13-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2017 год

1. Неравнобедренный остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Пусть H — точка пересечения высот этого треугольника, а M — середина стороны AB. На дуге AB окружности ω, не содержащей точку C, взяты точки P и Q такие, что $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ < \sphericalangle ACQ$. Пусть R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на прямые CQ и CP соответственно. Докажите, что точки P, Q, R и S лежат на одной окружности, а точка M является центром этой окружности. *(М. Кунгожин)*

Решение. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, а L — точка пересечения прямых CC_1 и PQ. Без ограничения общности будем считать, что точка H лежит внутри угла ACQ. Заметим, что точки C, A_1, B_1, R, S и H лежат на окружности с диаметром CH. Из условия задачи понятно, что $PQ \parallel AB$. Поэтому $\sphericalangle HLQ = 90^\circ$. Значит, точки H, R, Q и L лежат на окружности с диаметром HQ. Следовательно, $\sphericalangle CSR = \sphericalangle CHR = \sphericalangle RQL = \sphericalangle RQP$, то есть точки P, Q, R и S лежат на одной окружности.

Так как $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle BB_1A = 90^\circ$, то $MA_1 = MB_1 = AB/2$. Поэтому точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1.

Также из равенств $\sphericalangle A_1CR = \sphericalangle BCQ = \sphericalangle ACP = \sphericalangle B_1CS$ следует, что A_1B_1SR — равнобочная трапеция. Следовательно, серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1 и RS совпадают. Значит M лежит на серединном перпендикуляре к RS. Но с другой стороны, так как $APQB$ — равнобочная трапеция, M также лежит на серединном перпендикуляре к PQ. Следовательно, M — центр окружности, на которой лежат точки P, Q, R и S. (matol.kz)

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x))$ для любых вещественных x и y. *(И. Воронович)*

Решение. Ответ: $f(x) = x$; $f(x) \equiv 0$; $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq -a^2, \\ a, & x = -a^2 \end{cases}$ с произвольным $a \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

Подставляя $y = 0$ в данное уравнение

$$(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x)), \tag{1}$$

находим, что $f(0) = 0$. Заменяя y на $-y$ в (1), получаем $(x + y^2)f(-yf(x)) = -xyf(y^2 + f(x)) = -(x + y^2)f(yf(x))$, откуда

$$(x + y^2)\left(f(yf(x)) + f(-yf(x))\right) = 0 \tag{2}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Обозначим $A = \{x | f(x) = 0\}$. Рассмотрим следующие случаи:

(i) $A = \{0\}$. Положим $x = -y^2$ в (1), тогда $-y^3 f(y^2 + f(-y^2)) = 0$, откуда $y^2 + f(-y^2) = 0$, т.е. $f(t) = t$ при всех $t \leqslant 0$. При $x = 1$ уравнение (2) принимает вид $f(-yf(1)) = -f(yf(1))$, или (поскольку $f(1) \neq 0$) $f(-x) = -f(x)$ при всех x. Следовательно, $f(x) = x$ при всех вещественных x. Легко видеть, что эта функция удовлетворяет нашему уравнению.

(ii) $A = \mathbb{R}$, тогда $f(x) = 0$ при всех x, что, очевидно, является решением (1).

(iii) Пусть $A \neq \{0\}$, $A \neq \mathbb{R}$, то есть, существуют $b \neq 0$, $d \neq 0$ такие, что $f(b) = 0$ и $f(d) \neq 0$; обозначим $f(d) = a$. Подставляя $x = b$ в (1), получим $yf(y^2) = 0$, т.е. $f(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Подставляя затем $x = d$ в (2), находим, что $f(ay) + f(-ay) = 0$, если $y^2 + d \neq 0$. Одно из чисел $f(ay)$, $f(-ay)$ равно нулю, так как $f(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Отсюда при $d > 0$ получаем $f(ay) = f(-ay) = 0$ для всех y, вопреки предположению $f(d) \neq 0$. Таким образом, $d < 0$ и единственным возможным ненулевым значением функции f может быть $f(\pm ay)$ при y, удовлетворяющем условию $y^2 + d = 0$, т.е. $f(\pm a\sqrt{-d})$. Вместе с условием $f(d) \neq 0$ это значит, что $d = \pm a\sqrt{-d}$, то есть $d = -a^2$.

Остаётся проверить, является ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq -a^2, \\ a, & x = -a^2 \end{cases}$ решением уравнения. Если $x \neq -a^2$, уравнение (1) принимает вид $(x + y^2)f(y \cdot 0) = xyf(y^2)$, или $0 = 0$. Пусть теперь $x = -a^2$;

тогда нам нужно проверить, выполняется ли равенство $(y^2-a^2)f(ay) = -a^2yf(y^2+a)$ при всех y. Заметим, что левая часть этого равенства равна нулю в любом случае ($f(ay)=0$ при $y\neq -a$ и $y^2-a^2=0$ при $y=-a$). Таким образом, нам нужно, чтобы было $yf(y^2+a)=0$ при всех y. Чтобы это было так, у уравнения $y^2+a=-a^2$ не должно быть вещественного решения $y\neq 0$. Значит, $-a^2-a\geqslant 0$, то есть $a\in(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$ (напомним, что $a\neq 0$). (matol.kz)

3. Прямоугольник на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 разбит на фигурки домино (прямоугольники, состоящие из двух клеток с общей стороной). Докажите, что все вершины клеток на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждых двух вершин, находящихся на расстоянии 1, выполнялось следующее условие: эти вершины разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае. *(А. Голованов)*

Решение. Мы покажем, что существует требуемая раскраска специального вида. Именно, присвоив цветам номера 1, 2 и 3, мы назовём клетку *правой*, если эти цвета встречаются в таком порядке при обходе клетки по часовой стрелке, и *левой* — в противном случае. Тогда, если раскрасить клетки прямоугольника $m\times n$ в шахматном порядке, то существует раскраска требуемого вида, в которой все черные клетки правые, а все белые левые; такую раскраску мы назовём *регулярной*.

Заметим, что регулярная раскраска любой клетки нашего прямоугольника однозначно определена цветом любой из её вершин. Действительно, если эта клетка, скажем, чёрная (и поэтому должна быть правой с точки зрения раскраски вершин), мы можем начать с вершины, цвет которой известен и обойти клетку по часовой стрелке, прибавляя к номеру цвета $1 \bmod 3$, если двигаемся по стороне фигурки домино, и не меняя цвет в противном случае.

Если две клетки имеют общую сторону, применение этой процедуры к одной из их общих вершин даёт один и тот же цвет для другой общей вершины: одна из двух клеток чёрная, а другая белая, а движение по общей стороне является обходом по часовой стрелке для одной клетки и против часовой стрелки для другой. Поэтому если клетка с одной непокрашенной вершиной граничит с двумя клетками, у которых все вершины покрашены регулярным образом, мы можем покрасить последнюю вершину так, чтобы получилась регулярная раскраска. Если клетка с двумя непокрашенными вершинами граничит с клеткой, вершины которой регулярно покрашены, мы можем докрасить две вершины клетки, так, чтобы получившаяся раскраска была регулярной.

Применяя эту процедуру, мы можем покрасить вершины всех клеток прямоугольника. Сначала с помощью шахматной раскраски определим, какие клетки должны быть левыми, а какие правыми. После этого покрасим левую нижнюю клетку, выбрав произвольным образом цвет левого нижнего угла. Это позволит нам поочерёдно раскрасить все вершины клеток нижнего ряда. Затем каждый следующий ряд мы покрасим, начиная с левой клетки: самая левая клетка примыкает к одной клетке, у которой все вершины уже покрашены, а каждая последующая — к двум. (matol.kz)

4. Первые k членов a_1, a_2, …, a_k последовательности (a_n) — различные натуральные числа, а при $n>k$ число a_n — наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких (возможно, одного) из чисел a_1, a_2, …, a_{n-1}. Докажите, что $a_n=2a_{n-1}$ при всех достаточно больших n. *(А. Голованов)*

Решение. Для каждого $n\geqslant k$ рассмотрим множество всех натуральных чисел, не превосходящих $a_1+a_2+\dots+a_n$, и те из них, которые не являются суммами нескольких элементов множества $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, назовём *дырками*. Если множество дырок непусто, то a_{n+1} — наименьшая из них, в противном случае $a_{n+1}=a_1+a_2+\dots+a_n+1$. Докажем, что с увеличением n на 1 количество дырок уменьшается хотя бы на 1.

Заметим, что если число $t\leqslant S=a_1+a_2+\dots+a_n$ является суммой одного или нескольких из чисел a_1, a_2, …, a_n, то число $S-t$ тоже является такой суммой: это сумма всех a_i, не входящих в сумму, равную t.

То, что a_{n+1} — наименьшая дырка, означает, что все числа от 1 до $a_{n+1}-1$ являются суммами нескольких из чисел a_1, a_2, …, a_n. Поэтому все числа от $a_1+\dots+a_n-a_{n+1}$ до $a_1+\dots+a_n$

тоже являются такими суммами. Добавляя a_{n+1}, получаем, что все числа от $a_1 + \dots + a_n$ до $a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$ являются суммами каких-то из чисел a_1, a_2, …, a_{n+1}. Таким образом, при замене n на $n+1$ новых дырок не появилось, а хотя бы одна старая (собственно a_{n+1}) пропала, что и требовалось доказать.

Следовательно, начиная с какого-то момента дырок не останется.

Итак, при всех достаточно больших n выполнено равенство $a_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + 1$. Тогда $a_{n+2} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + 1 = (a_1 + \dots + a_n + 1) + a_{n+1} = 2a_{n+1}$, что и требовалось доказать. (matol.kz)

5. Для каждого натурального k обозначим через $C(k)$ сумму всех различных простых делителей числа k. Например, $C(1) = 0$, $C(2) = 2$, $C(45) = 8$. Найдите все натуральные n, для которых $C(2^n + 1) = C(n)$. *(Н. Седракян)*

Решение. Ответ: $n = 3$.

Для каждого натурального $t > 1$ обозначим $P(t)$ наибольший простой делитель числа t.

Выделим из натурального n наибольший нечётный делитель: $n = 2^k m$. Тогда, $2^n + 1 = 2^{2^k m} + 1 = a^m + 1$, где $a = 2^{2^k}$. Если $k > 0$, то есть n чётно, то $C(n) = C(m) + 2$, а $C(2^n + 1) = C(a^m + 1)$.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. При каждом простом $p > 2$ имеем $P\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = p$ или $P\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) \geqslant 2p + 1$.

Доказательство. Пусть $P\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = q$. По малой теореме Ферма q делит $2^{q-1} - 1$, следовательно, и $(a^{2p} - 1, a^{q-1} - 1) = a^{(2p, q-1)} - 1$. Наибольший общий делитель $(2p, q-1)$ чётен и, следовательно, равен $2p$ или 2. В первом случае $q - 1$ кратно $2p$, откуда $q \geqslant 2p + 1$. Во втором случае $a^2 - 1$ кратно q, но $a - 1$ не кратно q (так как $a^p + 1$ кратно q), то есть $a \equiv -1 \pmod q$. Тогда $\frac{a^p+1}{a+1} = a^{p-1} - \dots + 1 \equiv p \pmod q$, то есть $p = q$. □

Лемма 2. Если p_1 и p_2 — различные нечётные простые числа, то $P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right)$ не равно $P\left(\frac{a^{p_2}+1}{a+1}\right)$.

Доказательство. Если $P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) = P\left(\frac{a^{p_2}+1}{a+1}\right) = q$, то оба числа $a^{2p_1} - 1$ и $a^{2p_2} - 1$ кратны q, следовательно, на q делится $(a^{2p_1} - 1, a^{2p_2} - 1) = a^{(2p_1, 2p_2)} - 1 = a^2 - 1$ и, значит, $a + 1$, но тогда $p_1 = q$ и $p_2 = q$ — противоречие. □

Перейдём теперь к решению задачи. Пусть n имеет нечётные простые делители p_1, …, p_s. По лемме 2 имеем

$$C(2^n + 1) \geqslant P\left(\frac{a^{p_1} + 1}{a + 1}\right) + \dots + P\left(\frac{a^{p_s} + 1}{a + 1}\right)$$

Если $C(2^n + 1) > P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) + \dots + P\left(\frac{a^{p_s}+1}{a+1}\right)$, то у $2^n + 1$ есть ещё хотя бы один простой делитель, кроме сложенных в правой части, то есть

$$C(2^n + 1) \geqslant P\left(\frac{a^{p_1} + 1}{a + 1}\right) + \dots + P\left(\frac{a^{p_s} + 1}{a + 1}\right) + 3 \geqslant p_1 + \dots + p_m + 3 > C(n).$$

Поэтому достаточно разобрать случай равенства:

$$C(2^n + 1) = P\left(\frac{a^{p_1} + 1}{a + 1}\right) + \dots + P\left(\frac{a^{p_s} + 1}{a + 1}\right).$$

Если в этом случае существует i, для которого $P\left(\frac{a^{p_i}+1}{a+1}\right) \neq p_i$, то $C(2^n + 1) \geqslant p_1 + \dots + p_m + p_i + 1 > C(n)$.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда $P\left(\frac{a^{p_i}+1}{a+1}\right) = p_i$ при всех i. В ней имеем $C(n) = C(2^n + 1) = p_1 + \dots + p_s$, поэтому n нечётно и $a = 2$. Но $2^p \equiv 2 \pmod p$ при всех нечётных p, поэтому при $p > 3$ число $2^p + 1$ не кратно p. Таким образом, $s = 1$, $p = 3$, $n = 3^r$ с некоторым натуральным r. Тогда число $2^n + 1 = 2^{3^r} + 1$ должно быть степенью тройки. Однако уже при $r = 2$ и, следовательно, при всех $r \geqslant 2$ это число кратно 19. Таким образом, остаётся только случай $n = 3$, очевидно, удовлетворяющий условию задачи. (matol.kz)

6. В пространстве даны правильный тетраэдр $ABCD$ и произвольные точки M и N. Докажите неравенство
$$MA \cdot NA + MB \cdot NB + MC \cdot NC \geqslant MD \cdot ND.$$
(Тетраэдр называется правильным, если все шесть его рёбер равны.) *(Н. Седракян)*

<u>*Решение.*</u> Нам потребуется

Лемма 1. Для любых различных точек A, B, C и D выполняется неравенство
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

Доказательство. На луче DA выберем точку A_1 так, что $DA_1 = \frac{1}{DA}$. Аналогично на лучах DB и DC выберем точки B_1 и C_1. Так как $\frac{DA_1}{DB} = \frac{DB_1}{DA} = \frac{1}{DA \cdot DB}$, из подобия треугольников DAB и DB_1A_1 имеем $A_1B_1 = \frac{AB}{DA \cdot DB}$. Аналогично $B_1C_1 = \frac{BC}{DB \cdot DC}$ и $C_1A_1 = \frac{CA}{DC \cdot DA}$ (1). Подставляя эти равенства в неравенство треугольника $A_1B_1 + B_1C_1 \geqslant A_1C_1$, получаем $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$. □

Лемма 2. На плоскости даны точки M, N и треугольник ABC. Тогда
$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} \geqslant 1. \qquad (*)$$

Доказательство. В плоскости треугольника ABC рассмотрим точку K такую, что $\sphericalangle ABM = \sphericalangle KBC$, $\sphericalangle MAB = \sphericalangle CKB$. Заметим, что
$$\frac{CK}{BK} = \frac{AM}{AB}, \quad \frac{AK}{BK} = \frac{CM}{BC}, \quad \frac{BC}{BK} = \frac{BM}{AB}. \qquad (2)$$
Для точек A, N, C, K согласно лемме 1 имеем $AN \cdot CK + CN \cdot AK \geqslant AC \cdot NK$. По неравенству треугольника $NK \geqslant BK - BN$, следовательно $AN \cdot CK + CN \cdot AK \geqslant AC \cdot (BK - BN)$. Отсюда получаем, что
$$\frac{AN \cdot CK}{AC \cdot BK} + \frac{CN \cdot AK}{AC \cdot BK} + \frac{BN}{BK} \geqslant 1. \qquad (3)$$
Из (3) и (2) следует, что $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} \geqslant 1$. □

Следствие. Неравенство (*) остается верным, если точки M или N (одна или обе) не находятся в плоскости треугольника ABC.

Это следует из леммы 2, если вместо точек M и N рассмотреть проекции этих точек на плоскость треугольника ABC.

Приступим к решению задачи. На луче DA выберем точку A_1 так, что $DA_1 = \frac{1}{DA}$. Аналогичным образом на лучах DB, DC, DM и DN выбираем точки B_1, C_1, M_1 и N_1.

По следствию из леммы 2 для точек M_1, N_1 и треугольника $A_1B_1C_1$ выполняется неравенство $A_1M_1 \cdot A_1N_1 + B_1M_1 \cdot B_1N_1 + C_1M_1 \cdot C_1N_1 \geqslant A_1B_1^2$; используя равенства, аналогичные (1), получаем
$$\frac{AM}{DA \cdot DM} \cdot \frac{AN}{DA \cdot DN} + \frac{BM}{DB \cdot DM} \cdot \frac{BN}{DB \cdot DN} + \frac{CM}{DC \cdot DM} \cdot \frac{CN}{DC \cdot DN} \geqslant \left(\frac{AB}{DA \cdot DB}\right)^2,$$
откуда
$$AM \cdot AN + BM \cdot BN + CM \cdot CN \geqslant DM \cdot DN,$$
что и требовалось доказать. (matol.kz)