Четырнадцатый Турнир, 1992-1993

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1992 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В банде 101 террорист. Все вместе они в вылазках ни разу не участвовали, а каждые двое встречались в вылазках ровно по разу.
Докажите, что один из террористов участвовал не менее, чем в 11 различных вылазках.
А. Анджанс

Задача 2.(3)
На каждой стороне параллелограмма выбрано по точке. Точки, лежащие на соседних (имеющую общую вершину) сторонах, соединены.
Докажите, что центры описанных окружностей четырёх получившихся треугольников - вершины параллелограмма.
Е. Д. Куланин

Задача 3.(5)
Дано натуральное число M.
Докажите, что существует число, кратное M, сумма цифр которого (в десятичной записи) нечётна.
Д. Фомин

Задача 4.(2+3)
а)(2) В треугольнике ABC угол $\angle A$ больше угла $\angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AB.
б)(3) В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle A > \angle C$, $\angle D > \angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AD.
Ф. Назаров

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 25 октября 1992 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
В таблице n*n разрешается добавить ко всем числам любого несамопересекающегося замкнутого маршрута ладьи по 1. В первоначальной таблице по диагонали стояли единицы, а остальные были нули.
Можно ли с помощью нескольких разрешённых преобразований добиться того, что все числа в таблице станут равны? (Считается, что ладья побывала во всех клетках таблицы, через которые проходит её путь.)
А. А. Егоров

Задача 2.(5)
В квадрат вписано 1993 различных правильных треугольника (треугольник вписан, если три его вершины лежат на сторонах квадрата).
Докажите, что внутри квадрата можно указать точку, лежащую на границе не менее чем 499 из этих треугольников.
Н. Седракян

Задача 3.(5)
Можно ли подобрать два многочлена P(x) и Q(x) с целыми коэффициентами, такие что P-Q, P и P+Q - квадраты некоторых многочленов (причём Q не получается умножением P на число)?
В. Прасолов

Задача 4.
В четырёхугольнике ABCD AB=BC=CD=1, AD не равно 1. Положение точек B и C фиксировано, точки же A и D подвергаются преобразованиям, сохраняющим длины отрезков AB, CD и AD. Новое положение точки A получается из старого зеркальным отражением в отрезке BD, новое положение точки D получается из старого зеркальным отражением в отрезке AC (где A уже новое), затем на втором шагу опять A отражается относительно BD (D уже новое), затем снова преобразуется D, затем аналогично проводится третий шаг, и так далее.
Докажите, что на каком-то шагу положение точек совпадает с первоначальным.
М. Концевич

Задача 5.(8)
Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим точки M, N на разных сторонах данного угла такие, что углы $\angle MAO$ и $\angle OAN$ равны.
Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).
С. Токарев

Задача 6.(8)
Числовая последовательность определяется условиями:
$a_1=1$; $a_{n+1} = a_n + [a_n^{1/2}]$ (через [x] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x).
Докажите, что среди членов этой последовательности бесконечно много полных квадратов.
А. Анджанс

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1992 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Дан куб с ребром длины n см. В нашем распоряжении имеется длинный кусок изоляционной ленты шириной 1 см. Требуется обклеить куб лентой, при этом лента может свободно переходить через ребро на другую грань, по грани она должна идти по прямой параллельно ребру и не свисать с грани вбок.
На сколько кусков необходимо разрезать ленту, чтобы обклеить куб?
А. Спивак

Задача 2.(4)
Рассматривается последовательность квадратов на плоскости. Первые два квадрата со стороной 1 расположены рядом (второй правее) и имеют одну общую вертикальную сторону. Нижняя сторона третьего квадрата со стороной 2 содержит верхние стороны первых двух квадратов. Правая сторона четвёртого квадрата со стороной 3 содержит левые стороны первого и третьего квадратов. Верхняя сторона пятого квадрата со стороной 5 содержит нижние стороны первого, второго и четвертого квадратов. Далее двигаемся по спирали бесконечно, обходя рассмотренные квадраты против часовой стрелки так, что сторона нового квадрата составлена из сторон трех ранее рассмотренных.
Докажите, что центры всех этих квадратов, кроме первого, принадлежат двум прямым.
А. Анджанс

Задача 3.(4)
Функция f(x) на отрезке [a,b] равна максимуму из нескольких функций вида $y=C*10^{-|x-d|}$ (с различными d и C, причём все C положительны). Дано, что f(a) = f(b).
Докажите, что сумма длин участков, на которых функция возрастает, равна сумме длин участков, на которых функция убывает.
Н. Васильев

Задача 4.(1+3)
а)(1) В треугольнике ABC угол $\angle A$ больше угла $\angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AB.
б)(3) В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle A>\angle C$, $\angle D>\angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AD.
Ф. Назаров

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 25 октября 1992 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Докажите, что существует набор из 100 различных натуральных чисел $c_1, c_2, ..., c_{100}$ такой, что для любых двух соседних чисел c_i и c_{i+1} этого набора сумма $c_i^2+c_{i+1}^2$ есть квадрат целого числа.
С. Токарев

Задача 2.(4)
Куб с ребром n составлен из кубиков с ребром 1, некоторые из которых белые, а остальные - чёрные, таким образом, что каждый белый кубик имеет общую грань с тремя чёрными, а каждый чёрный - с тремя белыми.
При каких n это возможно?
С. Токарев

Задача 3.(6)
Числовая последовательность определяется условиями:
$a_1=1$; $a_{n+1} = a_n + [a_n^{1/2}]$ (через [x] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x). Сколько полных квадратов встречается среди первых членов этой последовательности, не превосходящих 1000000?
А. Анджанс

Задача 4.(8)
В таблице m строк, n столбцов. "Горизонтальным ходом" называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остаётся в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется "вертикальный ход" ("строка" в предыдущем определении заменяется на "столбец").
Укажите такое k, что за k ходов (любых) можно получить любую перестановку элементов таблицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.
А. Анджанс

Задача 5.(8)
Биссектриса угла $\angle A$ треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Пусть P - точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника ABC относительно середины стороны BC, M - вторая точка пересечения прямой DP с описанной окружностью.
Докажите, что расстояние от точки M до одной из вершин A, B, C равно сумме расстояний от M до двух других вершин.
В. Гордон

Задача 6.(4+3+2)
Число рёбер многогранника равно 100.
а)(4) Какое наибольшее число рёбер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?
б)(3) Докажите, что для невыпуклого многогранника это число может равняться 96,
в)(2) но не может равняться 100.
А. Анджанс

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1993 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Сторона AB треугольника ABC имеет длину c. На стороне AB взята точка M такая, что $\angle CMA=\varphi$. Найдите расстояние между ортоцентрами (точками пересечения высот) треугольников AMC и BMC.
И. Шарыгин

Задача 2.(3)
Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
А. Ковальджи

Задача 3.(3)
a, b, c - натуральные числа, НОД(a,b,c)=1 и ab/(a-b)=c.
Докажите, что a-b - точный квадрат.
С. Л. Берлов

Задача 4.(4)
Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных - по 20 раз?
С. Токарев

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 14 марта 1993 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Мудрецу С. сообщили сумму трёх натуральных чисел, а мудрецу П. - их произведение.
- Если бы я знал - сказал С., - что твоё число больше, чем моё, я бы сразу назвал три искомых числа.
- Мое число меньше, чем твоё - ответил П., а искомые числа ..., ... и ... .
Какие числа назвал П.?
Л. Борисов

Задача 2.(4)
O - центр окружности, касающейся стороны AC треугольника ABC и продолжений сторон BA и BC, D - центр окружности, проходящей через точки B, A и O.
Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
И. Ф. Акулич

Задача 3.(4)
Задано правило, которое каждой паре чисел x, y ставит в соответствие некоторое число x*y, причём для любых x, y, z выполняются тождества:
1) x*x=0,
2) x*(y*z)=(x*y)+z.
Найдите 1993*1932.
Г. Гальперин

Задача 4.(6)
Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе.
Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)
С. Токарев

Задача 5.(6)
Из бумаги вырезан треугольник с углами 20^o, 20^o, 140^o. Он разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника. Затем один из образовавшихся треугольников также разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, и так далее.
Докажите, что ни на каком шагу нельзя получить треугольник, подобный исходному.
А. И. Галочкин

Задача 6.(4+4)
Примечание: это первая задача на Турнире, которую во время Турнира не решил ни один из его участников.
Ширина реки один километр. Это по определению означает, что от любой точки каждого берега можно доплыть до противоположного берега, проплыв не больше километра.
Может ли катер проплыть по реке так, чтобы в любой момент расстояние до любого из берегов было бы не больше:
а)(4) 700 м?
б)(4) 800 м?
(Берега состоят из отрезков и дуг окружностей.)
Г. Кондаков

Задача 7.(6)
На отрезке [a,b] отмечено несколько синих и красных точек. Две точки одного цвета, между которыми нет отмеченных точек, разрешается стереть. Разрешается также отметить две точки одного цвета, красные или синие, так, чтобы между ними не было других отмеченных точек. Первоначально было отмечено две точки: a - синяя и b - красная.
Можно ли сделать несколько разрешенных пребразований так, чтобы в результате было опять две отмеченные точки: a - красная и b - синяя?
А. Я. Канель-Белов

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1993 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Найти все такие числа вида 2^n (n натурально), что при вычёркивании первой цифры их десятичной записи снова получится степень двойки.
А. Перлин

Задача 2.(3)
Четырёхугольник ABCD - вписанный. M - точка пересечения прямых AB и CD, N - точка пересечения BC и AD. Известно, что BM=DN.
Докажите, что CM=CN.
Ф. Назаров

Задача 3.(3)
Рассматривается числовой треугольник:

```
    1   1   1              1
1   -   -   -  ...       ----
    2   3   4            1993
  1   1    1           1
  -   -   --  ...  ---------
  2   6   12       1992*1993
    1    1
    -   --    ...     ...
    3   12

     ...      ...
```

(первая строчка задана, а каждый элемент остальных строчек вычисляется как разность двух элементов, которые стоят над ним). В 1993-й строчке - один элемент.
Найдите его.
Г. В. Лейбниц

Задача 4.(4)
Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах.
Например: (12, 3, 5) -> (12,20,5) (или -> (4,3,5)).
Можно ли, начав с куч 1993, 199 и 19, сделать одну из куч пустой?
М. Н. Гусаров

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 14 марта 1993 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько неналегающих друг на друга квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата (маленькие квадраты не обязательно равны друг другу).
Рассмотрим те квадраты, которые пересекаются с диагональю большого квадрата.
Может ли оказаться, что сумма их периметров больше 1993?
А. Я. Канель-Белов, А. Н. Колмогоров

Задача 2.(5)
На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен квадрат с центром в точке O. Точки M и N - середины сторон BC и AC, а длины этих сторон равны соответственно a и b.
Найдите наибольшее возможное значение суммы OM+ON (когда угол C меняется).
И. Ф. Шарыгин

Задача 3.(5)
Несколько человек делят наследство. Наследник считается бедным, если ему досталось меньше 99 рублей, богатым, - если ему досталось больше 10000 рублей. Величина наследства и число людей таковы, что при любом способе дележа у богатых окажется не меньше денег, чем у бедных.
Докажите, что при любом способе дележа у богатых не меньше чем в 100 раз больше денег, чем у бедных.
Ф. Назаров

Задача 4.(6)
На доску последовательно записываются натуральные числа. На n-м шагу (когда написаны числа a_1, a_2, ..., a_{n-1}) пишется любое число, которое нельзя представить в виде суммы
$a_1k_1+a_2k_2+...+a_{n-1}k_{n-1}$, где k_i - целые неотрицательные числа (на a_1 никаких ограничений не накладывается).
Доказать, что процесс написания чисел не может быть бесконечным.
А. Я. Канель-Белов

Задача 5.(6)
Существует ли кусочно-линейная функция f, определённая на отрезке [-1,1] (включая концы), для которой f(f(x))=-x при всех x?
(Функция называется кусочно-линейной, если её график есть объединение конечного числа точек и интервалов прямой; она может быть разрывной.)
А. Я. Канель-Белов

Задача 6.(3+3)
Ширина реки один километр. Это по определению означает, что от любой точки каждого берега можно доплыть до противоположного берега, проплыв не больше километра.
Может ли катер проплыть по реке так, чтобы в любой момент расстояние до любого из берегов было бы не больше:
а)(3) 700 м?
б)(3) 800 м?
(Берега состоят из отрезков и дуг окружностей.)
Г. Кондаков

Задача 7.(4+4)
В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются "непохожими", если они различаются не менее, чем по 51 признаку.
а)(4) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.
б)(4) А может ли быть 50?
Дима Терешин, М. Н. Вялый