Регионален натпревар 1980

I година

1. Некој човек, секој ден, прво трошел по 100 денари, а потоа заработувал по $\frac{1}{3}$ од останатите. По три дена тој утврдил дека почетната сума пари се зголемила за два пати.

Колку пари имал човекот на почетокот?

Решение. Нека човекот на почетокот имал x денари. На крајот од првиот ден имал

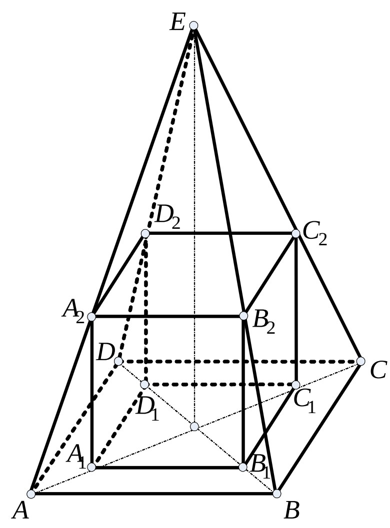
$$x-100+\tfrac{x-100}{3}=\tfrac{4}{3}(x-100) \text{ денари.}$$

На крајот од вториот ден имал $\frac{4}{3}(\frac{4}{3}(x-100)-100)$ денари. На крајот од третиот ден имал $\frac{4}{3}(\frac{4}{3}(\frac{4}{3}(x-100)-100)-100)$ денари. Според тоа:

$$\tfrac{4}{3}(\tfrac{4}{3}(\tfrac{4}{3}(x-100)-100)-100)=2x.$$

Решението на ова равенка е $x=1480$ денари.

2. Во правилна четиристрана пирамида е впишана коцка, така што 4 нејзини темиња лежат на рабовите на пирамидата, а останатите 4 на основата на пирамидата. Определи ја страната на коцката, ако страната на пирамидата е a а висината е H.



Решение. Нека коцката $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, со раб y, е впишана во пирамидата $ABCDE$, со раб a и висина H, со дадениот услов, како на цртежот. Веднаш се гледа дека $\triangle ACE \sim \triangle A_2C_2E$, од што следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A_2C_2}}=\frac{a\sqrt{2}}{y\sqrt{2}}=\frac{H}{H-y} \text{ т.е. } a(H-y)=Hy.$$

Од ова равенство следува $y=\frac{aH}{a+H}$.

3. Да се најде најмалиот природен број, кој поделен со секој од броевите $2,3,4,5,6$ и 7 дава остаток 1.

Решение. Ако n е бараниот број, тогаш $n-1$ е најмалиот број кој се дели со $2, 3, 4, 5, 6$ и 7, т.е. $n-1$ е NZS (најмалиот заеднички содржател) на $2,3,4,5,6$ и 7. Според тоа,

$$n=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1=421$$

4. Да се упрости алгебарскиот израз:

$$\frac{(m^2-\frac{1}{n^2})^m\cdot(n+\frac{1}{m})^{n-m}}{(n^2-\frac{1}{m^2})^n(m-\frac{1}{n})^{m-n}}.$$

Решение. Дадениот израз да го означиме со J. Имаме:

$$\begin{aligned}J&=\frac{(m^2n^2-1)^m\cdot(mn+1)^{n-m}\cdot m^{2n}\cdot n^{m-n}}{(m^2n^2-1)^n\cdot(mn-1)^{m-n}\cdot n^{2m}\cdot m^{n-m}}\\&=\frac{(m^2n^2-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}}\cdot\frac{(mn+1)^{n-m}\cdot m^{2n-n+m}}{n^{2m-m+n}}\\&=\frac{(mn-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}}\frac{(mn+1)^{m-n}}{(mn+1)^{m-n}}\frac{m^{m+n}}{n^{m+n}}=(\frac{m}{n})^{m+n}.\end{aligned}$$

II година

1. Еден возач патувал од местото A до местото B, оддалечени 800 km едно од друго. Наместо да вози со планираната брзина од 80 km/h, на првата половина од својот пат, возачот бил принуден да вози со брзина $(80-m)$ km/h. Ако на втората половина од својот пат возачот вози со брзина $(80+m)$ km/h, дали ќе стигне на време во B?

Решение. Нека t_1 е времето со кое возачот ја поминал првата половина, а t_2 времето со кое ја поминал втората половина на патот. Тогаш

$$400=(80-m)t_1 \quad \text{и} \quad 400=(80+m)t_2.$$

Бидејќи $80-m<80+m$, следува дека $t_1>t_2$. Собирајќи ги горните равенства, се добива

$$800=(80-m)t_1+(80+m)t_2=80(t_1+t_2)-m(t_1-t_2),$$

Од што следува дека

$$80(t_1+t_2)>800, \text{ т.е. } t_1+t_2>10\,\text{h}.$$

Кога возачот би возел со планираната брзина, би стигнал во B за $\frac{800}{80}=10\ h$. Значи, возачот ќе задоцни.

2. Дадени се триаголникот ABC, кружницата k опишана околу него и точките H_1, H_2 и H_3 што се пресечни точки на висините на триаголникот ABC со k. Докажи дека ортоцентарот H на триаголникот ABC се совпаѓа со центарот на впишаната кружница на триаголникот $H_1H_2H_3$.

Решение. Да го разгледаме цртежот. Доволно е да се докаже дека се исполнети следните равенства

$$\measuredangle H_3H_2B=\measuredangle BH_2H_1$$

$$\measuredangle H_2H_1A=\measuredangle AH_1H_3$$

$$\measuredangle H_1H_3C = \measuredangle CH_3H_2 .$$

Ќе докажеме дека $\measuredangle H_3H_2B = \measuredangle BH_2H_1$, а другите равенства се докажуваат на ист начин. Имаме:

$$\measuredangle H_3H_2B = \measuredangle H_3CB$$

како периферијски агли над ист лак. Понатаму,

$$\measuredangle H_3CB = 90^\circ - \beta$$

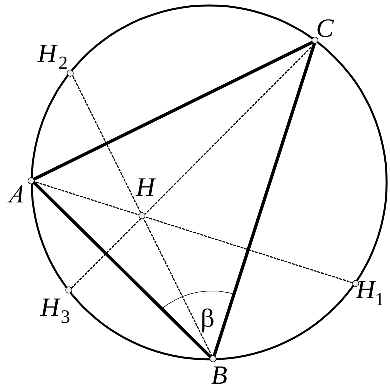
од правоаголниот $\triangle BNC$, па

$$90^\circ - \beta = \measuredangle BAH_1$$

од правоаголниот $\triangle BMA$ и

$$\measuredangle BAH_1 = \measuredangle BH_2H_1$$

периферијски агли над ист лак.



3. Над страните на триаголникот ABC се конструирани произволни паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажи дека постои триаголник чии страни како вектори се еднакви со векторите $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$.

Решение. Ќе покажеме дека $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \vec{0}$, од што ќе следува дека бараниот триаголник постои, со забелешка дека таков триаголник постои кога векторите $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$ не се колинеарни.

Од условот на задачата следува дека

$$\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} ,$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{AA_2} ,$$

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BB_2} .$$

Тогаш ,

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BB_2} = \vec{0} .$$

4. Да се пресмета вредноста на изразот

$$(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{n+4} + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{n+4} + (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{n} + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{n} ,$$

(i е имагинарна единица).

Решение. Да го означиме изразот со A . Тогаш

$$A = (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^n[(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^4 + 1] + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})[(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^4 + 1] .$$

Да ги пресметаме изразите во средните загради:

$$(\tfrac{1\pm i}{\sqrt{2}})^4 + 1 = (\tfrac{(1\pm i)^2}{2})^2 + 1 = (\tfrac{1\pm 2i-1}{2})^2 + 1 = (\pm i)^2 + 1 = 0 .$$

Според тоа, $A=0$.

III година

1. Определи ги вредностите на k за кои равенката

$$x^3-(k^2-k+7)x-(3k^2-3k-6)=0$$

има корен -1. За така најдените вредности на k реши ја равенката.

Решение. За $x=-1$ равенката се сведува на $k^2-k-6=0$, која има корени $k_1=-2$ и $k_2=-3$. Заменувајќи го k со $k_1=-2$ или со $k_2=-3$ добиваме една иста равенка

$$x^3-13x-12=0.$$

Оваа равенка има корен $x_1=-1$, па делејќи ја со $x+1$, добиваме

$$x^3-13x-12=(x+1)(x^2-x-12).$$

Решавајќи ја равенката $x^2-x-12=0$ се добиваат другите две решенија на равенката $x^3-13x-12=0$, а тоа се $x_2=-3$ и $x_3=4$.

2. Реши ја равенката

$$3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9.$$

Решение. Равенката ја логаритмираме со логаритам со основа 3, од каде се добива равенката

$$\log_x 3+(\log_3 x)^2=2.$$

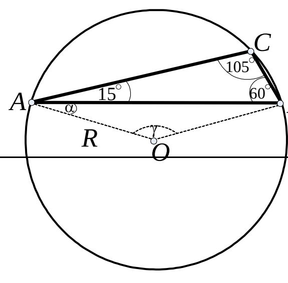
Ставајќи $\log_3 x=u$ и користејќи го равенството

$$\log_a b=\tfrac{1}{\log_b a}$$

се добива равенката $\frac{1}{u}+u^2=2$, т.е. $u^3-2u+1=0$. Оваа равенка има решение $u_1=1$ и користејќи го методот како во претходната задача, се добиваат другите две решенија $u_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $u_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, решенија на дадената равенка се $x_1=3$, $x_2=3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ и $x_3=3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

3. Во кружница со радиус R вписан е триаголник со агли 15° и 60°. Да се најде плоштината на триаголникот.

Решение. Од тоа што централниот агол е два пати поголем од периферискиот агол над ист лак



следува дека аголот γ од цртежот е 150°. Тогаш $\alpha = 15^\circ$.

Од рамнокракиот триаголник ΔAOB следува дека $\overline{AB} = 2R\cos 15^\circ$. Од рамнокракиот триаголник $\triangle AOC$ следува дека

$$\overline{AC} = 2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

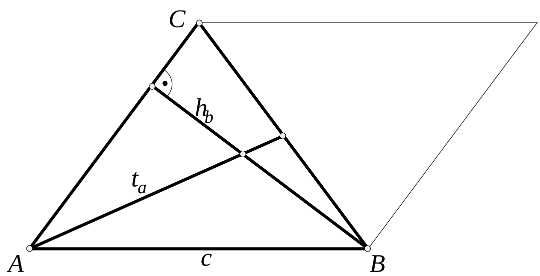
Според тоа

$$P = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 15^\circ}{2} = \frac{2R\cos 15^\circ \cdot R\sqrt{3}\cdot\sin 15^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}\sin 30^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

4. Конструирај триаголник ABC со познати: страна c, висина h_b и тежишна линија t_a .

Решение. 1. ***Анализа.*** Да претпоставиме дека задачата е решена и да го разгледаме паралелограмот $ABCD$ од цртежот, каде што $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$.

Од тоа што дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат, следува дека дијагоналата $\overline{AD} = 2t_a$. Според тоа, доволно е да конструираме параллелограм со страна C, дијагонала $2t_a$ и висина кон другата страна h_b.



2. ***Конструкција.***

1°. $p \parallel q$, растојанието меѓу p и q е h_b.

2°. на p избираме произволна точка A,

3°. цртаме кружница $k(A,c)$.

4°. $k \cap q = B$

5°. цртаме кружница $k_1(A, 2t_a)$,

6°. $k_1 \cap q = D$,

7°. M, средината на AD,

8°. $C = BM \cap p$.

3. ***Доказ.*** Доказот следува од анализата и конструкцијата.

4. ***Дискусија.*** Од конструкцијата се гледа дека задачата нема решение ако и само ако $2t_a < h_b$ или $c < h_b$ или $2t_a = h_b = c$.

Ако $2t_a < h_b$ и $c > h_b$ задачата има две решенија, а во останатите случаи во кои има, има единствено решение.

IV година

1. Докажи дека равенството $a^2+1=2b$ повлекува $b \geq a$, и користејќи го овој резултат, да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}.$$

Решение. Од $a^2+1=2b$ следува дека

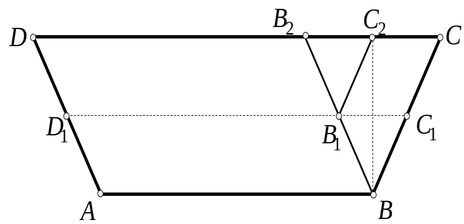
$$a^2-2a+1=2(b-a)\text{, т.е. } (a-1)^2=2(b-a).$$

Бидејќи $(a-1)^2 \geq 0$ следува дека $b \geq a$. Од системот равенки и горниот заклучок добиваме $x \geq z \geq y \geq x$, т.е. $x=y=z$. Тогаш од $x^2+1=2x$ следува дека системот има единствено решение $x=y=z=1$.

2. Канал за вода со должина од 5 m може да прими вода од $1,440\,\text{m}^3$. Напречниот пресек на каналот е рамнокрак трапез чиј крак е 52 cm и висина 48 cm.

Колку вода може да прими тој канал ако се наполни до половина висина?

Решение. На цртежот, трапезот $ABCD$ го претставува пресекот на каналот, $BB_2 \parallel AD$, B_1 е средина на BB_2, $B_1C_1 \parallel AB$ и C_2 е подножната точка на висината, спуштена од B. Бидејќи $\triangle BCB_2$ е рамнокрак, точката C_2 е средина на CB_2. Според тоа, $B_1C_1 \parallel BC$ и



$$\overline{CC_2}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{C_2B}^2}=\sqrt{0,52^2-0,48^2}=0,2\text{ m}.$$

Нека V е волуменот на водата кога каналот е наполнет со вода до половина на висината, а $V_1=1,440\ m^3$ кога е полн. Бидејќи трапезите ABC_1D_1 и $D_1B_1C_2D$ се складнии, $V_1=2V+P\cdot 5$ каде што P е плоштината на паралелограмот $B_1C_1CC_2$:

$$P=\overline{CC_2}\cdot\frac{\overline{C_2B}}{2}=0,2\cdot 0,24=0,048\text{ m}^2.$$

Според тоа,

$$V=\tfrac{1,44-0,048\cdot 5}{2}=0,6\text{ m}^3.$$

3. Да се докаже дека низ точката $A(4,3)$ можат да се повлечат две прави, кои отсекуваат од првиот квадрант триаголници со иста плоштина, еднаква на 27. Потоа да се најде аголот меѓу тие две прави.

Решение. Произволна права низ точката A има равенка

$$y = k(x-4)+3,$$

која има пресечни точки со x и y - оската: $A_x(4-\frac{3}{k},0)$ и $A_y\left(0,3-4k\right)$.

Од условот на задачата следува дека

$$\frac{(4-\frac{3}{k})(3-4k)}{2} = 27.$$

Решавајќи ја ова равенка, се добива $k_1 = -\frac{3}{8}$ и $k_2 = -\frac{3}{2}$.

Нека аголот меѓу тие прави е α. Тогаш

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} = \frac{18}{25}$$

4. Во аритметичка низа се дадени $a_n = m$ и $a_m = n$. Да се најде членот a_p.

Решение. Бидејќи низата е аритметичка,

$$a_n = a_m + (n-m)d,$$

од каде што следува дека $d = -1$. Според тоа,

$$a_p = a_n + (p-n)(-1) = m+n-p.$$