33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša jesenja varijanta, 9.10.2011.

Mladji uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	Na najdužoj stranici AB, trougla ABC, uočene su tačke P i Q takve da je $AQ = AC$ i $BP = BC$. Dokazati da se centar opisane kružnice oko trougla PQC poklapa sa centrom upisane kružnice u trougao ABC.
4	2.	Za okruglim stolom sedi nekoliko gostiju koji jedu bobice iz korpice u kojoj ima 2011 bobica. Svaki gost je pojeo ili duplo više bobica ili 6 bobica manje od svog suseda sa desne strane. Dokazati da gosti nisu pojeli sve bobice.
4	3.	Iz table 9×9 (koja sadrži 81 jedinično polje) izbačena su sva jedinična polja koja se nalaze u parnim vrstama i parnim kolonama (time je izbačeno 16 jediničnih polja). Iseći tako dobijenu tablu na pravougaonike tako da broj pravougaonika koji su dimenzija 1×1 bude što manji.
4	4.	Iznad svakog temena tridesettrougla zapisan je prirodan broj koji je izmedju 1 i 33, pri čemu je svaki broj od 1 do 33 zapisan tačno jednom. Nakon ovoga je iznad svake stranice zapisan broj koji je jednak zbiru brojeva koji su zapisani iznad temena koja su krajnje tačke te stranice. Da li je moguće da su na taj način, iznad stranica, dobijena (u nekom poretku) 33 uzastopna prirodna broja?
5	5.	Na pravolinijskom putu u jednom smeru kreću se pešak i biciklista, a u drugom (suprotnom) motociklista i automobil. Brzine svih učesnika su konstantne (svako ima svoju konstantnu brzinu). Biciklista je najpre sustigao pešaka, posle odredjenog vremena je susreo motociklistu, a nakon isto toliko vremena (vreme koje je proteklo od sustizanja pešaka do susreta sa motociklistom) susreo se sa automobilom. Automobil se najpre susreo sa biciklistom, posle odredjenog vremena susreo se sa pešakom, a nakon isto toliko vremena (vreme koje je proteklo od susreta sa biliklistom do sustera sa pešakom) sustigao je motociklistu. Poznato je da je biciklista sustigao pešaka u 10 časova, a susret pešaka i automobila dogodio se u 11 časova. U koliko sati se dogodio susret pešaka i motocikliste?

33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša jesenja varijanta, 9.10.2011.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak
3	1. Za okruglim stolom sedi nekoliko gostiju koji jedu bobice iz korpice u kojoj ima 2011 bobica. Svaki gost je pojeo ili duplo više bobica ili 6 bobica manje od svog suseda sa desne strane. Dokazati da gosti nisu pojeli sve bobice.
4	2. U svako polje tajne tablice $n \times n$ upisana je jedna cifra od 1 do 9. Pomoću nje je formirano ukupno $2n$ $n-$tocifrenih brojeva - svaka vrsta, odnosno svaka kolona predstavlja $n-$tocifreni broj. Peca želi da napiše $n-$tocifreni broj koji ne sadrži cifru 0, takav da se taj broj, kao i broj koji se dobije suprotnim redosledom cifara ne nalazi medju formiranim brojevima. Zbog toga on mora da sazna nekoliko cifara koje su upisane u polja tajne tablice. Koliko najmanje cifara mora da sazna da bi sigurno uspeo u svojoj nameri?
4	3. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ dužine stranica su: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$ i $AD = 5$. Odrediti ugao izmedju dijagonala tog četvorougla.
4	4. Za prirodne brojeve $a < b < c$ važi $b - a \mid b + a$ i $c - b \mid c + b$. Poznato je da broj a ima 2011, a broj b 2012 cifara. Koliko cifara ima broj c?
5	5. U ravni je dato 10 pravih u opštem položaju (nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri nemaju zajedničku tačku). Za svaku presečnu tačku tih pravih uočen je manji ugao koji obrazuju prave koje prolaze kroz tu tačku. Koliko najviše može biti zbir svih tako uočenih uglova?

33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Teža jesenja varijanta, 23.10.2011.

Mladji uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak
3	1. Na tabli je zapisan prirodan broj $N > 1$. Saša nastavlja da zapisuje prirodne brojeve na tabli u niz. Novi broj dobija tako što poslednjem zapisanom broju doda ili oduzme neki njegov (koji želi) delilac veći od 1. Saša želi da u nekom trenutku na tabli dobije broj 2011. Da li može ovo da postigne bez obzira na prvozapisani broj $N > 1$?
4	2. Na stranici AB, trougla ABC, uočena je tačka P, takva da je $AP = 2PB$. Neka je tačka Q središte duži AC. Ispostavilo se da je $CP = 2PQ$. Dokazati da je ABC pravougli trougao.
5	3. U nizu je nekoliko tegova, pri čemu su svaka dva tega različite težine. Poznato je da ako na levi tas terazija stavimo proizvoljna dva tega, medju ostalim tegovima možemo pronaći jedan ili više tegova koji će stavljeni na desni tas terazija dovesti do ravnoteže. Koliko najmanje tegova može biti u tom nizu?
6	4. Na nekom polju prve kolone (skroz levo) tablice koja ima 2012 vrsta i $k > 2$ kolona postavljen je žeton. Dva igrača naizmenično pomeraju žeton, pri čemu je u jednom potezu moguće pomeriti žeton za jedno polje na gore, na dole ili desno, ali obavezno na polje gde žeton u toku igre nije već bio. Igra se završava onog trenutka kada žeton prvi put dospe u poslednju (skroz desnu) kolonu. Medjutim, igrači ne znaju da li je onaj koji dovede žeton u poslednju kolonu pobednik ili poraženi. To im se saopštava tek u momentu kada žeton prvi put dospe u pretposlednju kolonu. Da li neki od igrača ima pobedničku strategiju?
6	5. Neka su $a, b, c, d \in (0, 1)$, takvi da je $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Dokazati nejednakost $$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$
7	6. Automobil se kreće po pravolinijskom putu konstanstnom brzinom $60 km/h$. Nedaleko od puta, paralelno sa njim, nalazi se ograda dužine 100m. Svake sekunde, tokom celokupnog putovanja, suvozač automobila snima (beleži) ugao pod kojim se tog trenutka vidi ograda. Dokazati da je zbir svih tako snimljenih (zabeleženih) uglova manji od 1100^0.
9	7. Temena pravilnog $45-$tougla obojena su pomoću tri boje, pri čemu je svaka od njih korišćena po 15 puta. Dokazati da postoje tri podudarna trougla tako da su temena prvog obojena prvom, temena drugog obojena drugom, a temena trećeg obojena trećom bojom.

33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Teža jesenja varijanta, 23.10.2011.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
4	1.	Peca je u ravni obeležio nekoliko (bar tri) tačaka, tako da su (svaka dva) rastojanja medju njima medjusobno različita. Za par A, B obeleženih tačaka kažemo da je neobičan ako je A najudaljenija tačka od tačke B i ako je B najbliža tačka tački A (ne računajući samu tačku A). Koliko najviše neobičnih parova može dobiti Peca?
4	2.	Neka su $a, b, c, d \in (0, 1)$, takvi da je $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Dokazati nejednakost $$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$
5	3.	Neka su A_1, B_1 i C_1 podnožja visina konstruisanih, redom, iz temena A, B i C trougla ABC. Označimo, redom, sa C_A i C_B podnožja normala iz tačke C_1 na AC i BC. Dokazati da prava C_AC_B polovi duži C_1A_1 i C_1B_1.
	4.	Da li postoji konveksan $N-$tougao sa svim jednakim stranicama, čija sva temena pripadaju paraboli $y = x^2$, ako je
3	a)	$N = 2011$;
4	b)	$N = 2012$?
7	5.	Prirodan broj je *dobar* ako njegov dekadni zapis ne sadrži cifru 0. Za *dobar* broj kažemo da je *poseban* ako njegov dekadni zapis sadrži najmanje k cifara i cifre čine strogo rastući niz (gledano sa leva na desno). U jednom potezu *dobrom* broju možemo umetnuti izmedju ma koje dve cifre *poseban* broj ili mu dopisati (sa leve ili desne strane) *poseban* broj ili mu pak izbrisati niz uzastopnih cifara koje čine *poseban* broj. Odrediti najveći broj k za koji je moguće od proizvoljnog *dobrog* broja, nizom poteza, dobiti proizvoljan *dobar* broj.
7	6.	Neka je $n > 1$ prirodan broj. Dokazati da je broj $1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n-1)^{2^n-1}$ deljiv sa 2^n, ali nije deljiv sa 2^{n+1}.
9	7.	Data je plava kružnica. Na njoj je obeleženo 100 crvenih tačaka, tako da je te tačke dele na 100 kružnih lukova čije su dužine, nekim redosledom, 1,2,...,100. Dokazati da postoje dve tetive koje su medjusobno normalne i čije su krajnje tačke obeležene crvenom bojom.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 9 октября 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы	задачи
3	1. На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки P и Q такие, что $AQ = AC$, $BP = BC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PQC, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. *В. Произволов*
4	2. Гости за круглым столом ели изюм из корзины с 2011 изюминками. Оказалось, что каждый съел либо вдвое больше, либо на 6 меньше изюминок, чем его сосед справа. Докажите, что были съедены не все изюминки. *Д. Баранов*
4	3. Из клетчатого прямоугольника 9×9 вырезали 16 клеток, у которых номера горизонталей и вертикалей четные. Разрежьте оставшуюся фигуру на несколько клетчатых прямоугольников так, чтобы среди них было как можно меньше квадратиков 1×1. *П. Кожевников*
4	4. В вершинах 33-угольника записали в некотором порядке целые числа от 1 до 33. Затем на каждой стороне написали сумму чисел в ее концах. Могут ли на сторонах оказаться 33 последовательных целых числа (в каком-нибудь порядке)? *Н. Авилов*
5	5. По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону — телега и машина. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом ещё через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода, и потом ещё через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 часов, а пешеход встретил машину в 11 часов. Когда пешеход встретил телегу? *А. Шень*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 9 октября 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Гости за круглым столом ели изюм из корзины с 2011 изюминками. Оказалось, что каждый съел либо вдвое больше, либо на 6 меньше изюминок, чем его сосед справа. Докажите, что были съедены не все изюминки. *Д. Баранов*
4	2. В каждой клетке секретной таблицы $n \times n$ записана одна из цифр от 1 до 9. Из них получаются n-значные числа, записанные в строках слева направо и в столбцах сверху вниз. Петя хочет написать такое n-значное число без нулей в записи, чтобы ни это число, ни оно же, записанное задом наперёд, не совпадало ни с одним из $2n$ чисел в строках и столбцах таблицы. В каком наименьшем количестве клеток Петя должен для этого узнать цифры? *Г. Гальперин*
4	3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны равны соответственно: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найдите угол между его диагоналями. *А. Толпыго*
4	4. Натуральные числа $a < b < c$ таковы, что $b + a$ делится на $b - a$, а $c + b$ делится на $c - b$. Число a записывается 2011 цифрами, а число b записывается 2012 цифрами. Сколько цифр в числе c? *Б. Френкин*
5	5. На плоскости даны 10 прямых общего положения (нет параллельных и никакие три не проходят через одну точку). При каждой точке пересечения выбирается наименьший угол, образованный проходящими через нее прямыми. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих углов. *Р. Женодаров*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2011 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
3	1. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011? *А. Бердников*
4	2. На стороне AB треугольника ABC взята точка P такая, что $AP = 2PB$, а на стороне AC — ее середина, точка Q. Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. *В. Произволов*
5	3. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе. *А. Шаповалов*
6	4. На клетчатой доске из 2012 строк и $k > 2$ столбцов в какой-то клетке самого левого столбца стоит фишка. Двое ходят по очереди, за ход можно передвинуть фишку вправо, вверх или вниз на одну клетку, при этом нельзя передвигать фишку на клетку, в которой она уже побывала. Игра заканчивается, как только один из игроков передвинет фишку в самый правый столбец. Но будет ли такой игрок выигравшим или проигравшим — сообщается игрокам только в тот момент, когда фишка попадает в предпоследний столбец (второй справа). Может ли один из игроков обеспечить себе выигрыш? *А. Бердников*
6	5. Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и $abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$. Докажите, что $$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$ *Г. Гальперин*
7	6. По прямому шоссе со скоростью 60 км/ч едет машина. Недалеко от дороги стоит 100-метровый забор, параллельный дороге. Каждую секунду пассажир автомобиля измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100 градусов. *А. Шень*
9	7. Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны. *В. Брагин*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2011 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Петя отметил на плоскости несколько точек (больше двух), все расстояния между которыми различны. Пару отмеченных точек A, B назовём *необычной*, если A — самая дальняя от B отмеченная точка, а B — ближайшая к A отмеченная точка (не считая самой точки A). Какое наибольшее возможное количество необычных пар могло получиться у Пети? *Б. Френкин*
4	2.	Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Докажите, что $$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$ *Г. Гальперин*
5	3.	В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — основания высот из вершин A, B, C, точки C_A и C_B — проекции C_1 на AC и BC соответственно. Докажите, что прямая C_AC_B делит пополам отрезки C_1A_1 и C_1B_1. *Фольклор, предложил Г. Фельдман*
	4.	Существует ли выпуклый N-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если
3	а)	$N = 2011$;
4	б)	$N = 2012$? *И. Богданов*
7	5.	Назовем натуральное число *хорошим*, если все его цифры ненулевые. Хорошее число назовем *особым*, если в нем хотя бы k разрядов и цифры идут в порядке строгого возрастания (слева направо). Пусть имеется некое хорошее число. За ход разрешается приписать с любого края или вписать между любыми его двумя цифрами особое число или же наоборот, стереть в его записи особое число. При каком наибольшем k можно из любого хорошего числа получить любое другое хорошее число с помощью таких ходов? *А. Бердников*
7	6.	Докажите, что при натуральном $n > 1$ число $1^1 + 3^3 + 5^5 + \ldots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}. (В сумме участвует каждое нечетное число k от 1 до $2^n - 1$, возведенное в степень k.) *С. Сафин*
9	7.	100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами. *В. Произволов*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 26 февраля 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад? *Н. П. Стрелкова*
4	2.	Существует ли натуральное число, у которого нечетное количество четных натуральных делителей и четное количество нечетных? *Г. Жуков*
4	3.	Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются диагонали AC в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BCD и BAD касаются диагонали BD в точках Z и T. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника. *Р. К. Гордин*
	4.	В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким
2	а)	наибольшим;
3	б)	наименьшим может быть это число? *И. Ф. Акулич*
5	5.	У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных? *И. Высоцкий*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 — 1. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят ровно три ребра, причем хотя бы два из этих трех ребер равны. Докажите, что многогранник имеет хотя бы три равных ребра.

В. В. Произволов

4 — 2. Дана клетчатая полоска из $2n$ клеток, пронумерованных слева направо следующим образом:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots,\ -2,\ -1.$$

По этой полоске перемещают фишку, каждым ходом сдвигая ее на то число клеток, которое указано в текущей клетке (вправо, если число положительно, и влево, если отрицательно). Известно, что фишка, начав с любой клетки, обойдет все клетки полоски. Докажите, что число $2n+1$ простое.

А. В. Грибалко

5 — 3. На плоскости нарисовали кривые $y = \cos x$ и $x = 100\cos(100y)$ и отметили все точки их пересечения, координаты которых положительны. Пусть a — сумма абсцисс этих точек, b — сумма ординат этих точек. Найдите a/b.

И. И. Богданов

5 — 4. Четырехугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая — хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

фольклор, предложил А. Бердников

5 — 5. Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски 8×8, а черная — на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый — своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

А. К. Толпыго

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи	
4	1.	В ряд лежит четное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более, чем на 1 г. *А. В. Шаповалов*
4	2.	На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались? *А. В. Шаповалов*
6	3.	В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.) *А. С. Бердников*
6	4.	В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «−». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов. *А. Я. Канель-Белов*
8	5.	Пусть p — простое число. Набор из $p+2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовем «интересным», если сумма любых p из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы. *А. А. Полянский*
8	6.	Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого клиента есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента, которого он еще не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать? *Г. К. Жуков*
8	7.	В равностороннем треугольнике ABC провели высоту AH. В треугольнике ABH отметили точку пересечения биссектрис I. В каждом из треугольников ABI, BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис — L, K и J соответственно. Найдите величину угла KJL. *К. Голубев*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.) *А. С. Бердников*
5	2.	Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге. *А. В. Шаповалов*
6	3.	Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что при всех целых x число $(\ldots((x^2+a_1)^2+a_2)^2+\ldots+a_{n-1})^2+a_n$ делится на $2n-1$. *А. С. Бердников*
6	4.	Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две выбранные точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше, чем $6\sqrt{2}$. *В. В. Произволов*
8	5.	Дан треугольник ABC и прямая l, касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC. *А. А. Заславский*
	6.	
3	а)	В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2 (для $n = 1, 2, 3, \ldots$). Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.
6	б)	Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N? *А. С. Бердников*
	7.	У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него в итоге не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что
6	а)	в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
3	б)	в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
3	в)	Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков. *К. Кноп*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2012 г.

---

1. Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.

И. И. Богданов

2. В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причём ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещённой и неосвещённой областей колодца лежит в одной плоскости.

А. С. Бердников

3. В стране Флатландии двое близоруких полицейских ловят преступника. Все люди являются кругами диаметра 1 м на плоскости. Максимальная скорость полицейского равна 1 м/с, а преступник умеет двигаться со сколь угодно большой скоростью. Полицейский не видит преступника, пока не коснётся его, а как только касается — сразу ловит. Преступник всё видит. Дело происходит в круге диаметра D м, за который никто не может выйти. При каком наибольшем D полицейские могут действовать так, чтобы гарантированно поймать преступника?

В. Б. Мокин

4. В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.

А. Шень

5. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Вневписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Через середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 провели прямую l_1, а через середины отрезков A_1C_1, A_2C_2 провели прямую l_2. Докажите, что l_1 и l_2 пересекаются на высоте AH треугольника ABC.

А. А. Полянский

6. Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех x. Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.

Г. К. Жуков

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2012 г.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. *Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.*

И. И. Богданов

Достаточно даже трех ходов.

Если дано число вида $3k+1$ (где $k \geq 2$), то за ход получаем из него число $k \cdot (2k+1)$, которое есть сумма $1+2+3+\dots+2k$. Так как единичные слагаемые запрещены, вместо $1+2+3$ берем одно слагаемое 6 и за ход заменяем $6+4+\dots+(2k+1)$ на факториал $(2k+1)!$.

Аналогично, из числа вида $3k-1$ (где $k \geq 2$) за ход получаем число $k \cdot (2k-1)$ — либо сразу $3!$ (для $k=2$), либо сумму $1+2+3+\dots+(2k-1)$, которую снова за ход превращаем в факториал $(2k-1)!$.

Если изначально дано число вида $3k$ (где $k \geq 2$), то за ход делаем из него $2 \cdot (3k-2)$, из которого за два хода делаем факториал.

2. *В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причём ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещённой и неосвещённой областей колодца лежит в одной плоскости.*

А. С. Бердников

Введём прямоугольные координаты следующим образом: ось Oy параллельна оси симметрии колодца, а ось Ox лежит в одной плоскости с осью Oy и направлением света. Пусть также центр верхнего основания колодца имеет координаты $(0;0;z)$, а свет направлен вдоль вектора $(1;-1;0)$. Очевидно, граница тени — проекция границы колодца на его поверхность вдоль вектора $(1;-1;0)$.

Решение 1. Посмотрим, как изменятся координаты точки этой проекции при увеличении x-координаты исходной точки на x_1. Так как колодец симметричен относительно плоскости $x=0$, y-координата проекции уменьшится на x_1. Расстояние между точками по x уменьшилось на $2x_1$, а значит, на столько же увеличилась y-координата (проекция получается прибавлением $(-a;a;0)$, сумма расстояний до неё по x и по y равна нулю). Для точки проекции не изменилась величина $y+2x$, значит, она постоянна, и граница тени лежит в плоскости $y+2x = const$ (несложно видеть, что $const = 0$).

Решение 2. Пусть координаты исходной точки $(-x_1;0;z_1)$, тогда координаты его проекции $(a-x_1;-a;z_1)$. Так как колодец симметричен относительно плоскости $x=0$, $-x_1+(a-x_1)=0$, откуда $a=2x_1$, и координаты проекции $(x_1;-2x_1;z_1)$, все такие точки лежат в плоскости $y+2x=0$.

3. *В стране Флатландии двое близоруких полицейских ловят преступника. Все люди являются кругами диаметра 1 м на плоскости. Максимальная скорость полицейского равна 1 м/с, а преступник умеет двигаться со сколь угодно большой скоростью. Полицейский не видит преступника, пока не коснётся его, а как только касается — сразу ловит. Преступник всё видит. Дело происходит в круге диаметра D м, за который никто не может выйти. При каком наибольшем D полицейские могут действовать так, чтобы гарантированно поймать преступника?*

В. Б. Мокин

Ответ: $D = 5$.

Если $D = 5$, то полицейские располагаются так, чтобы их центры лежали, скажем, на горизонтальном диаметре круга на расстоянии 0,5 от центра круга. Тогда на этом диаметре есть три «дырки» ширины 1, через которые преступник проскочить не может. Далее полицейские синхронно поднимаются вверх, пока не коснутся границы круга, далее синхронно сближаются, касаясь этой границы. В какой-то момент либо преступник будет пойман, либо полицейские коснутся друг друга. Во втором случае они совершают обратное движение и, двигаясь аналогично в «нижней» части круга, ловят преступника.

Если $D < 5$, то стратегия такая же, либо проще.

Пусть $D > 5$. Докажем, что преступник сможет убежать.

В каждый момент времени будем рассматривать хорду, проходящую через центры полицейских. Эта хорда делит круг на две части. Пусть вначале преступник находился в большей из них. Пусть h — расстояние от хорды до центра круга. Найдем какое-нибудь $1 > a > 0$, что если $h \le a$, то длина хорды больше 5. Ясно, что такое a найдется.

Теперь мы можем описать стратегию преступника. Пока он находится в большей части, он должен касаться граничной дуги этой части в ее середине (назовем это стандартным положением). Если часть становится меньшей, преступник должен придерживаться той же стратегии до момента, пока h не станет равным a. При этом расстояние от центра преступника до хорды будет все время больше 1, так что он не коснется ни одного полицейского.

В момент, когда h станет равным a, преступник должен «мгновенно» переместиться в большую часть, заняв в ней стандартное положение. Такое перемещение будет возможно, поскольку проекции полицейских на хорду — один или два отрезка суммарной длины не больше 2, а значит, на хорде найдется отрезок длины больше 1 со свойством: полоса, края которой проходят через концы этого отрезка перпендикулярно хорде, не задевает никакого полицейского. Преступник сможет проскочить в большую часть через эту полосу.

4. *В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.*

А. Шень

Пусть есть две разные последовательности ходов. Они различаются в каком-то месте: в первой последовательности был сделан ход, перемещающий шарик из коробки a в коробку $a+1$, а во второй — из коробки b в коробку $b+1$. Докажем, что

1) ход $b \to b+1$ будет обязательно сделан и в первой последовательности ходов;

2) этот ход можно сделать прямо перед ходом $a \to a+1$, сохранив все остальные ходы (и итоговое расположение шариков в коробках).

1) В самом деле, если этот ход можно было сделать во второй последовательности, то сейчас в коробке b хотя бы на 1 шарик больше, чем в коробке $b+1$. Любые другие ходы, кроме $b \to b+1$, не уменьшают число шариков в коробке b и не увеличивают число шариков в коробке $b+1$ — значит процесс не закончится, если ход $b \to b+1$ не будет сделан.

2) сделаем ход $b \to b+1$ перед ходом $a \to a+1$ (это возможно). Любой другой ход кроме $b \to b+1$ тоже можно будет сделать, так как этот другой ход будет либо не затрагивать коробок b, $b+1$, либо будет осуществлять перекладывание в коробку b (и это будет возможно, так как в этой коробке шариков только на 1 меньше), либо будет осуществлять перекладывание из коробки $b+1$ (и это будет возможно, так как в этой коробке шариков только на 1 больше). Так мы дойдем до того момента, когда должен был быть сделан ход $b \to b+1$, после чего раскладывание будет ровно таким же, как и раньше. Итоговое распределение шариков при этом не изменится.

Так можно постепенно преобразовать одну последовательность в другую, не меняя итогового распределения шариков. Значит результат не зависит от последовательности ходов.

5. *Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Вневписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Через середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 провели прямую l_1, а через середины отрезков A_1C_1, A_2C_2 провели прямую l_2. Докажите, что l_1 и l_2 пересекаются на высоте AH треугольника ABC.*

А. А. Полянский

Пусть K_1, K_2 — середины A_1C_1 и A_2C_2, L_1, L_2 — середины A_1B_1 и A_2B_2, I, I_A — центры вписанной и вневписанной окружностей, а A_1', A_2' — диаметрально противоположные точки для A_1, A_2 на этих окружностях.

Заметим, что прямые BI параллельна C_2A_2 (они перпендикулярны BI_A), прямая CI параллельна B_2A_2 (они перпендикулярны CI_A), прямая K_1L_1 параллельна K_2L_2 (каждая из них параллельна

B_1C_1 и B_2C_2 соответственно как средние линии, а последние прямые в силу равнобедренности параллельны). Значит треугольники (K_1L_1I и $K_2L_2A_2$), образованный данными прямыми, являются гомотетичными. То есть прямые K_1K_2, L_1L_2 и IA_2 пересекаются в одной точке.

Аналогичным образом получаем, что треугольники $K_1L_1A_1$ и $K_2L_2I_A$ являются гомотетичными. То есть прямые K_1K_2, L_1L_2 и A_1I_A пересекаются в одной точке.

Значит все четыре прямые K_1K_2, L_1L_2, IA_2 и A_1I_A пересекаются в одной точке, то есть достаточно рассмотреть точку пересечения последних двух прямых.

Поскольку вписанная и вневписанная окружности гомотетичны с центром в A, то при этой гомотетии точка A_1' переходит в A_2, а точка A_1 — в A_2'. Значит так как A_2I является медианой в треугольнике $A_2A_1A_1'$, то она является и медианой в подобном треугольнике A_2HA. Отсюда получаем, что A_2I проходит через середину высоты AH.

Аналогично, рассматривая медиану A_1I_A в треугольнике $A_1A_2A_2'$, получаем, что она тоже проходит через середину AH.

6. *Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех x. Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.*

Г. К. Жуков

Заметим, что если $x = a$ является осью симметрии многочлена $R(x)$, то $x = a$ является осью симметрии и многочлена $Q(R(x))$, а, значит, и многочлена $P(Q(R(x)))$.

Далее *осью симметрии* многочлена будем называть ось симметрии его графика, параллельную оси ординат. Поскольку f и g — приведенные квадратные трехчлены с пересекающимися графиками, у них разные оси симметрии. Значит, у многочлена $T(x) = f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ есть две различные оси симметрии. Но этого, очевидно, не может быть, так как иначе график T имел бы пересечение с какой-то горизонтальной прямой в бесконечном числе точек, и значит совпадал бы с этой прямой, но степень T больше нуля.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2011.**

1. P and Q are points on the longest side AB of triangle ABC such that $AQ = AC$ and $BP = BC$. Prove that the circumcentre of triangle CPQ coincides with the incentre of triangle ABC.

2. Several guests at a round table are eating from a basket containing 2011 berries. Going in clockwise direction, each guest has eaten either twice as many berries as or six fewer berries than the next guest. Prove that not all the berries have been eaten.

3. From the 9×9 chessboard, all 16 unit squares whose row numbers and column numbers are both even have been removed. Disect the punctured board into rectangular pieces, with as few of them being unit squares as possible.

4. The vertices of a 33-gon are labelled with the integers from 1 to 33. Each edge is then labelled with the sum of the labels of its two vertices. Is it possible for the edge labels to consist of 33 consecutive numbers?

5. On a highway, a pedestrian and a cyclist were going in the same direction, while a cart and a car were coming from the opposite direction. All were travelling at different constant speeds. The cyclist caught up with the pedestrian at 10 o'clock. After a time interval, she met the cart, and after another time interval equal to the first, she met the car. After a third time interval, the car met the pedestrian, and after another time interval equal to the third, the car caught up with the cart. If the pedestrian met the car at 11 o'clock, when did he meet the cart?

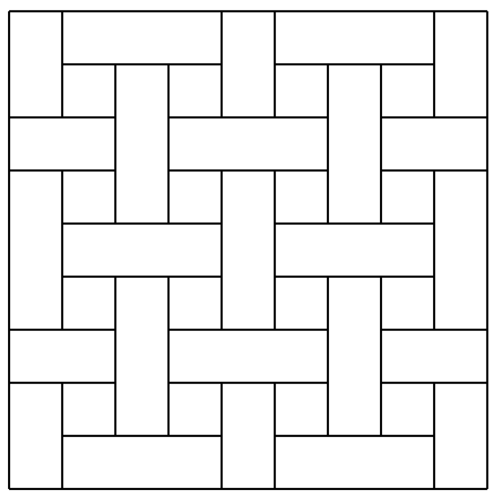
Note: The problems are worth 3, 4, 4, 4 and 5 points respectively.

Solution to Junior O-Level Fall 2011

1. The bisector of $\angle A$ is also the perpendicular bisector of CQ, and the bisector of $\angle B$ is also the perpendicular bisector of CP. The incentre of triangle ABC is the point of intersection of the bisectors of $\angle A$ and $\angle B$. The circumcentre of triangle CPQ is the point of intersection of the perpendicular bisectors of CQ and CP. Hence the incentre of triangle ABC is also the circumcentre of triangle CPQ.

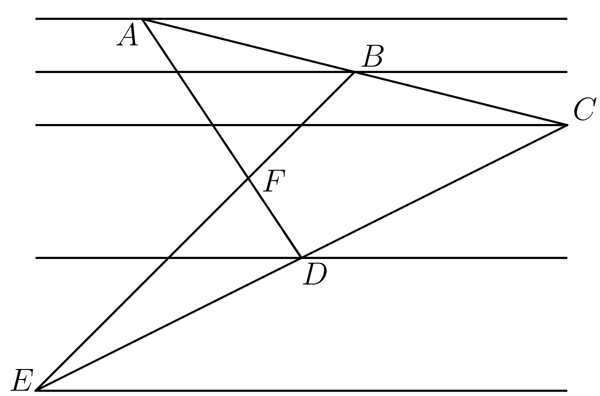
2. It is not possible for each guest to eat six fewer berries than the next guest. Hence one of them has to eat twice as many, and therefore an even number of berries. Going now in the counter-clockwise direction, the next guest eats either twice as many as or six fewer than the preceding guest. It follows that every guest has eaten an even number of berries. Since 2011 is odd, not all the berries have been eaten.

3. The following diagram shows a disection of the punctured chessboard into rectangular pieces, none of them being unit squares.



4. The task is possible. Label the vertices 17, 1, 18, 2, 19, 3, $\ldots$, 15, 32, 16 and 33. Then the edge labels are 18, 19, 20, 21, 22, $\ldots$, 47, 48, 49 and 50.

5. The diagram below shows five snapshots of the highway. Since all speeds are constant, the motions can be represented by straight lines, AD for the pedestrian, AC for the cyclist, BE for the cart and CE for the car. The equality of time intervals yield $AB = BC$ and $CD = DE$. Hence F, which represents the moment the pedestrian met the cart, is the centroid of triangle ACE, so that $AF = \frac{2}{3}AD$. Since A is at 10 o'clock and D is at 11 o'clock, F is at 10:40.



International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2011.**

1. Several guests at a round table are eating from a basket containing 2011 berries. Going in clockwise direction, each guest has eaten either twice as many berries as or six fewer berries than the next guest. Prove that not all the berries have been eaten.

2. Peter buys a lottery ticket on which he enters an n-digit number, none of the digits being 0. On the draw date, the lottery administrators will reveal an $n \times n$ table, each cell containing one of the digits from 1 to 9. A ticket wins a prize if it does *not* match any row or column of this table, read in either direction. Peter wants to bribe the administrators to reveal the digits on some cells chosen by Peter, so that Peter can guarantee to have a winning ticket. What is the minimum number of digits Peter has to know?

3. In a convex quadrilateral $ABCD$, $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$ and $DA = 5$. Determine the angle between its diagonals.

4. Positive integers $a < b < c$ are such that $b + a$ is a multiple of $b - a$ and $c + b$ is a multiple of $c - b$. If a is a 2011-digit number and b is a 2012-digit number, exactly how many digits does c have?

5. In the plane are 10 lines in general position, which means that no 2 are parallel and no 3 are concurrent. Where 2 lines intersect, we measure the smaller of the two angles formed between them. What is the maximum value of the sum of the measures of these 45 angles?

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 4 and 5 points respectively.

Solution to Senior O-Level Fall 2011

1. It is not possible for each guest to eat six fewer berries than the next guest. Hence one of them has to eat twice as many, and therefore an even number of berries. Going now in the counter-clockwise direction, the next guest eats either twice as many as or six fewer than the preceding guest. It follows that every guest has eaten an even number of berries. Since 2011 is odd, not all the berries have been eaten.

2. The minimum number is n. If Peter knows at most $n-1$ of the digits, he will not know any digit on one of the rows, and his ticket may match that row. On the other hand, if Peter knows every digit on a diagonal, he can guarantee to have a winning ticket. Let the digits on this diagonal be $d_1, d_2, \dots, d_n$. Peter can enter the digits $t_1, t_2, \dots, t_n$ on his ticket such that neither t_k nor t_{n+1-k} matches d_k or d_{n+1-k} for any k, $1 \leq k \leq n$. Then his ticket cannot match the k-th row or the k-th column for any k in either direction.

3. Let AC and BD intersect at O. Suppose the diagonals are not perpendicular to each other. By symmetry, we may assume that $\angle AOB = \angle COD < 90°$. Then

$$(OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2) > AB^2 + CD^2 = 221$$

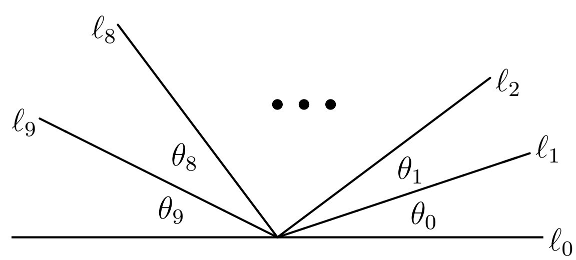
while

$$(OD^2 + OA^2) + (OB^2 + OC^2) < DA^2 + BC^2 = 221.$$

This is a contradiction. Hence both angles between the diagonals are $90°$.

4. Since $c > b$, c has at least 2012 digits. We have $b + a = k(b - a)$ for some integer $k > 1$. Hence $a(k+1) = b(k-1)$, so that $\frac{b}{a} = \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} \leq 3$, with equality if and only if $k = 2$. Similarly, $\frac{c}{b} \leq 3$, so that $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} \leq 9$. Hence $c < 10a$. Since a has 2011 digits, c has at most 2012 digits. It follows that c has exactly 2012 digits.

5. **Solution by Alex Rodriques:**
Despite the statement of the problem, whether the lines are concurrent or not is totally irrelevant. In fact, it facilitates our argument to have them all pass through the same point. Let the lines be ℓ_0, ℓ_1, $\dots$, ℓ_9, forming the angles θ_0, θ_1, $\dots$, θ_9 as shown in the diagram below.



Define $\phi(i,j)$ to be the smaller angle formed between ℓ_i and ℓ_j. Then

$$\begin{aligned}\phi(i,j) &= \min\{\theta_i+\theta_{i+1}+\cdots+\theta_{j-1}, 180^\circ-(\theta_i+\theta_{i+1}+\cdots+\theta_{j-1})\}\\ &\le \theta_i+\theta_{i+1}+\cdots+\theta_{j-1}.\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}\phi(0,1)+\phi(1,2)+\cdots+\phi(9,0) &\le \theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9\\ &= 180^\circ;\\ \phi(0,2)+\phi(1,3)+\cdots+\phi(9,1) &\le (\theta_0+\theta_1)+(\theta_1+\theta_2)\cdots+(\theta_9+\theta_0)\\ &= 2(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9)\\ &= 360^\circ;\\ \phi(0,3)+\phi(1,4)+\cdots+\phi(9,2) &\le (\theta_0+\theta_1+\theta_2)+(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\cdots+(\theta_9+\theta_0+\theta_1)\\ &= 540^\circ;\\ \phi(0,4)+\phi(1,5)+\cdots+\phi(9,3) &\le 4(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9)\\ &= 720^\circ;\\ \phi(0,5)+\phi(1,6)+\cdots+\phi(9,4) &\le 900^\circ.\end{aligned}$$

The last expression yields $\phi(0,5)+\phi(1,6)+\phi(2,7)+\phi(3,8)+\phi(4,9)\le 450^\circ$. It follows that the overall sum cannot exceed $180^\circ+360^\circ+540^\circ+720^\circ+450^\circ = 2250^\circ$. Equality holds if $\theta_0=\theta_1=\cdots=\theta_9=18^\circ$, but the maximum value 2250° can be attained in many other ways.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2011.**

1. An integer $n > 1$ is written on the board. Alex replaces it by $n + d$ or $n - d$, where d is any divisor of n greater than 1. This is repeated with the new value of n. Is it possible for Alex to write on the board the number 2011 at some point, regardless of the initial value of n?

2. P is a point on the side AB of triangle ABC such that $AP = 2PB$. If $CP = 2PQ$, where Q is the midpoint of AC, prove that ABC is a right triangle.

3. A set of at least two objects with pairwise different weights has the property that for any pair of objects from this set, we can choose a subset of the remaining objects so that their total weight is equal to the total weight of the given pair. What is the minimum number of objects in this set?

4. A game is played on a board with 2012 horizontal rows and $k > 2$ vertical columns. A marker is placed in an arbitrarily chosen cell of the left-most column. Two players move the marker in turns. During each move, the player moves the marker one cell to the right, or one cell up or down to a cell that has never been occupied by the marker before. The game is over when any of the players moves the marker to the right-most column. There are two versions of this game. In Version A, the player who gets the marker to the right-most column wins. In Version B, this player loses. However, it is only when the marker reaches the second column from the right that the players learn whether they are playing Version A or Version B. Does either player have a winning strategy?

5. Let $0 < a, b, c, d < 1$ be real numbers such that $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Prove that $(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1$.

6. A car goes along a straight highway at the speed of 60 kilometres per hour. A 100 metre long fence is standing parallel to the highway. Every second, the passenger of the car measures the angle of vision of the fence. Prove that the sum of all angles measured by him is less than $1100°$.

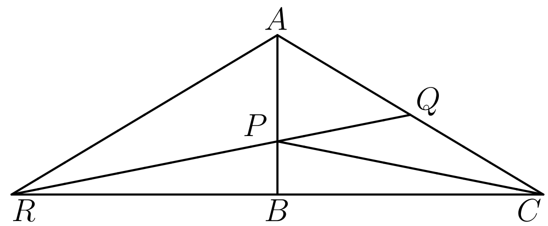
7. Each vertex of a regular 45-gon is red, yellow or green, and there are 15 vertices of each colour. Prove that we can choose three vertices of each color so that the three triangles formed by the chosen vertices of the same color are congruent to one another.

Note: The problems are worth 3, 4, 5, 6, 6, 7 and 9 points respectively.

Solution to Junior A-Level Fall 2011

1. **Solution by Wen-Hsien Sun:**
Starting from any positive integer n, Alex adds n a total of 2010 times to get $2011n$. Then he subtracts 2011 a total of $n-1$ times to get 2011.

2. Extend QP to R so that $RP = 2PQ$. Then P is the centroid of triangle ARC. Since $AP = 2PB$, the extension of AP intersects RC at its midpoint B. Since $RP = CP$, triangles PRB and PCB are congruent, so that $\angle ABR = \angle ABC$. Since their sum is $180°$, each is $90°$.



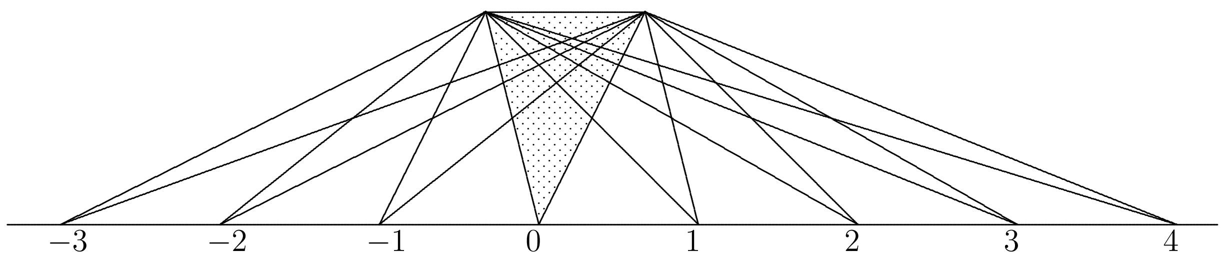
3. Clearly, the set cannot have 2, 3 or 4 objects, as it would not be possible to balance the heaviest two objects. Suppose it has only 5 objects, of respective weights $a > b > c > d > e$. Clearly, we must have $a+b = c+d+e$. Since $a+c > b+d$, we must also have $a+c = b+d+e$, which implies $b = c$. The set may have 6 objects, of respective weights 8, 7, 6, 5, 4 and 3. Then 8+7=6+5+4, 8+6=7+4+3, 8+5=7+6, 8+4=7+5, 8+3=7+4=6+5, 7+3=6+4, 6+3=5+4, 5+3=8 and 4+3=7.

4. The first player has a winning strategy. She will only move the counter up or down until she learns whether Version A or Version B of the game is being played. Since 2012 is even, she can choose a direction (up or down) so that the marker stays in the same column for an odd number of moves. If the marker starts at the end of the column, the only possible direction allows her to keep it in the same column for an odd number of moves. Thus she can ensure that the second player is always the one to move the marker to the right, whether by choice earlier or being forced to do so when the marker reaches the end of the column. When the marker reaches the second column from the right, if Version A is being played, the first player can win by simply moving the marker to the right. If Version B is being played, she can keep the marker in this column as before, and wait for the second player to lose.

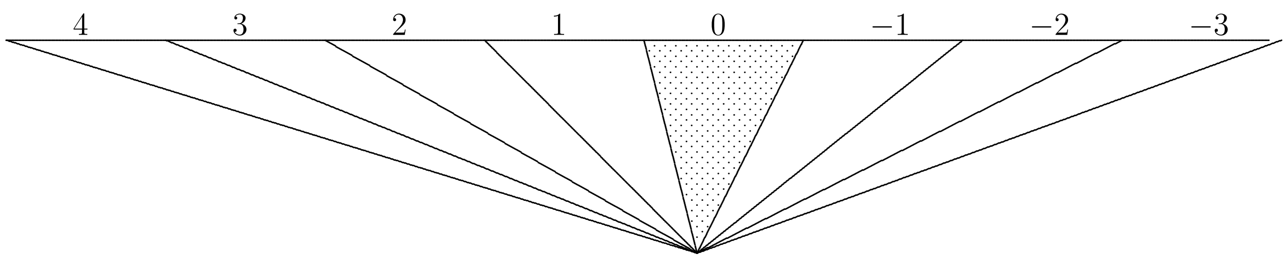
5. From $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, we have

$$\begin{aligned}
& a+b+c+d-(a+c)(b+d) \\
= \ & 1+ac(1-b-d)+bd(1-a-c) \\
= \ & 1+ac(1-b)(1-d)+bd(1-a)(1-c)-2abcd \\
\geq \ & 1+2\sqrt{ac(1-b)(1-d)bd(1-a)(1-c)}-2abcd \\
= \ & 1+2abcd-2abcd \\
= \ & 1.
\end{aligned}$$

6. **Solution by Central Jury:**
Divide the points of observation into six groups cyclically, so that the points in each group are 100 metres apart, the same as the length of the billboard.The diagram below shows the angles of visions from the points of a group.



We now parallel translate all these points to a single point, along with their billboards and angles of vision, as shown in the diagram below.



The sum of all these angles is clearly at most $180°$. Since there are six groups of points of observations, the sum of all angles of vision is at most $6 \times 180° < 1100°$.

7. **Solutioin by Central Jury:**
Copy the regular 45-gon onto a piece of transparency and marked on it the 15 red points. Call this the Red position, and rotate the piece of transparency about the centre of the 45-gon $8°$ at a time. For each of the 45 positions, count the number of matches of yellow points with the 15 marked points. Since each of the 15 yellow points may match up with any of the 15 marked points, the total number of matches is $15 \times 15 = 225$, so that the average number of matches per position is 5. However, in the Red position, the number of matches is 0. Hence there is a position with at least 6 matches. Call this the Yellow position, choose any 6 of the matched marked points and erase the other 9. Repeat the rotation process, but this time counting the number of matches of green points with the 6 marked points. The total number of matches is $6 \times 15 = 90$, so that the average number of matches per position is 2. As before, there is a position with at least 3 matches. Call this the Green position, choose any 3 of the matched marked points and erase the other 3. The 3 remaining marked points define three congruent triangles, a red one in the Red position, a yellow one in the Yellow position and a green one at the Green position.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2011.**

1. Pete has marked at least 3 points in the plane such that all distances between them are different. A pair of marked points A and B will be called *unusual* if A is the furthest marked point from B, and B is the nearest marked point to A (apart from A itself). What is the largest possible number of unusual pairs that Pete can obtain?

2. Let $0 < a, b, c, d < 1$ be real numbers such that $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Prove that $(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1$.

3. In triangle ABC, points D, E and F are bases of altitudes from vertices A, B and C respectively. Points P and Q are the projections of F to AC and BC respectively. Prove that the line PQ bisects the segments DF and EF.

4. Does there exist a convex n-gon such that all its sides are equal and all vertices lie on the parabola $y = x^2$, where
   (a) $n = 2011$;
   (b) $n = 2012$?

5. We will call a positive integer *good* if all its digits are nonzero. A good integer will be called *special* if it has at least k digits and their values are strictly increasing from left to right. Let a good integer be given. In each move, one may insert a special integer into the digital expression of the current number, on the left, on the right or in between any two of the digits. Alternatively, one may also delete a special number from the digital expression of the current number.What is the largest k such that any good integer can be turned into any other good integer by a finite number of such moves?

6. Prove that for $n > 1$, the integer $1^1 + 3^3 + 5^5 + \ldots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ is a multiple of 2^n but not a multiple of 2^{n+1}.

7. A blue circle is divided into 100 arcs by 100 red points such that the lengths of the arcs are the positive integers from 1 to 100 in an arbitrary order. Prove that there exist two perpendicular chords with red endpoints.

Note: The problems are worth 4, 4, 5, 3+4, 7, 7 and 9 points respectively.

Solution to Senior A-Level Fall 2011

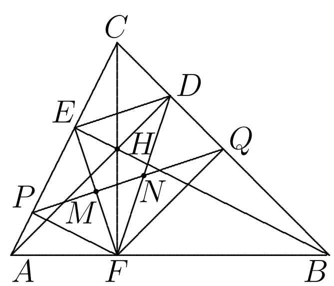
1. First, we show by example that we may have one unusual pair when there are at least 3 points. Let A and B are chosen arbitrarily. Add some points within the circle with centre B and radius AB but outside the circle with centre A and radius AB. Then B is the point nearest to A while A is the point furthest from B. We now prove that if there is another pair of unusual points, we will have a contradiction. We consider two cases.

   Case 1.
   The additional unusual pair consists of C and D such that D is the point nearest to C while C is the point furthest from D. Now $DA > AB$ since B is the point nearest to A, $AB > BC$ because A is the point furthest from B, $BC > CD$ since D is the point nearest to C, and $CD > DA$ because C is the point furthest from D. Hence $DA > DA$, which is a contradiction.

   Case 2.
   The additional unusual pair consists of B and C such that C is the point nearest to B and B is the point furthest from C. Now $CA > AB$ since B is the point nearest to A, $AB > BC$ since A is the point furthest from B, and $BC > CA$ because B is the point furthest from C. Hence $CA > CA$, which is a contradiction.

2. **Solution by Adrian Tang:**
   From $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, we have $\frac{ac}{(1-a)(1-c)} = \frac{(1-b)(1-d)}{bd}$. It follows that $\frac{a+c-1}{(1-a)(1-c)} = \frac{ac}{(1-a)(1-c)} - 1 = \frac{(1-b)(1-d)}{bd} - 1 = \frac{1-b-d}{bd}$. Now $\frac{(a+c-1)(1-b-d)}{(1-a)(1-c)bd} \geq 0$ since it is the product of two equal terms. From $(1-a)(1-c)bd > 0$, we have $(a+c-1)(1-b-d) \geq 0$. Expansion yields $a-ab-ad+c-cb-cd-1+b+d \geq 0$, which is equivalent to $a+b+c+d-(a+c)(b+d) \geq 1$.

3. **Solution by Wen-Hsien Sun:**
   Let H be the orthocentre of triangle ABC. Then H is the incentre of triangle DEF. Note that $CDHE$ and $CQFP$ are cyclic quadrilaterals. Hence $\angle ADE = \angle FCP = \angle FQP$. Since AD and FQ are parallel to each other, so are ED and PQ. Thus $\angle PQD = \angle EDC = \angle FDQ$. Let M and N be the points of intersection of PQ with EF and DF respectively. Then $ND = NQ$. Since $\angle FQD = 90°$, N is the circumcentre of triangle FQD so that $FN = ND$. Similarly, we have $FM = ME$.



4.
   (a) This is possible. Let V be the vertex of the parabola. On one side, mark on the parabola points $A_1, A_2, \ldots, A_{1005}$ such that $VA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{1004}A_{1005} = t$, and on the other side, points $B_1, B_2, \ldots, B_{1005}$ such that $VB_1 = B_1V_2 = \cdots = B_{1004}B_{1005} = t$. The length ℓ of $A_{1005}B_{1005}$ varies continuously with t. When t is very small, we have $\ell > t$. When t is very large, ℓ is less than a constant times $\sqrt{t}$, which is in turn less than t. Hence at some point in between, we have $\ell = t$.

(b) We first prove a geometric result.

Lemma.

In the convex quadrilateral $ABCD$, $AB = CD$ and $\angle ABC + \angle BCD > 180°$. Then $AD > BC$.

Proof:

Complete the parallelogram $BCDE$. Then $\angle EBC + \angle BCD = 180° < \angle ABC + \angle BCD$. Hence $\angle ABC > \angle EBC$. We also have $BD = BD$ and $AB = CD = EB$. By the Side-angle-side Inequality, $AD > ED + BC$.

Corollary.

If A, B, C and D are four points in order on a parabola ad $AB = CD$, then $AD > BC$.

Proof:

Since the parabola is a convex curve, the extension of AB and DC meet at some point L, Then $\angle ABC + \angle BCD = (\angle ALD + \angle BCL) + (\angle ALD + \angle CBL) = 180° + \angle ALD > 180°$. We will now apply the It follows from the Lemma that $AD > BC$.

Returning to our problem, suppose $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_{2012}$ are points in order on a parabola, such that $P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots = P_{2011}P_{2012}$. We now apply the Corollary 1005 times to obtain $P_1P_{2012} > P_2P_{2011} > \cdots > P_{1006}P_{1007}$. Hence the 2012-gon cannot be equilateral.

5. **Solution by Daniel Spivak:**

We cannot have $k = 9$ as the only special number would be 123456789. Adding or deleting it does not change anything. We may have $k = 8$. We can convert any good number into any other good number by adding or deleting one digit at a time. We give below the procedures for adding digits. Reversing the steps allows us to deleting digits.

Adding 1 or 9 anywhere.

Add 123456789 and delete 23456789 or 12345678.

Adding 2 anywhere.

Add 23456789 and then add 1 between 2 and 3. Now delete 13456789.

Adding 8 anywhere.

Add 12345678 and then add 9 between 7 and 8. Now delete 12345679.

Adding 3 anywhere.

Add 23456789 and delete 2. Now add 1 and 2 between 3 and 4 and delete 12456789.

Adding 7 answhere.

Add 12345678 and delete 8. Now add 8 and 9 between 6 and 7 and delete 12345689.

Adding 4 anywhere.

Add 23456789 and delete 2 and 3, Now add 1, 2 and 3 between 4 and 5 and delete 12356789.

Adding 6 anywhere.

Add 12345678 and delete 7 and 8. Now add 7, 8 and 9 between 5 and 6 and delete 12345789.

Adding 5 anywhere.

Add 23456789, delete 2, 3 and 4 and add 1, 2, 3 and 4 betwen 5 and 6. Albernately, add 12345678, delete 6, 7 and 8 and add 6, 7, 8 and 9 between 4 and 5. Now delete 12346789.

6.

We first prove two preliminary results.

Lemma 1.

For any positive odd integer k, $k^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$.

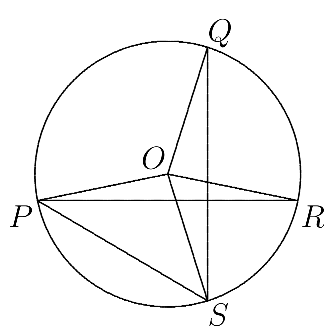
Proof:
We have $k^{2^n}-1=(k-1)(k+1)(k^2+1)(k^4+1)\cdots(k^{2^{n-1}}+1)$. This is a product of $n+1$ even factors. Moreover, one of $k-1$ and $k+1$ is divisible by 4. The desired result follows.
Lemma 2.
For any integer $n\geq 2$, $(2^n+k)^k\equiv k^k(2^n+1) \pmod{2^{n+2}}$.
Proof:
Expanding $(2^n+k)^k$, all the terms are divisible by 2^{n+2} except have $\binom{k}{1}k^{k-1}2^n$ and k^k. The desired result follows.
Let the given sum be denoted by S_n. We now use induction on n to prove that S_n is divisible by 2^n but not 2^{n+1} for all $n\geq 2$. Note that $S_2=1^1+3^3=28$ is divisible by 2^2 but not by 2^3. Using Lemmas 1 and 2, we have

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(2^n+2i-1)^{2^n+2i-1} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(2^n+2i-1)^{2i-1} \pmod{2^{n+2}} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(2i-1)^{2i-1}(2^n+1) \pmod{2^{n+2}} \\ &= S_n(2^n+1). \end{aligned}$$

Now $S_{n+1}=2S_n(2^{n-1}+1)$. By the induction hypothesis, S_n is divisible by 2^n but not by 2^{n+1}. It follows that S_{n+1} is divisible by 2^{n+1} but not by 2^{n+2}.

7.
We first prove a geometric result.
Lemma.
Let P, Q, R and S be four points on a circle in cyclic order. If the arcs PQ and RS add up to a semicircle, then PR and QS are perpendicular chords.

Proof:
Let O be the centre of the circle. From the given condition, $\angle POQ+\angle ROS=180°$. Hence $\angle PSQ+\angle RPS=\frac{1}{2}(\angle POQ+\angle ROS)=90°$. It follows that PR and QS are perpendicular chords.



The circumference of the circle is 5050. By an arc is meant any arc with two red endpoints. A simple arc is one which contains no red points in its interior. A compound arc is one which consists of at least two adjacent simple arcs whose total lengths is less than 2525. For each red point P, choose the longest compound arc with P as one of its endpoints. We consider two cases.

Case 1.
Suppose for some P there are two equal choices in opposite directions. Then they must be of length 2475, and the part of the circle not in either of them is the simple arc of length 100. It follows that one of these two compound arcs, say PQ, does not contain the simple arc RS of length 50. We may assume that P, Q, R and S are in cyclic order. If $Q = R$, then PS is a diameter of the circle. If $S = P$, then QR is a diameter of the circle. In either case, PQ and RS are perpendicular chords. If these four points are distinct, then the arcs PQ and RS add up to a semicircle. By the Lemma, PR and QS are perpendicular chords.
Case 2.
The choice is unique for every P. Then we have chosen at least 50 such arcs since each may serve as the maximal arc for at most two red points. Each of these arcs has length at least 2476 but less than 2525, a range of 49 possible values. By the Pigeonhole Principle, two of them have the same length $2525 - k$ for some k where $1 \leq k \leq 49$. If one of them does not contain the simple arc $\mathcal{C}$ of length k, we can then argue as in Case 1. Suppose both of them contain $\mathcal{C}$. This is only possible if one of them ends with $\mathcal{C}$ and the other starts with it. By removing $\mathcal{C}$ from both, we obtain two disjoint compund acrs both of length $2525 - 2k$, and note that $2 \leq 2k \leq 98$. Now one of them does not contain the simple arc of length $2k$, and we can argue as in Case 1.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2012[1].**

1. A treasure is buried under a square of an 8×8 board, Under each other square is a message which indicates the minimum number of steps needed to reach the square with the treasure. Each step takes one from a square to another square sharing a common side. What is the minmum number of squares we must dig up in order to bring up the treasure for sure?

2. The number 4 has an odd number of odd positive divisors, namely 1, and an even number of even positive divisors, namely 2 and 4. Is there a number with an odd number of even positive divisors and an even number of odd positive divisors?

3. In the parallelogram $ABCD$, the diagonal AC touches the incircles of triangles ABC and ADC at W and Y respectively, and the diagonal BD touches the incircles of triangles BAD and BCD at X and Z respectively. Prove that either W, X, Y and Z coincide, or $WXYZ$ is a rectangle.

4. Brackets are to be inserted into the expression $10 \div 9 \div 8 \div 7 \div 6 \div 5 \div 4 \div 3 \div 2$ so that the resulting number is an integer.
   (a) Determine the maximum value of this integer.
   (b) Determine the minimum value of this integer.

5. RyNo, a little rhinoceros, has 17 scratch marks on its body. Some are horizontal and the rest are vertical. Some are on the left side and the rest are on the right side. If RyNo rubs one side of its body against a tree, two scratch marks, either both horizontal or both vertical, will disappear from that side. However, at the same time, two new scratch marks, one horizontal and one vertical, will appear on the other side. If there are less than two horizontal and less than two vertical scratch marks on the side being rubbed, then nothing happens. If RyNo continues to rub its body against trees, is it possible that at some point in time, the numbers of horizontal and vertical scratch marks have interchanged on each side of its body?

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 2+3 and 5 points respectively.

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

Solution to Junior O-Level Spring 2012

1. Whichever square we dig up first, there is no guarantee that the treasure is there. If the message we get says that the treasure is one square away, we cannot determine its location uniquely. Thus we have to dig up at least three squares. Let the first two squares we dig up be at the lower left corner and the lower right corner. We may as well suppose that we do not find the treasure under either of them. The diagram below shows the possible coordinates of the treasure based on the messages under these two squares. Since every square has a unique pair of coordinates, the treasure can be brought up by digging up just one more square.

7,14	8,12	9,12	10,11	11,10	12,9	13,8	14,7
6,13	7,12	8,11	9,10	10,9	11,8	12,7	13,6
5,12	6,11	7,10	8,9	9,8	10,7	11,6	12,5
4,11	5,10	6,9	7,8	8,7	9,6	10,5	11,4
3,10	4,9	5,8	6,7	7,6	8,5	9,4	10,3
2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4	7,3	9,2
1,8	2,7	3,6	4,6	5,5	6,3	7,2	8,1
0,7	1,6	2,5	3,4	4,3	5,2	6,1	7,0

2. **Solution ny Ling Long:**
   All integers under discussion are taken to be positive. The divisors of an integer n can be divided into pairs such that the product of the two numbers in each pair is n, except when n is a square, with $\sqrt{n}$ having no partner. Suppose there exists an integer n with an even number of odd divisors and an odd number of even divisors. Then it has an odd number of divisors in total, and must be a square, say $n = x^2$. Let $x = 2^k y$ where y is odd. Then $n = 2^{2k}y^2$, and the odd divisors of n are precisely the divisors of y^2. This number cannot be even.

3. Suppose $ABCD$ is a rhombus. Then both W and Y coincide with the midpoint of AC, and both X and Z coincide with the midpoint of BD. Since AC and BD bisect each other, all four points coincide. Suppose $ABCD$ is not a rhombus. Then none of the four points coincides with the common midpoint of AC and BD. Hence they are distinct. By symmetry, $AW = CY$ and $BX = DZ$. Hence WY and XZ also bisect each other, so that $WXYZ$ is a parallelogram. Let the incircle of ABC touch AB at P and BC at Q. We may assume that W is closer to A and Y is closer to C. Then

$$WY = CW - CY = CW - AW = CQ - AP = CB - AB.$$

   Similarly, $XZ = AD - AB = WY$. Being a parallelogram with equal diagonals, $WXYZ$ is a rectangle.

4. Bracketing simply separates the factors 10, 9, ..., 2 into the numerator and the denominator of the overall expression.

   (a) We have

$$\begin{aligned} & 10 \div (((((((9 \div 8) \div 7) \div 6) \div 5) \div 4) \div 3) \div 2) \\ = \; & 10 \div \frac{9}{8!} \\ = \; & \frac{10!}{9^2} \\ = \; & 44800. \end{aligned}$$

   Since 9 is the second number in the sequence, it must be in the denominator. Hence the maximum value cannot be higher than 44800.

   (b) Since 7 is the only number in the sequence divisible by 7, it must be in the numerator. Hence the minimum value cannot be lower than 7. We have

$$\begin{aligned} & (10 \div 9) \div ((8 \div 7) \div (6 \div ((5 \div 4) \div (3 \div 2)))) \\ = \; & \frac{10}{9} \div \left(\frac{8}{7} \div \left(6 \div \left(\frac{5}{4} \div \frac{3}{2}\right)\right)\right) \\ = \; & \frac{10}{9} \div \left(\frac{8}{7} \div \left(6 \div \frac{6}{5}\right)\right) \\ = \; & \frac{10}{9} \div \left(\frac{8}{7} \div \frac{36}{5}\right) \\ = \; & \frac{10}{9} \div \frac{10}{63} \\ = \; & 7. \end{aligned}$$

5. Let a, b, c and d be the numbers of scratch marks which are horizontal and on the left side, vertical and on the left side, horizontal and on the right side, and vertical and on the right side. Suppose the initial values of a and b have been interchanged, and so are those of c and d, then $a + b$ and $c + d$ are unchanged. Since each of these two sums changes by 2 after a rubbing, the total number of rubbings must be even. If we allow negative values temporarily, the order of the rubbings is immaterial, and we can assume that they occur alternately on the left side and on the right side. After each pair of rubbings, the parity of each of a, b, c and d has changed. Suppose initially $a + b$ is odd so that $c + d$ is even. After an odd number of pairs of rubbings, the final values of a and b may have interchanged from their initial values, the odd one becomes even and the even one becomes odd. However, this is not possible for c and d, as they either change from both even to both odd, or from both odd to both even. Similarly, after an even number of pairs of rubbings, the final values of c and d may have interchanged from their initial values, but this is not possible for a and b. Thus the desired scenario cannot occur.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2012[1].**

1. Each vertex of a convex polyhedron lies on exactly three edges, at least two of which have the same length. Prove that the polyhedron has three edges of the same length.

2. The cells of a $1 \times 2n$ board are labelled $1, 2, \ldots, n, \ -n, \ \ldots, \ -2, \ -1$ from left to right. A marker is placed on an arbitrary cell. If the label of the cell is positive, the marker moves to the right a number of cells equal to the value of the label. If the label is negative, the marker moves to the left a number of cells equal to the absolute value of the label. Prove that if the marker can always visit all cells of the board, then $2n+1$ is prime.

3. Consider the points of intersection of the graphs $y = \cos x$ and $x = 100\cos(100y)$ for which both coordinates are positive. Let a be the sum of their x-coordinates and b be the sum of their y-coordinates. Determine the value of $\frac{a}{b}$.

4. A quadrilateral $ABCD$ with no parallel sides is inscribed in a circle. Two circles, one passing through A and B, and the other through C and D, are tangent to each other at X. Prove that the locus of X is a circle.

5. In an 8×8 chessboard, the rows are numbers from 1 to 8 and the columns are labelled from a to h. In a two-player game on this chessboard, the first player has a White Rook which starts on the square b2, and the second player has a Black Rook which starts on the square c4. The two players take turns moving their rooks. In each move, a rook lands on another square in the same row or the same column as its starting square. However, that square cannot be under attack by the other rook, and cannot have been landed on before by either rook. The player without a move loses the game. Which player has a winning strategy?

Note: The problems are worth 4, 4, 5, 5 and 5 points respectively.

[1] Courtesy of Professor Andy Liu.

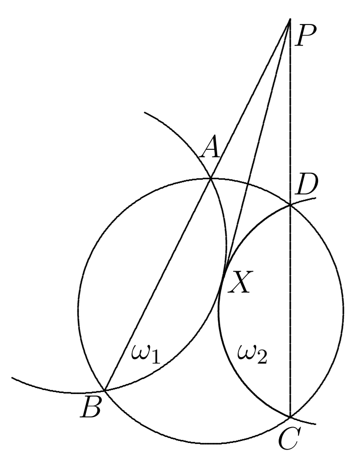
Solution to Senior O-Level Spring 2012

1. Let the number of vertices be v and the number of edges be e. Since each vertex lies on exactly 3 edges and each edge joins exactly 2 vertices, $3v = 2e$. Suppose to the contrary that the polyhedron does not have three edges of equal length. Then each vertex has a pair of equal edges of length different from any other edge. Hence the total number of edges is at least $2v$, but $3v = 2e \geq 4v$ is a contradiction.

2. Suppose $2n + 1$ is not prime. Then it has a prime divisor $p < 2n + 1$. If the marker starts on a cell whose label is divisible by p, it must move in either direction by a number of spaces equal to a multiple of p. We claim that the cells whose labels are divisible by p are evenly spaced. Then the marker must stay on cells whose labels are divisible by p, and cannot visit all cells. The claim certainly holds among the cells with positive labels and among those with negative labels. To see that it also holds across the two sides, simply add $2n + 1$ to each of the negative labels. Then a label is divisible by p after the modification if and only if it is divisible by p before the modification. The desired result follows since the modified labels are $1, 2, \dots, 2n$ from left to right.

3. **Solution by Olga Ivrii.**
   Define $X = \frac{x}{10}$ and $Y = 10y$. Then the graphs become the symmetric pair $Y = 10\cos(10X)$ and $X = 10\cos(10Y)$. Now X and Y are both positive if and only if both x and y are positive. Let A be the sum of the X-coordinates and B be the sum of the Y-coordinates.for which both X and Y are positive. Then $A = \frac{a}{10}$ and $B = 10b$ by definition, and $A = B$ by symmetry. Hence $\frac{a}{b} = \frac{10A}{\frac{B}{10}} = 100$.

4. **First Solution by Central Jury:**
   Draw the circumcircle of $ABCD$, a circle ω_1 through A and B and a circle ω_2 through C and D such that ω_1 and ω_2 are tangent to each other. Let the lines AB and CD omtersect at P, which is necessarily outside all three circle. Let the line PX intersect ω_1 again at Y_1 and ω_2 again at Y_2. We have $PA \cdot PB = PC \cdot PD = k$, $PA \cdot PB = PX \cdot PY_1$ and $PC \cdot PD = PX \cdot PY_2$. It follows that Y_1 and Y_2 coincide. Since this point lies on both ω_1 and ω_2, it must also coincide with X. Hence PX^2 is equal to the constant k, so that the locus of X is a circle with centre P.



Second Solution:

Perform an inversion with respect to A, and let B', C', D' and X' be the respective images of B, C, D and X. The image of the fixed circle is the line passing through B', C' and D', with B' not between C' and D'. The image of the circle passing through C and D is a circle ω passing through C' and D', and the image of the circle passing through A and B is a line passing through B' and tangent to ω at X'. Hence $(B'X')^2 = B'C' \cdot B'D'$. Since B', C' and D' are fixed points, X' is at a constant distance from B', so that its locus is a circle λ with centre B'. It follows that the locus of X is the pre-image of λ, which is either a straight line or a circle. In order for it to be a straight line, λ must pass through A, so that $(AB')^2 = B'C' \cdot B'D'$. Let r be the radius of inversion. Then $(\frac{r}{AB})^2 = \frac{r^2 BC}{AB \cdot AC} \cdot \frac{r^2 BD}{AB \cdot AD}$, which simplifies to $\frac{AC}{BC} = \frac{BD}{AD}$. Since $\angle ACB = \angle BDA$, triangles ACB and BDA are similar, so that $\angle ABC = \angle BAD$. It follows that CD is parallel to AB, but we are given that $ABCD$ has no parallel sides. Hence the locus of X is indeed a circle.

5. The second player has a winning strategy. Divide the eight rows into four pairs (1,3), (2,4), (5,7) and (6,8), and the eight columns also into four pairs (b, c), (d, e), (f, g) and (h, a). Then divide the sixty-four squares into thirty-two pairs. Two squares are in the same pair if and only if they are on two different rows which form a pair, and on two different columns which also form a pair. Thus the starting squares of the two rooks form a pair. The second player's strategy is to move the Black Rook to the square which forms a pair with the square where the White Rook has just landed. First, this can always be done, because if the White Rook stays on its current row, the Black Rook will do the same, and if the White Rook stays on its current column, the Black Rook will do the same. Second, since the square on which the White Rook has just landed cannot have been landed on before, the square to which the Black Rook is moving has never been landed on before, since the squares are occupied by the two rooks in pairs. Third, the Black Rook will not be under attack by the White Rook since the two squares in the same pair are on different rows and on different columns. Hence the second player always has a move, and can simply wait for the first player to run out of moves.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2012[1].**

1. It is possible to place an even number of pears in a row such that the masses of any two neighbouring pears differ by at most 1 gram. Prove that it is then possible to put the pears two in a bag and place the bags in a row such that the masses of any two neighbouring bags differ by at most 1 gram.

2. One hundred points are marked in the plane, with no three in a line. Is it always possible to connect the points in pairs such that all fifty segments intersect one another?

3. In a team of guards, each is assigned a different positive integer. For any two guards, the ratio of the two numbers assigned to them is at least 3:1. A guard assigned the number n is on duty for n days in a row, off duty for n days in a row, back on duty for n days in a row, and so on. The guards need not start their duties on the same day. Is it possible that on any day, at least one in such a team of guards is on duty?

4. Each entry in an $n \times n$ table is either $+$ or $-$. At each step, one can choose a row or a column and reverse all signs in it. From the initial position, it is possible to obtain the table in which all signs are $+$. Prove that this can be accomplished in at most n steps.

5. Let p be a prime number. A set of $p+2$ positive integers, not necessarily distinct, is called *interesting* if the sum of any p of them is divisible by each of the other two. Determine all interesting sets.

6. A bank has one million clients, one of whom is Inspector Gadget. Each client has a unique PIN number consisting of six digits. Dr. Claw has a list of all the clients. He is able to break into the account of any client, choose any n digits of the PIN number and copy them. The n digits he copies from different clients need not be in the same n positions. He can break into the account of each client, but only once. What is the smallest value of n which allows Dr. Claw to determine the complete PIN number of Inspector Gadget?

7. Let AH be an altitude of an equilateral triangle ABC. Let I be the incentre of triangle ABH, and let L, K and J be the incentres of triangles ABI, BCI and CAI respectively. Determine $\angle KJL$.

Note: The problems are worth 4, 4, 6, 6, 8, 8 and 8 points respectively.

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

Solution to Junior A-Level Spring 2012

1. Let the pears be $P_1,\ P_2,\dots,P_{2n}$, with respective masses $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2n}$. For $1 \le k \le n$, put P_k and P_{2n-k+1} in bag B_k and place the bags in a row in numerical order. We claim that the difference in the masses of B_k and B_{k+1} is at most 1 gram for $1 \le k < n$. Now the mass of B_k is $a_k + a_{2n-k+1}$ amd the mass of B_{k+1} is $a_{k+1} + a_{2n-k}$. Both $a_{k+1} - a_k$ and $a_{2n-k+1} - a_{2n-k}$ are non-negative, and we claim that each is at most 1 gram. The desired result will then follow. Consider P_k and P_{k+1} in the original line-up. If they are in fact neighbours, the claim follows from the given condition. Suppose there are other pears in between. Moving from P_k to P_{k+1}, let P_j be the first pear not lighter than P_k and P_i be the pear before P_j. Then $a_i \le a_k \le a_j$ and $a_j - a_i \le 1$. Hence $a_j - a_k \le 1$. However, we must have $a_{k+1} \le a_j$. It follows that $a_{k+1} - a_k \le 1$. Similarly, we can prove that $a_{2n-k+1} - a_{2n-k} \le 1$, justifying the claim.

2. **Solution by Olga Ivrii.**
   Let $P_1,\ P_2,\ \dots,P_{99}$ be evenly spaced points on a circle with centre P_{100}. We may assume that when the points are connected in pairs, P_{100} is connected to P_1. Let P_{50} be connected to P_k where $k \ne 1, 50, 100$. If $2 \le k \le 49$, $P_{50}P_k$ and P_1P_{100} are in opposite semicircles divided by the diameter passing through P_{50}. If $51 \le k \le 99$, $P_{50}P_k$ and P_1P_{100} are in opposite semicircles divided by the diameter passing through P_{49}. In either case, $P_{50}P_k$ and P_1P_{100} do not intersect.

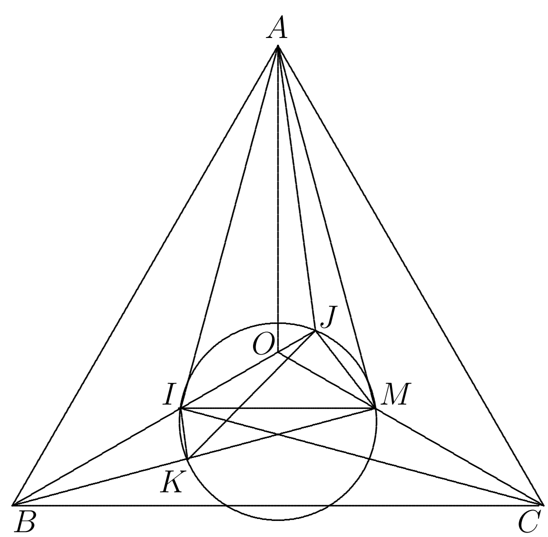
3. Let the guards be $G_1,\ G_2,\ \dots,\ G_k$ and let $n_1 > n_2 > \cdots > n_k \ge 1$ be the numbers assigned to them. In fact, $n_i \ge 3n_{i+1}$ for $1 \le i < k$. There is an interval of $3n_2$ days during which G_1 is not on duty. Within this interval, there is a subinterval of $n_2 \ge 3n_3$ days during which G_2 is not on duty either. Repeating this argument until we reach G_k, we will have an interval of n_k days in which none of the guards are on duty.

4. **Solution by Olga Ivrii.**
   Suppose $n \ge 2$. Let $1 \le i < k \le n$ and $1 \le j < \ell \le n$. We claim that the number of +s among $a_{i,j},\ a_{i,\ell},\ a_{k,j}$ and $a_{k,\ell}$ is even. This is because each step reverses the signs of an even number (0 or 2) of these 4 signs. The claim follows since we can make all signs +s. We now use induction on n. The basis $n = 1$ is trivial. Suppose the result holds for some $n \ge 1$. Consider an $(n+1) \times (n+1)$ table. If there are no −s, there is nothing to prove. We may assume that $a_{n+1,n+1}$ is −. By the induction hypothesis, we can make all signs +s except possibly for those in the last row and those in the last column, in n steps. Consider $a_{1,n+1}$. Suppose it is +. By our earlier claim, taking $i = 1,\ k = n+1$ and $\ell = n+1$, we can conclude that $a_{n+1,j}$ is − for all j. By the claim again, with $k = n+1,\ j = 1$ and $\ell = n+1$, we can conclude that $a_{i,n+1}$ is + for all $i < n+1$. Reversing the signs in the last row will complete the desired transformation in $n+1$ moves. Suppose $a_{1,n+1}$ is −. We can prove as above that all entries in the last column are −s and all entries in the last row except the last one are +s. Reversing the signs in the last column will complete the desired transformation, again in $n+1$ steps.

5. By factoring it out if necessary, we may assume that the greatest common divisor of the $p+2$ numbers in an interesting set is 1. Let $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p+2}$. For $1 \le k \le p+2$, a_k divides $S - a_j$ for $j \ne k$. Hence a_k divides $(p+1)S - (S - a_k)$, so that a_k divides pS. We consider two cases.
Case 1. None of a_k is divisible by p.
Then a_k divides S. For any $j \ne k$, a_k divides $S - a_j$, so that it divides a_j. It follows that all the numbers are equal. Since their greatest common divisor is 1, they are all equal to 1.
Case 2. At least one a_k is divisible by p.
Not all of them can be divisible by p since their greatest common divisor is 1. We may assume that a_k is not divisible by p for $1 \le k \le n$ and divisible by p for $n+1 \le k \le p+2$, where $n \le p+1$. Suppose $n \le p$. Let $T = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. If T is not divisible by p, then $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ is not divisible by a_{p+2}. If T is divisible by p, then $a_2 + a_3 + \cdots + a_{p+1}$ is not divisible by a_{p+2}. It follows that $n = p+1$, so that a_{p+2} is the only number divisible by p. As in Case 1, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{p+1} = 1$ so that $a_{p+2} = p$.
In summary, all interesting sets are of the form $a_1 = a_2 = \cdots = a_{p+1} = d$ and $a_{p+2} = d$ or pd for an arbitrary positive integer d.

6. In order to be sure of knowing a digit of Inspector Gadget's PIN number, Dr. Claw either must check it or check that digit of every other client. For $n = 3$, Dr. Claw can find out the first three digits of Inspector Gadget's PIN number, and deduce the last three digits by checking those of every other client. There is no solution for $n \le 2$ since Dr. Claw can know at most 2 digits of Inspector Gadget's PIN number and deduce 2 more by checking those of every other client.

7. **Solution by Central Jury:**
Since K is the incentre of triangle BCI, $\angle BKI = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCI = 97.5^\circ$. Let O be the centre of triangle ABC and let M be the point symmetric to I about OA. Note that K lies on BM. We have $\angle MAJ = 7.5^\circ = \angle OAJ$. Since $\angle AOJ = 60^\circ = \angle MOJ$, J is the incentre of triangle MAO. Hence $\angle MJO = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle MAO = 97.5^\circ = \angle BKI$. Hence $IJMK$ is a cyclic quadrilateral and $\angle IJK = \angle IMK = 15^\circ$. Since L is symmetric to K about BO, $\angle KJL = 2\angle IJK = 30^\circ$.



International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2012[1].**

1. In a team of guards, each is assigned a different positive integer. For any two guards, the ratio of the two numbers assigned to them is at least 3:1. A guard assigned the number n is on duty for n days in a row, off duty for n days in a row, back on duty for n days in a row, and so on. The guards need not start their duties on the same day. Is it possible that on any day, at least one in such a team of guards is on duty?

2. One hundred points are marked inside a circle, with no three in a line. Prove that it is possible to connect the points in pairs such that all fifty lines intersect one another inside the circle.

3. Let n be a positive integer. Prove that there exist integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that for any integer x, the number $(\cdots(((x^2 + a_1)^2 + a_2)^2 + \cdots)^2 + a_{n-1})^2 + a_n$ is divisible by $2n - 1$.

4. Alex marked one point on each of the six interior faces of a hollow unit cube. Then he connected by strings any two marked points on adjacent faces. Prove that the total length of these strings is at least $6\sqrt{2}$.

5. Let ℓ be a tangent to the incircle of triangle ABC. Let ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c be the respective images of ℓ under reflection across the exterior bisector of $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$. Prove that the triangle formed by these lines is congruent to ABC.

6. We attempt to cover the plane with an infinite sequence of rectangles, overlapping allowed.
   (a) Is the task always possible if the area of the nth rectangle is n^2 for each n?
   (b) Is the task always possible if each rectangle is a square, and for any number N, there exist squares with total area greater than N?

7. Konstantin has a pile of 100 pebbles. In each move, he chooses a pile and splits it into two smaller ones until he gets 100 piles each with a single pebble.
   (a) Prove that at some point, there are 30 piles containing a total of exactly 60 pebbles.
   (b) Prove that at some point, there are 20 piles containing a total of exactly 60 pebbles.
   (c) Prove that Konstantin may proceed in such a way that at no point, there are 19 piles containing a total of exactly 60 pebbles.

Note: The problems are worth 4, 5, 6, 6, 8, 3+6 and 6+3+3 points respectively.

[1] Courtesy of Professor Andy Liu

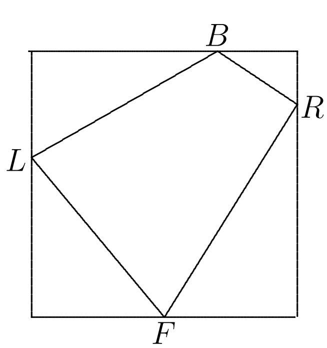
Solution to Senior A-Level Spring 2012

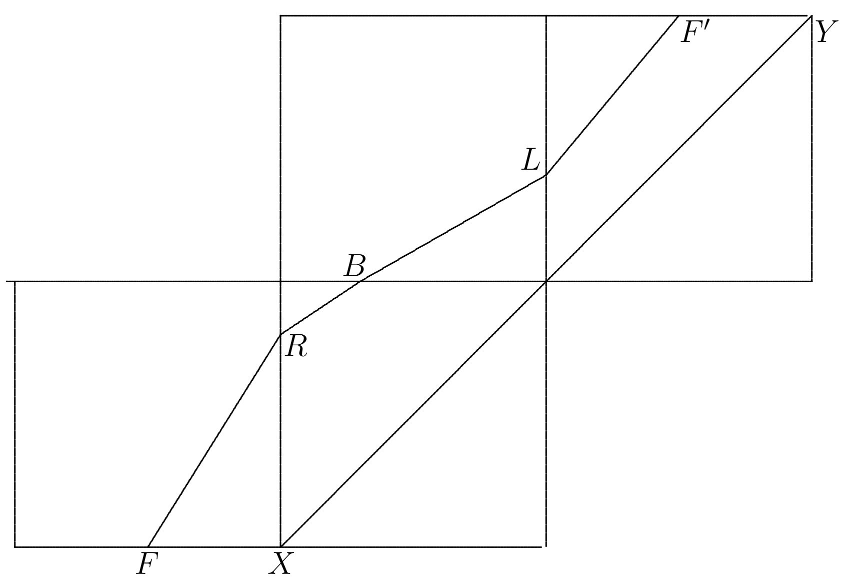
1. Let the guards be $G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_k$ and let $n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1$ be the numbers assigned to them. In fact, $n_i \geq 3n_{i+1}$ for $1 \leq i < k$. There is an interval of $3n_2$ days during which G_1 is not on duty. Within this interval, there is a subinterval of $n_2 \geq 3n_3$ days during which G_2 is not on duty either. Repeating this argument until we reach G_k, we will have an interval of n_k days in which none of the guards are on duty.

2. Among all the ways of connecting the one hundred points in pairs, consider the one for which the total length of the fifty segments is maximum, We claim that this connection has the desired property. Suppose to the contrary that two lines, AB and CD, intersect outside the circle. Then these four points form a convex quadrilateral, and we may assume that it is $ABCD$. Let AC intersect BD at E. Then $AC + BD = AE + BE + CE + DE > AB + CD$. Replacing AB and CD by AC and BD increases the total length of the fifty segments. This contradiction justifies our claim.

3. Note that $1^2 \equiv (2n-2)^2,\ 2^2 \equiv (2n-3)^2,\ \ldots,\ (n-1)^2 \equiv n^2 \pmod{2n-1}$. We claim that for any i and j, $1 \leq i < j \leq n-1$, we can find k such that $(i+k)^2 \equiv (j+k)^2 \pmod{2n-1}$. Suppose $j - i = 2m - 1$ for some m. Choose k so that $j + k \equiv n + m - 1$ and $i + k \equiv n - m$. Suppose $j - i$ is even. Then $(2n-1) + i - j$ is odd and we can make a similar choice for k. This justifies the claim. Now x^2 takes on n different values modulo $2n-1$. By a suitable choice of a_1, we can make $(x^2 + a_1)^2$ take on at most $n-1$ different values modulo $2n-1$. By a suitable choice of a_2, we can make $((x^2 + a_1)^2 + a_2)^2$ take on at most $n-2$ different values modulo $2n-1$. Continuing in this manner, we can eventually choose a_{n-1} so that $(\cdots(((x^2+a_1)^2+a_2)^2+\cdots)^2+a_{n-1})^2$ takes on only one value. By a suitable choice of a_n, we can make the final expression divisible by $2n-1$.

4. Let the points Alex marked be F on the front, B at the back, R to the right, L to the left, U on the up face and D on the down face. The twelve strings formed three closed loops $FRBL$, $FUBD$ and $RULD$. We claim that the total length of each loop is at least $2\sqrt{2}$. Let $FRBL$ be projected onto the down face. Then each point lies on one side of a unit square, as shown in the diagram below on the left. We now fold the loop out as shown in the diagram below on the right. Since $FXYF'$ is a parallelogram, the total length of the strings FR, RB. BL and LF' is at least XY. This is twice the diagonal of a unit square, which is $2\sqrt{2}$.





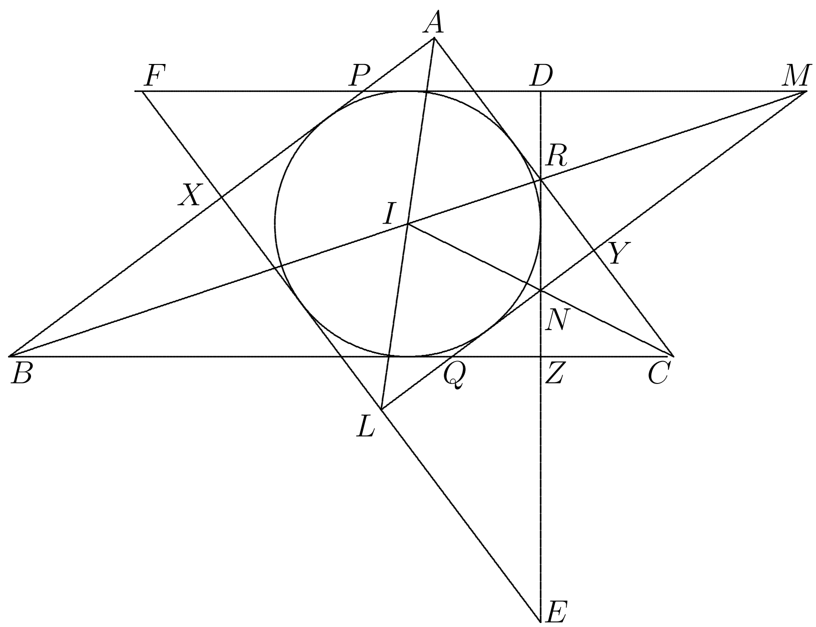
5. Instead of reflecting ℓ across the exterior bisectors of the angles of triangle ABC, we reflect it across the interior bisectors of these angles. Let ℓ intersect the lines AI, BI and CI at L, M and N respectively, where I is the incentre of ABC. Let ℓ intersect BC at Q and CA at Y. Let ℓ_a intersect ℓ_b at F, ℓ_c at E and AB at X. Let ℓ_b intersect ℓ_c at D and AB at P. Let ℓ_c intersect BC at Z and CA at R. Note that R may or may not lie on BM. By symmetry about BM, $\angle BQM = \angle BPM$. By symmetry about CN, $\angle CQN = \angle CRN$. It follows that

$$\angle ARD = \angle CRN = \angle CQN = 180^\circ - \angle BQM = 180^\circ - \angle BPM = \angle APD.$$

Hence $ADRP$ is cyclic, so that $\angle FDE = \angle CAB$. By symmetry about AL, $\angle AXL = \angle AYL$. By symmetry about CN, $\angle CYN = \angle CZN$. It follows that

$$\angle BZE = \angle CZN = \angle CYN = 180^\circ - \angle AYL = 180^\circ - \angle AXL = \angle BXE.$$

Hence $BEZX$ is cyclic, so that $\angle DEF = \angle ABC$. It follows that triangles ABC and DEF are similar. Now the triangle obtained by reflecting ℓ across the interior bisectors of the angles of triangle ABC is clearly similar to DEF, and hence to ABC. Since these two triangles have the same incircle, they are in fact congruent.



6. (a) **Solution by Daniel Spivak:**
Let the dimensions of the n-th rectangle be $n^2 2^n \times \frac{1}{2^n}$. We claim that this sequence of rectangles cannot even cover a disk with radius 1. The intersection of the n-th rectangle with the disk is contained in a $2 \times \frac{1}{2^n}$ rectangle and has area less than $\frac{1}{2^{n-1}}$. The total area of these intersections is less than $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots < 2 < \pi$.

(b) **Solution by Hsin-Po Wang:**
Suppose there exists a positive number a such that the side length of infinitely many of the squares in the sequence is at least a. Then we divide the plane into a sequence of $a \times a$ squares in an outward spiral, and these squares can be covered one at a time. Henceforth, we assume that for for positive real number a, the number of squares in the sequence with side length at least a is finite. This induces a well-ordering on the squares of the sequence in non-ascending order of side lengths $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. We may assume that $a_1 < 1$.

We divide the plane into a sequence of unit squares in an outward spiral, and try to cover these squares one at a time. Place the $a_1 \times a_1$ square at the bottom left corner of the first unit square. Place the $a_2 \times a_2$ square on the bottom edge of this unit square to the right of the $a_1 \times a_1$ square. In this manner, we can cover the bottom edge of the unit square because $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} > a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k_1}^2 \geq 1$ for some k_1. Let $b_1 = a_{k_1}$. Then we have covered the bottom strip of the unit square of height b_1. We now focus on the $1 \times (1 - b_1)$ rectangle, and apply the same process to cover the bottom strip of height b_2 with squares of side lengths $a_{k_1+1},\ a_{k_1+2},\ \ldots,\ a_{k_2} = b_2$.Continuing in this manner, we cover strips of height $b_3,\ b_4,\ \ldots$. We claim that $b_1 + b_2 + \cdots + b_h \geq 1$ for some h. Suppose this is not so. Then for all h,

$$\begin{aligned} 1 &> (b_1 + b_2 + \cdots + b_h)^2 \\ &\geq b_1(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) \\ &\quad + b_2(a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \cdots + a_{k_3}) + \cdots \\ &\quad + b_h(a_{k_h+1} + a_{k_h+2} + \cdots + a_{k_{h+1}}) \\ &\geq a_{k_1+1}^2 + a_{k_1+2}^2 + \cdots + a_{k_{h+1}}^2. \end{aligned}$$

This is a contradiction since the last expression is not bounded above.

7. (a) **Solution by Daniel Spivak:**
At some point in time, we must have exactly 70 piles. At least 40 of them contain exactly 1 pebble each, as otherwise the total number of pebbles is at least $39 + 2 \times 31 = 101$. Removing these 40 piles leave behind exactly 30 piles containing exactly 60 pebbles among them.

(b) **Solution by Peter Xie:**
We call k piles containing a total of exactly $2k + 20$ pebbles a good collection. We claim that if $k \geq 23$, a good collection contains either 1 pile with exactly 2 pebbles or 2 piles each with exactly 1 pebble. Otherwise, the total number of pebbles in the collection is at least $1 = 3(k-1) = 3k - 2$, which is strictly greater than $2k + 20$ when $k \geq 23$. Now any partition of the original pile into 40 piles results in a good collection with $k = 40$. From this, we can obtain a good collection with $k = 39$ by either removing 1 pile with exactly 2 pebbles or removing 2 piles each with exactly 1 pebble and then subdividing any other pile with at least 2 pebbles. In the same way, we can obtain good collections down to $k = 22$, with a total of exactly 64 pebbles. We claim that there exist 2 or more piles containing a total of exactly 4 pebbles. Suppose this is not the case. If there are no piles with exactly 1 pebble, then the total number of pebbles in the collection is at least $2 + 3 \times 21 > 64$. If there are piles with exactly 1 pebble, then the total is at least $3 + 4 \times 19 > 64$. Thus the claim is justified. We now remove these 4 pebbles, obtaining 60 pebbles in at most 20 piles. Eventual subdivision of these piles will bring the number of piles to 20 while keeping the total number of pebbles at 60.

(c) **Solution by Peter Xie:**
Separate out piles of 3 until we have 32 piles of 3 and are left with 1 pile of 4. Throughout this process, exactly one pile contains a number of pebbles not divisible by 3. If we include this pile, the total cannot be 60. If we exclude this pile, the total of 19 piles of 3 is only 57. We now separate the pile of 4 into 2 piles of 2. Now every pile contains at most 3 pebbles, so that 19 piles can contain at most 57 pebbles. Further separation will not change this situation.