

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 &= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\\ &= x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2\\ &= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

т.е.

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$.

2. Нека a и b се реални броеви такви што $a > b > 0$ и $a^2+b^2 = 6ab$. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{a+b}{a-b}$.

Решение. Равенството $a^2+b^2 = 6ab$ е еквивалентно со равенствата

$$(a+b)^2 = 8ab \text{ и } (a-b)^2 = 4ab.$$

Сега, бидејќи $a > b > 0$ добиваме $\frac{a+b}{a-b} > 0$, па затоа

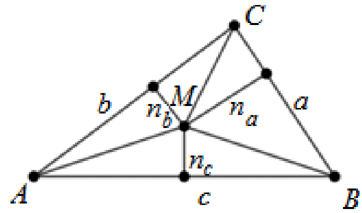
$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}=\sqrt{\frac{8ab}{4ab}}=\sqrt{2}\,.$$

3. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана точка M. Должините на нормалите од точката M до страните BC, CA, AB да ги означиме соодветно со n_a, n_b, n_c. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини во триаголникот.

Решение. Отсечките MA, MB, MC го делат триаголникот ABC на три триаголници со плоштини $\frac{1}{2}an_a, \frac{1}{2}bn_b, \frac{1}{2}cn_c$. Збирот на овие три плоштини е еднаков на плоштината P на триаголникот ABC, т.е.



$$\frac{1}{2}an_a+\frac{1}{2}bn_b+\frac{1}{2}cn_c=P\,.$$

Но,

$$\frac{2P}{a}=h_a,\ \frac{2P}{b}=h_b,\ \frac{2P}{c}=h_c\,,$$

па од последното равенство последоватрелно добиваме

$$\frac{a}{2P}n_a+\frac{b}{2P}n_b+\frac{c}{2P}n_c=1$$

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

што и требаше да се докаже.

4. Радиусите на концентричните кружници кои формираат кружен прстен прикажан на цртежот десно имаат должини r и $2r$. Одреди го односот на плоштините на осенчениот и неосенченит дел од кружниот прстен.

Решение. Нека A, B и C се заеднички точки на поголемата кружница и тангентите t_1 и t_2 на помалата кружница и нека T е точка во која t_1 ја допира помалата кружница. Бидејќи $\overline{OB}=2\overline{OT}$, важи $\measuredangle OBT=30^\circ$, па според тоа $\measuredangle BAC=60^\circ$. Имено,

$$\measuredangle BAC=\measuredangle OAB+\measuredangle OAC=2\measuredangle OAB=2\measuredangle OAT=2\measuredangle OBT\,.$$

Да забележиме дека при првото равенство е искористено дека правата OA е оска на симетрија на целата геометриска конфигурација. Од истата симетрија имаме дека $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Значи, триаголникот ABC е рамностран, па отсечоците на поголемиот круг се еднакви. Со оглед на тоа што T е средна точка на отсечката AB, заклучуваме дека помалата кружница е впишана во траголникот ABC. Следствено, обоениот дел на кружниот прстен е третина од целиот прстен, па плоштиите на обоениот и необоениот дел на овој прстен се однесуваат како 1:2.