СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 11 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

3 1. На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?

Сергей Дворянинов

2. Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что

2 а) каждый побывал в полуфинале более одного раза;

3 б) каждый побывал в финале.

Борис Френкин

5 3. В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Фёдор Ивлев

5 4. Дан равносторонний треугольник со стороной d и точка P, расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a, b и c. Докажите, что найдётся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b, c и d.

Александр Эвнин

5 5. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, …, 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

Александр Грибалко

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 11 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

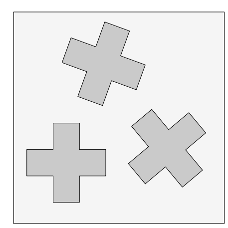
баллы	задачи	
3	1.	Каждый из квадратных трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x) + Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают? *Борис Френкин*
4	2.	На прямой отметили точки $X_1, \ldots, X_{10}$ (именно в таком порядке) и построили на отрезках X_1X_2, X_2X_3, $\ldots$, X_9X_{10} как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10}. Найдите α. *Егор Бакаев*
5	3.	Натуральное число N кратно 2020. В его десятичной записи все цифры различны, причём если любые две из них поменять местами, получится число, не кратное 2020. При каком количестве цифр в десятичной записи числа N такое возможно? *Сергей Токарев*
5	4.	Стороны треугольника разделены основаниями биссектрис на два отрезка каждая. Обязательно ли из шести образовавшихся отрезков можно составить два треугольника? *Лев Емельянов*
	5.	По кругу лежит 101 монета, каждая весит 10 г или 11 г. Докажите, что найдётся монета, для которой суммарная масса k монет слева от неё равна суммарной массе k монет справа от неё, если
3	а)	$k = 50$;
3	б)	$k = 49$. *Александр Грибалко*

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках? *Александр Перепечко*
7	2. Назовём пару различных натуральных чисел *удачной*, если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) — натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.) *Борис Френкин*
	3. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было
3	а) хотя бы сто чисел 5?
4	б) хотя бы сто чисел 10? *Андрей Аржанцев*
7	4. Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов? (На рисунке показано, как можно вырезать три креста.)  *Александр Грибалко*
8	5. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных? *Михаил Евдокимов*
10	6. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник? *Михаил Святловский*
	7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что
6	а) один из углов этого четырехугольника не больше 60°;
6	б) один из углов этого четырехугольника не меньше 120°. *Максим Дидин*

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 — 1. Даны n натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на чёрную доску их среднее арифметическое, а на белую доску — их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые.

Борис Френкин

5 — 2. Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?

Фёдор Ивлев

6 — 3. Окружности α и β с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках C и D. Отрезок AB пересекает окружности α и β в точках K и L соответственно. Луч DK вторично пересекает окружность β в точке N, а луч DL вторично пересекает окружность α в точке M. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

Константин Кноп

7 — 4. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?

Михаил Святловский

7 — 5. Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых?

Михаил Мурашкин

10 — 6. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?

Андрей Аржанцев

12 — 7. Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где n — нечётное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два чёрных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от n.

Николай Белухов

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

РЕШЕНИЯ ОСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [3]. *На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?*

(Сергей Дворянинов)

Ответ: не может.

Треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда некоторые две его вершины — диаметрально противоположные точки его описанной окружности. Каждой паре диаметрально противоположных точек соответствуют ровно 98 прямоугольных треугольников, для разных пар они различны. Поэтому общее количество прямоугольных треугольников делится на 98, но 1000 не делится на 98.

2. *Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что*

а) [2] *каждый побывал в полуфинале более одного раза;*

б) [3] *каждый побывал в финале.*

(Борис Френкин)

По условию каждый сыграл 7 партий, а всего было сыграно $8 \cdot 7 : 2 = 28$ партий. Поскольку каждый год играется 7 партий, кубок разыгрывался 4 раза.

а) Игрок, сыгравший в полуфинале не более одного раза, за 4 года сыграл не более $3 + 3 \cdot 1 = 6$ партий, что противоречит условию.

б) Всего в четырёх финалах было $2 \cdot 4 = 8$ мест. Если кто-то не играл в финале, то кто-то другой должен был сыграть в финале как минимум дважды. Но тогда он сыграл не меньше $2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$ партий, что противоречит условию.

3 [5]. *В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?*

(Фёдор Ивлев)

Ответ: при n, не кратном 4.

Стратегия: каждый раз оставлять в куче кратное 4 число камней: при $n = 4k + 1$ надо взять один камень, при $n = 4k + 2$ — два камня; при $n = 4k + 3$ надо взять p камней, где p — простой делитель числа n вида $4q + 3$ (такой есть, иначе все простые делители n имеют вид $4m + 1$, а произведение чисел такого вида тоже имеет такой вид и не равно $4k + 3$).

Противник из кучи с кратным 4 числом камней не может взять число камней, кратное 4 (это будет не простое число), поэтому начинающий и дальше может играть по стратегии.

4 [5]. *Дан равносторонний треугольник со стороной d и точка P, расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a, b и c. Докажите, что найдётся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b, c и d.*

(Александр Эвнин)

Пусть A, B, C — вершины данного треугольника, такие, что $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$. Пусть F — образ точки P при повороте вокруг A на $60°$, переводящем C в B. Тогда треугольник APF — равносторонний со стороной a, и отрезок FB является образом отрезка PC при этом повороте, откуда $FB = PC = c$. При этом $AB = d$, $PB = b$, и, значит, треугольник APF вместе с точкой B образуют нужную конфигурацию.

5 [5]. *Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)*

(Александр Грибалко)

Мысленно расположим слонов в виде таблицы, как на рисунке. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две первые строки, вторым — два первых столбца. За первое взвешивание мы найдём строку, где должен быть похудевший слон, если он есть, а за второе — столбец. На пересечении этой строки и столбца и будет похудевший слон (если в пересечении окажется пустая клетка, то никто из слонов не похудел).

2	**6**	**1**
3	**4**	**5**
8	**7**	

10 – 11 классы

1 [3]. *Каждый из квадратных трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x) + Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают?*

(Борис Френкин)

Ответ: обязательно.

Первое решение. Предположим противное: $P(x)$ и $Q(x)$ имеют кратные корни a и b соответственно, $a \neq b$. Если ветви графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$ направлены в одну сторону, то трёхчлен $P(x) + Q(x)$ не имеет корней (все его значения одного знака и ненулевые). Если ветви графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$ направлены в разные стороны, то в точках a и b трёхчлен $P(x)+Q(x)$ принимает значения разных знаков, что невозможно для трёхчлена с кратным корнем. Противоречие.

Второе решение. Пусть c и d — кратные корни, a и b — старшие коэффициенты у P и Q соответственно. Тогда $P(x) + Q(x) = a(x - c)^2 + b(x - d)^2 = (a + b)x^2 - 2(ac + bd)x + ac^2 + bd^2$, и поскольку этот трёхчлен имеет кратный корень, его дискриминант равен нулю, то есть

$$0 = (ac + bd)^2 - (a + b)(ac^2 + bd^2) = 2abcd - abd^2 - bac^2 = ab(c - d)^2,$$

откуда, так как a и b ненулевые, имеем $c = d$, и потому все три трёхчлена имеют кратный корень c.

Третье решение. Трёхчлен, имеющий кратный корень, с точностью до знака является полным квадратом. Без ограничения общности $P(x) = R^2(x)$. Рассмотрим два случая.

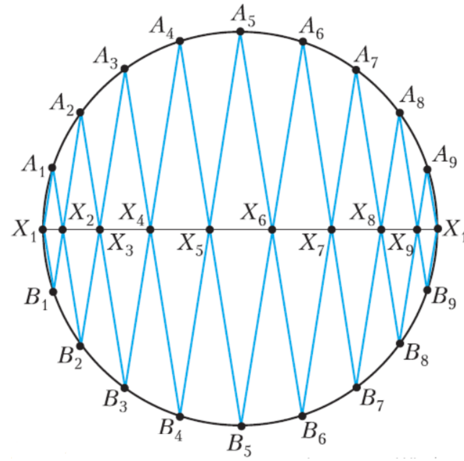
1) $Q(x) = S^2(x)$. Тогда $P(x) + Q(x) = R^2(x) + S^2(x)$ обращается в ноль только в точке, являющейся общий корнем $R(x)$ и $S(x)$, то есть общим корнем $P(x)$ и $Q(x)$.

2) $Q(x) = -S^2(x)$. Тогда трёхчлен $P(x) + Q(x) = (R(x) - S(x))(R(x) + S(x))$ имеет кратный корень, только когда корни линейных функций $R(x) - S(x)$ и $R(x) + S(x)$ совпадают. Но в такой точке $R(x) = S(x) = 0$.

2 [4]. *На прямой отметили точки $X_1, \ldots, X_{10}$ (именно в таком порядке) и построили на отрезках X_1X_2, X_2X_3, ..., X_9X_{10} как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10}. Найдите α.*

(Егор Бакаев)

Ответ: 18°. Пусть построены треугольники $X_1A_1X_2$, …, $X_9A_9X_{10}$, а точки B_1, …, B_9 симметричны точкам A_1, …, A_9 соответственно (относительно прямой X_1X_{10}). Очевидно, точка X_i лежит на хорде $B_{i-1}A_i$ и на хорде B_iA_{i-1} ($i = 2, \ldots, 9$), поскольку при отражении возникают вертикальные углы (угол при основании равнобедренного треугольника и такой же угол отражённого соседнего треугольника). Поэтому



$$\angle X_1B_1A_2 = \angle A_2B_3A_4 = \angle A_4B_5A_6 = \angle A_6B_7A_8 = \angle A_8B_9X_{10} = \alpha.$$

Следовательно, 5α равно половине дуги X_1X_{10}, то есть 90°.

3 [5]. *Натуральное число N кратно 2020. В его десятичной записи все цифры различны, причём если любые две из них поменять местами, получится число, не кратное 2020. При каком количестве цифр в десятичной записи числа N такое возможно?*

(Сергей Токарев)

Ответ: при 6 цифрах.

Если в числе седьмая цифра справа — это a, а третья справа — это b, то, меняя их местами, мы изменим число на $b \cdot 10^6 - a \cdot 10^6 + a \cdot 10^2 - b \cdot 10^2 = (b - a) \cdot (10^4 - 1) \cdot 100$. Значит, при такой замене делимость на $2020 = 20 \cdot 101$ не испортится, поскольку $10^4 - 1$ делится на 101, а 100 делится на 20. Поэтому больше 6 цифр в числе N быть не может

Шесть цифр может быть. Например, подходит число 351480 (0 должен оставаться в конце, обмен 3 и 8 испортит делимость на 4, а обмен соседних цифр или цифр, стоящих через одну или через две, испортит делимость на 101, поскольку числа $10 - 1$, $10^2 - 1$ и $10^3 - 1$ на 101 не делятся). Есть и другие примеры, скажем, 531260.

Пяти- или четырёхзначное число, кратное 2020, получается умножением 2020 на число $10a + b$, меньшее 50. У числа $2020b$ вторая и четвёртая цифры равны, а у числа $20200a$ они равны нулю, поэтому у суммы эти цифры равны, что нас не устраивает.

4 [5]. *Стороны треугольника разделены основаниями биссектрис на два отрезка каждая. Обязательно ли из шести образовавшихся отрезков можно составить два треугольника?*

(Лев Емельянов)

Ответ: обязательно.

Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — длины сторон треугольника. Тогда стороны разделятся на такие части:

$$a = \frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}, \quad b = \frac{ba}{a+c} + \frac{bc}{a+c}, \quad c = \frac{ca}{a+b} + \frac{cb}{a+b}.$$

Из отрезков, составляющих c, первый меньше a, а второй меньше b (так как $\frac{c}{a+b} < 1$).

Тогда возьмём в первую тройку отрезки $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$ составляющие a, и отрезок $\frac{ca}{a+b}$. Последний из них наибольший (его знаменатель не больше, а числитель не меньше, чем у других), но меньше a.

Во вторую тройку возьмём отрезки $\frac{ba}{a+c}$ и $\frac{bc}{a+c}$, составляющие b, и отрезок $\frac{cb}{a+b}$. Последний из них наибольший (аналогично), но меньше b.

Возможны и другие способы разбить отрезки на две тройки.

5. *По кругу лежит 101 монета, каждая весит 10 г или 11 г. Докажите, что найдётся монета, для которой суммарная масса k монет слева от неё равна суммарной массе k монет справа от неё, если*

а) [3] $k = 50$*;*

б) [3] $k = 49$.

(Александр Грибалко)

Решим сразу оба пункта. Пусть k — любое из чисел 49 или 50. Раскрасим монеты в чёрный и белый цвета (10 г — одним цветом, 11 г — другим). Монет какого-то цвета, скажем, белых, будет нечётное количество, пусть $2m+1$. Надо доказать, что среди k монет справа и k монет слева от какой-то монеты будет поровну белых.

Предположим противное. Тогда $m > 0$, иначе единственная белая монета — искомая. Назовём белую монету *правой*, если среди k монет справа от неё белых больше, чем среди k монет слева от неё, в противном случае — *левой* . Так как белых монет $2m+1$, правых и левых монет будет не поровну, пусть правых больше.

Пусть A — правая монета, а B — m-я справа от A белая монета (то есть на дуге, идущей вправо от A к B, белых монет между A и B ровно $m-1$).

Если бы среди k монет справа от A не было B, то среди них было бы не более $m-1$ белой монеты. Так как $k \geq 49$, то вместе среди k монет слева от A и k монет справа от A хотя бы $2m-2$ белые монеты, поэтому среди k монет слева от A было бы тогда не менее $m-1$ белой, то есть не меньше, чем справа, что противоречит тому что A — правая.

Значит среди k монет справа от A есть B, но тогда среди k монет слева от B встречаются все белые монеты, лежащие на дуге, идущей вправо от A к B, и сама монета A, то есть среди них встречается не менее m монет. Так как $k \leq 50$, то вместе среди k монет слева от B и k монет справа от B не более $2m$ белых, поэтому среди k монет справа от B не более m белых, то есть не больше, чем слева. Значит, монета B — левая.

Итак, для всякой правой монеты m-я справа от неё белая монета — левая. Значит, левых не меньше, чем правых, противоречие.

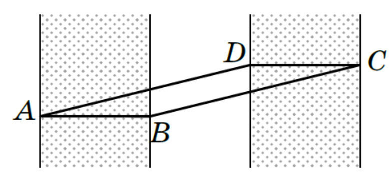
СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [4]. *Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?*

(Александр Перепечко)

Ответ: нет. Возьмём параллелограмм, как на рисунке. Если бы окружность пересекла его стороны AB и CD, то её центр лежал бы на каком-то перпендикуляре к отрезку AB и на каком-то перпендикуляре к отрезку CD. Но такие перпендикуляры не пересекаются (они лежат в непересекащихся полосах).



2 [7]. *Назовём пару различных натуральных чисел* удачной, *если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) — натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a,b) и (b,a) считаются одинаковыми.)*

(Борис Френкин)

Ответ: да, верно.

Пусть среднее арифметическое удачной пары равно натуральному числу m. Тогда числа из этой пары — одной чётности, и их можно представить в виде $m+n$ и $m-n$, где n тоже натуральное. Так как среднее геометрическое чисел пары — натуральное число, их произведение — полный квадрат: $m^2-n^2=k^2$, где k натуральное. Тогда $m^2-k^2=n^2$, откуда $m+k$ и $m-k$ — удачная пара с тем же средним арифметическим, причём $k \neq n$ (иначе $m^2=2n^2$, что невозможно в силу иррациональности $\sqrt{2}$).

Замечание. Если числа исходной пары — это a, b, то числа новой пары имеют вид $\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{ab}$.

3. *Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было*
а) [3] *хотя бы сто чисел 5;*
б) [4] *хотя бы сто чисел 10?*

(Андрей Аржанцев)

а) **Ответ:** не всегда.

Пусть Вася действует так: если Петя называл чётное число, Вася его и записывает, а если Петя назвал нечётное — записывает сумму его и всех чисел на доске. Тогда Вася может записать на доску нечётное число лишь один раз — когда Петя впервые назвал нечётное число. Значит, на доске будет написано не более одного нечётного числа, и тем самым не более одной пятёрки.

б) **Ответ:** всегда.

Как Пете добиться того, чтобы Вася написал на доске число 10:

(1) Если сумма чисел на доске равна 0, то Петя называет число 10, и Вася обязан написать 10.

(2) Если сумма чисел на доске равна -5, то Петя называет число 10, и Вася либо пишет число 10, либо пишет число 5 и попадает в ситуацию (1).

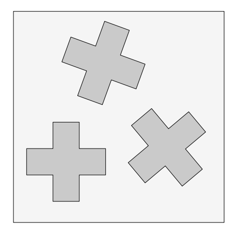
(3) Если сумма чисел на доске равна 5, то Петя называет число -10, и Вася либо пишет число -5 и попадает в ситуацию (1), либо пишет число -10 и попадает в ситуацию (2).

(4) Если сумма чисел на доске равна 10, то Петя называет число -15, и Вася либо пишет число -15 и попадает в ситуацию (2), либо пишет число -5 и попадает в ситуацию (3).

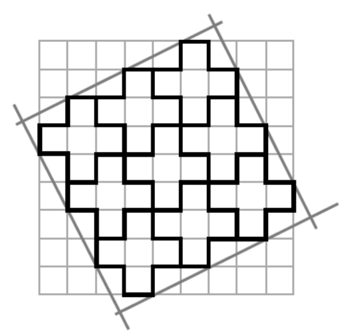
Заметим, что если на доске другая сумма чисел, скажем n, то Петя может назвать число $-n+10$, и Вася либо напишет число 10, либо попадёт в ситуацию (4). Таким образом, имея любой набор чисел на доске, мы можем в итоге заставить Васю написать 10. Значит, мы сможем сделать так, чтобы на доске было 100 десяток.

4. [7] *Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов?*

(Александр Грибалко)



Ответ: можно. Расположим 9 крестов, как на рисунке, и опишем вокруг них квадрат. Этот квадрат состоит из девяти крестов (их суммарная площадь равна 45), восьми половинок прямоугольников 1×2 (их суммарная площадь равна 8) и четырёх «уголков». Каждый уголок целиком лежит в фигуре, состоящей из половинки прямоугольника 1×2 и половинки клетки, то есть его площадь не больше 1,5, откуда все уголки суммарно имеют площадь не больше 6. Тогда площадь квадрата не больше $45 + 8 + 6 = 59$, что меньше 64. Значит, сторона квадрата меньше 8, и его можно уместить на шахматную доску — а с ним и 9 крестов.



Несложно найти и точную длину стороны нашего квадрата — это $\frac{17}{\sqrt{5}}$.

5. [8] *Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?*

(Михаил Евдокимов)

Ответ: существуют.

Первое решение. Заметим, что $3^3+4^3+5^3=6^3$ (проверьте!). Домножив это равенство на 2^3, получим: $6^3+8^3+10^3=12^3$. Заменяя 6^3 на сумму из предыдущего равенства, получаем пять кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3$. Домножив новое равенство на 2^3 и снова заменяя 6^3 на сумму трёх кубов, получаем 7 кубов, дающих в сумме куб:

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+20^3=24^3.$$

Действуя далее аналогично, мы сможем получить и 99 кубов, дающих в сумме куб, что и требуется в задаче.

Второе решение. Воспользуемся формулой $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Заметим, что

$$11^3+12^3+\ldots+109^3=(1^3+2^3+\ldots+109^3)-(1^3+2^3+\ldots+10^3)=\left(\frac{109\cdot 110}{2}\right)^2-\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{109^2\cdot 110^2-110^2}{4}=110^2\cdot\frac{109^2-1}{4}=110^2\cdot\frac{110\cdot 108}{4}=110^3\cdot 27=330^3.$$

6. [10] *За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?*

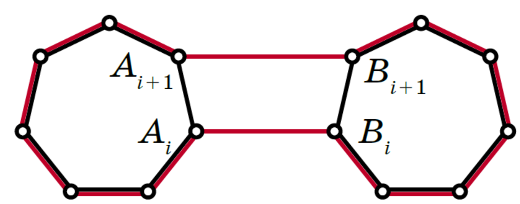
(Михаил Святловский)

Ответ: при всех нечётных $n>1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гномов, сидящих за первым столиком, а через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — гномов, сидящих за вторым столиком.

Случай нечётного n. Пусть $n=2k-1$. Стратегия доброго волшебника: подружить пары гномов (A_i, B_i) и (A_i, B_{i+1}) (здесь мы считаем, что $B_{2k}=B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать доброму.

Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину указанных пар, то либо среди пар (A_i, B_i) хотя бы k всё ещё дружат, либо среди пар (A_i, B_{i+1}) хотя бы k все еще дружат. Тогда в первом случае найдется i, для которого обе пары гномов (A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1}) дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол следующим образом: $A_i, B_i, B_{i-1}, \ldots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.



Случай чётного n. Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже как-то подружил $2n$ пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра — парам гномов, которые подружил добрый волшебник. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым — в красный и синий. Так как сумма степеней всех вершин равна $4n$, найдётся цвет, для которого сумма степеней вершин, покрашенных в этот цвет, не превосходит n. Не умаляя общности, это белый цвет, то есть гномы $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которые входят гномы белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома A_{2l+1} — его старые соседи A_{2l} и A_{2l+2}, и очевидно, что добрый волшебник не сможет рассадить всех гномов за один стол требуемым образом.

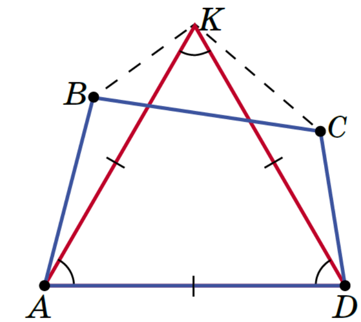
7. *Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что*

а) [6] *один из углов этого четырёхугольника не больше $60°$;*

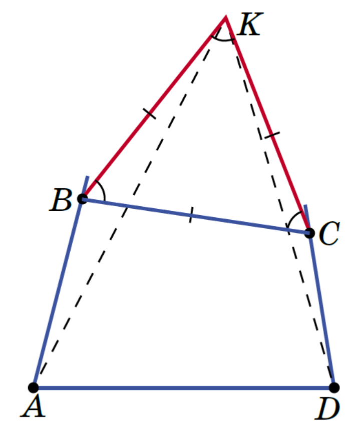
б) [6] *один из углов этого четырёхугольника не меньше $120°$.*

(Максим Дидин)

Первое решение. Пусть AD — наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$. По условию, сумма любых двух других сторон не больше AD.



а) Пусть углы A и D оба больше $60°$. Построим на стороне AD равносторонний треугольник AKD во внутреннюю сторону четырёхугольника. Его стороны AK и DK выходят из вершин A и D внутрь четырёхугольника. Точка K будет лежать вне четырёхугольника (иначе $AB + BC + CD > AK + KD = 2AD$, и тогда какие-то две стороны из AB, BC, CD в сумме больше AD, противоречие). Тогда $\angle BKC > 60°$, откуда в треугольнике BKC сторона BC не самая маленькая. Пусть она больше, например, BK. Тогда $AB + BC > AB + BK > AK = AD$ — противоречие.



б) Пусть каждый из углов B и C меньше $120°$. Продлим лучи AB и DC, дополнительные углы будут больше $60°$. Построим на стороне BC равносторонний треугольник BKC во внешнюю сторону четырёхугольника. Тогда угол AKD будет меньше $60°$ (стороны BK и CK «загибаются внутрь» от лучей), и значит, в треугольнике AKD сторона AD не самая большая. Пусть она меньше, например, чем AK. Тогда получаем: $AD < AK < AB + BK = AB + BC$ — противоречие.

Второе решение. Пусть AD — наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$ и $CD \leq AB$. Поскольку $AD \geq BC + CD > BD$, угол A острый. Аналогично угол D острый. Поэтому проекции P и Q точек B и C на прямую AD лежат на интервале AD.

а) Предположим, что оба угла A и D больше $60°$. Тогда $AD = AP + PQ + QD < \frac{1}{2}AB + BC + {}$ $+\frac{1}{2}CD \leqslant AB + BC$, то есть из сторон AD, AB и BC можно составить треугольник. Противоречие.

б) Заметим, что $PQ \leqslant BC$, $AB + BC \leqslant AD$, откуда $AB \leqslant AD - PQ = AP + QD$. Отметим такие точку X на луче BP и точку Y, что $BX = CQ$, $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{CD}$. Тогда треугольники BXY и CQD равны, $AY \geqslant AP + XY = AP + QD \geqslant AB \geqslant CD = BY$. Поэтому AY — наибольшая сторона треугольника ABY, а ABY — его наибольший угол, и тем самым $\angle ABY \geqslant 60°$. Тогда $\angle A + \angle D = \angle BAP + \angle BYX = \angle BAY + \angle BYA \leqslant 120°$ (использовано очевидное равенство $\angle AYX = \angle YAP$). Поскольку сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна $360°$, то $\angle B + \angle C \geqslant 240°$. Поэтому либо $\angle B \geqslant 120°$, либо $\angle C \geqslant 120°$.

А ещё мы заново решили пункт а): из неравенства $\angle A + \angle D \leqslant 120°$ следует, что хоть один из углов A, D не больше $60°$.

10 – 11 классы

1. [4] *Даны n натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на чёрную доску их среднее арифметическое, а на белую доску — их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые.*

(Борис Френкин)

Пусть на чёрной доске не все числа целые. Тогда среди исходных чисел есть чётные и нечётные. Пусть a — любое из чётных исходных чисел, b — любое из нечётных. По условию их среднее геометрическое — целое число, то есть их произведение — полный квадрат. Если взять любые два чётных исходных числа a_1 и a_2, то тогда a_1b и a_2b — полные квадраты, откуда $a_1a_2b^2$ — полный квадрат, а значит, и a_1a_2 — полный квадрат. Аналогично, произведение любых двух нечётных исходных чисел — полный квадрат. Но тогда на белой доске все числа целые.

2. [5] *Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?*

(Фёдор Ивлев)

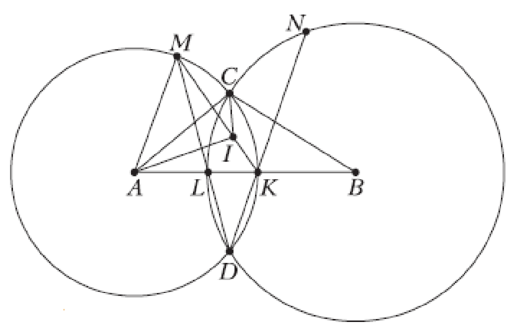
Ответ: не ошибается. Пусть корни многочлена из условия — числа $x_1, \ldots, x_n$. Выберем n различных направлений на плоскости и возьмём x_1 прямых первого направления, x_2 — второго, ..., x_n — n-го направления.

Тогда, по формулам Виета, число прямых $x_1 + \ldots + x_n$ будет равняться a, а число их точек пересечения между собой будет равняться b, если только никакие три прямые не пересекутся в одной точке. Этого можно добиться, проводя прямые последовательно: очередную прямую нужного направления выбираем так, чтобы она не задевала уже имеющиеся точки пересечения (их на каждом шаге конечное число).

3. [6] *Окружности α и β с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках C и D. Отрезок AB пересекает окружности α и β в точках K и L соответственно. Луч DK вторично пересекает окружность β в точке N, а луч DL вторично пересекает окружность α в точке M. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.*

(Константин Кноп)

Достаточно доказать, что прямая KM проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC (для прямой LN доказательство аналогично). Обозначим через I центр описанной окружности треугольника CKL. Пусть $\angle CML = \varphi$. Тогда $\angle CAK = \overset{\frown}{CK} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{CD} = \angle CMD = \varphi$ и $\angle CIL = 2\angle CKA = 180^\circ - \angle CAK = 180^\circ - \varphi$, откуда точки M, A, L, I, C лежат на одной окружности. Значит, I — середина дуги $\overset{\frown}{CL}$, откуда AI — биссектриса угла BAC. Аналогично BI — биссектриса угла ABC, следовательно, I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как I — середина дуги $\overset{\frown}{CL}$, а K — середина дуги $\overset{\frown}{CD}$, точки I и K лежат на биссектрисе угла CMD, что и требовалось.



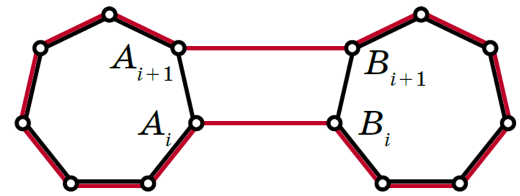
4. [7] *За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?*

(Михаил Святловский)

Ответ: при всех нечётных $n > 1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гномов, сидящих за первым столиком, а через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — гномов, сидящих за вторым столиком.

Случай нечётного n. Пусть $n = 2k-1$. Стратегия доброго волшебника: подружить пары гномов (A_i, B_i) и (A_i, B_{i+1}) (здесь мы считаем, что $B_{2k} = B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать доброму.



Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину указанных пар, то либо среди пар (A_i, B_i) хотя бы k всё ещё дружат, либо среди пар (A_i, B_{i+1}) хотя бы k все еще дружат. Тогда в первом случае найдется i, для которого обе пары гномов (A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1}) дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол следующим образом: $A_i, B_i, B_{i-1}, \ldots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.

Случай чётного n. Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже как-то подружил $2n$ пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра — парам гномов, которые подружил добрый волшебник. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым — в красный и синий. Так как сумма степеней всех вершин равна $4n$, найдётся цвет, для которого сумма степеней вершин, покрашенных в этот цвет, не превосходит n. Не умаляя общности, это белый цвет, то есть гномы $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которые входят гномы белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома A_{2l+1} — его старые соседи A_{2l} и A_{2l+2}, и очевидно, что добрый волшебник не сможет рассадить всех гномов за один стол требуемым образом.

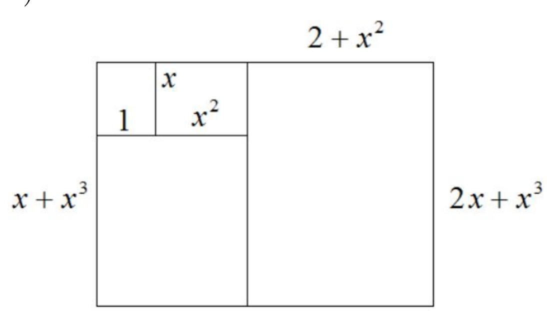
5. [7] *Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых?*

(Михаил Мурашкин)

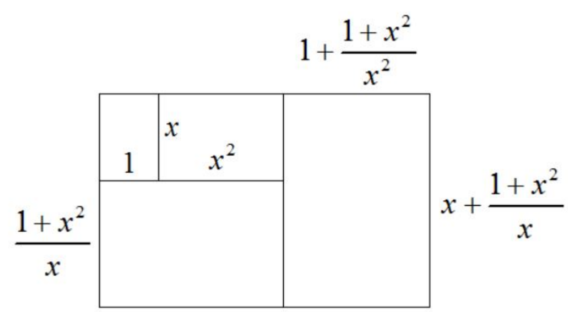
Ответ: да, существует.

Для начала покажем, что существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 подобных ему прямоугольника разного размера. На приведенных ниже рисунках показано, что для произвольного x существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 прямоугольника с отношением сторон, равным x (два способа):

1)



2)



В первом случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1+x^2+2+x^2 = x(2x+x^3)$, откуда $x = \sqrt[4]{3}$. При этом, как несложно проверить, они имеют разный размер. Во втором случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1 + x^2 + 1 + \frac{1+x^2}{x^2} = x(x + \frac{1+x^2}{x})$, откуда $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. При этом они, опять же, имеют разный размер.

Теперь перейдём к доказательству основного факта. Возьмём, для определённости, прямоугольник с отношением сторон $\sqrt[4]{3}$ и разобьём его на 4 прямоугольника указанным способом. Выберем меньший из них и разобьём таким же способом, и т.д. После каждого разбиения все прямоугольники имеют разный размер, так как мы разбиваем наименьший. После 33 разбиений мы получим 100 прямоугольников, что и требовалось.

Замечание. Как известно, существует разрезание квадрата как на 25, так и на 26 различных квадратов (см. ru.wikipedia.org/wiki/Квадрирование квадрата). Проведём разрезание на 25 квадратов, потом разрежем меньший из них на 26 квадратов. Получится разрезание на 50 квадратов. Повторив такую операцию еще дважды, получим разрезание квадрата на 100 различных квадратов.

6. [10] *Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?*

(Андрей Аржанцев)

Ответ: сможет.

Лемма. Любое число a можно представить в виде суммы k дробей вида $\frac{1}{n}$ конечным числом способов (если вообще можно представить).

Доказательство леммы. Будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $k = l - 1$. Докажем для $k = l$. Посмотрим на наибольшую дробь в разложении, она не может быть меньше, чем $\frac{a}{k}$, иначе сумма всех дробей точно меньше a. Значит, знаменатель этой дроби точно не больше, чем $\frac{k}{a}$, то есть у нас существует конечное количество значений наибольшей дроби. Далее для каждого отдельного значения этой наибольшей дроби мы получаем, что сумма оставшихся $l - 1$ дробей должна быть каким-то фиксированным числом. По предположению индукции мы знаем, что таких $l - 1$ дробей для каждого отдельного значения наибольшей дроби конечно, а, значит, и всего представлений a в виде суммы k дробей конечно.

Теперь покажем, как Петя может ходить так, чтобы Вася после своего хода никогда не сделал сумму целой. Пусть перед ходом Пети сумма чисел на доске равна S, а Вася после его хода будет выписывать k дробей. Заметим, что после хода Васи сумма чисел точно не станет больше чем $S + k + 1$, то есть он точно не получит натуральное число, большее $S + k + 1$. Для каждой из оставшихся потенциальных натуральных сумм (а их осталось конечное количество) посчитаем, на сколько надо увеличить текущую сумму, чтобы она стала такой. Из леммы следует, что для каждого такого числа существует лишь конечное количество представлений его в виде суммы $k+1$ дроби вида $\frac{1}{n}$. Значит, всего во всех представлениях задействовано конечное число дробей вида $\frac{1}{n}$.

Пусть Петя тогда запишет на доску ту дробь, которая не задействована ни в одном из представлений. Тогда Вася точно не сможет написать k дробей так, чтобы сумма стала натуральной.

7. [12] *Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где n — нечётное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два чёрных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от n.*

(Николай Белухов)

Сориентируем доску так, чтобы у неё было 1000 столбцов и n строк, а жук сидел в нижнем левом углу. Покрасим клетки в шахматном порядке, причём клетку жука сделаем белой. Занумеруем столбцы числами от 1 до 1000 слева направо, а строки числами от 1 до n снизу вверх.

Рассмотрим некоторый путь жука из клетки $(1, 1)$ в клетку $(1000, n)$. Из каждой клетки пути нарисуем стрелку в следующую клетку. Тогда из каждой белой клетки пути стрелка ведёт в чёрную.

Пусть i — чётное число, причём $1000 \leq i \leq n - 1003$. Между строками i и $i + 1$ проведём горизонтальную прямую ℓ.

Ниже прямой ℓ количество белых клеток в пути превосходит количество чёрных не меньше чем на 1000, так как 1000 чёрных клеток в нижних строках находятся под боем слона. Поэтому не меньше 1000 стрелок идут из белых клеток ниже ℓ в чёрные клетки выше ℓ. Но так может проходить лишь стрелка из клетки в строке $i-1$ или i. А поскольку там всего 1000 белых клеток, в каждой из них начинается стрелка, идущая в чёрную клетку строки $i+1$ или $i+2$.

Стрелка из клетки $(1, i-1)$ может идти только в $(2, i+1)$. Тогда стрелка из $(3, i-1)$ может идти только в $(4, i+1)$. Последовательно рассматривая клетки $(5, i-1)$, $(7, i-1)$, $\ldots$, $(999, i-1)$, $(1000, i)$, $(998, i)$, $\ldots$, $(2, i)$, видим, что все 1000 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 1).

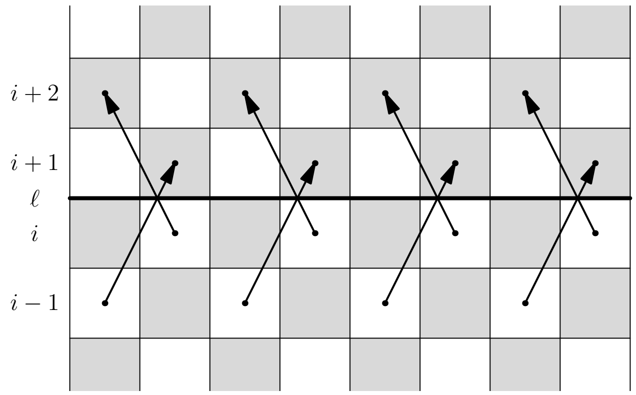


Рис. 1.

Аналогичное верно для $i+2$ и, значит, для белых клеток в строках $i+1$ и $i+2$. Поэтому если жук пришёл в белую клетку выше ℓ, то он уже никогда не вернётся в клетку ниже ℓ. Действительно, пусть жук впервые пересекает ℓ сверху вниз после того, как он побывал в белой клетке выше ℓ. Перед пересечением этой прямой жук находился в строке $i+1$ или $i+2$. Если жук был в белой клетке, то он пошёл бы вверх. А если жук был в чёрной клетке, то он пришёл в неё из клетки ниже ℓ — значит, он уже спускался ниже ℓ, побывав в белой клетке выше ℓ. Получили противоречие.

Среди стрелок из белых клеток строк $i-1$ и i рассмотрим пройденную последней. Так как до этого жук не побывал в белой клетке выше ℓ, то из концов остальных таких стрелок он спускался ниже ℓ. Таким образом, лишь из одной чёрной клетки в строках $i+1$ и $i+2$ стрелка ведёт в белую клетку выше ℓ.

Поскольку стрелка из $(1, i+2)$ не может вести в белую клетку ниже ℓ, стрелки из всех остальных чёрных клеток в строках $i+1$ и $i+2$ должны вести в белые клетки ниже ℓ. Последовательно рассматривая клетки $(3, i+2)$, $(5, i+2)$, $\ldots$, $(999, i+2)$, $(1000, i+1)$, $(998, i+1)$, $\ldots$, $(2, i+1)$, видим, что все 999 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 2).

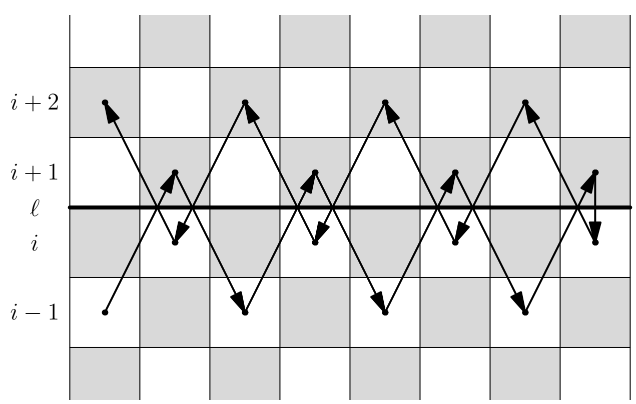


Рис. 2.

Аналогичное рассуждение для всех чётных значений i между 1000 и $n-1003$ показывает, что средняя часть пути жука определена однозначно и при росте n продолжается в виде пружины (рис. 3).

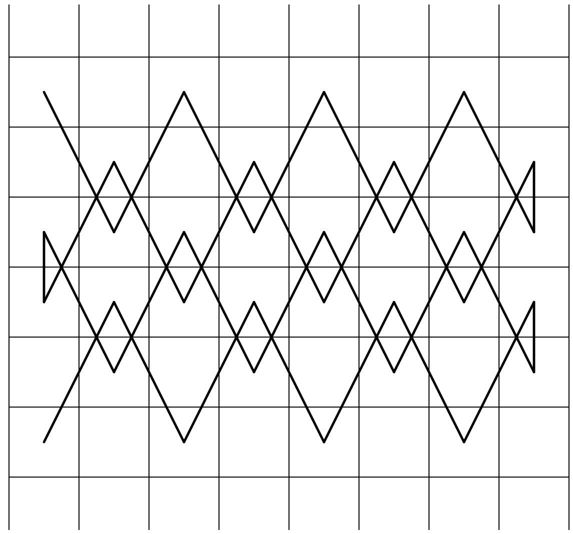


Рис. 3.

Следовательно, количество возможных путей не зависит от n.

Замечание. Конструкция на рисунке 4 показывает, что рассматриваемые пути действительно существуют.

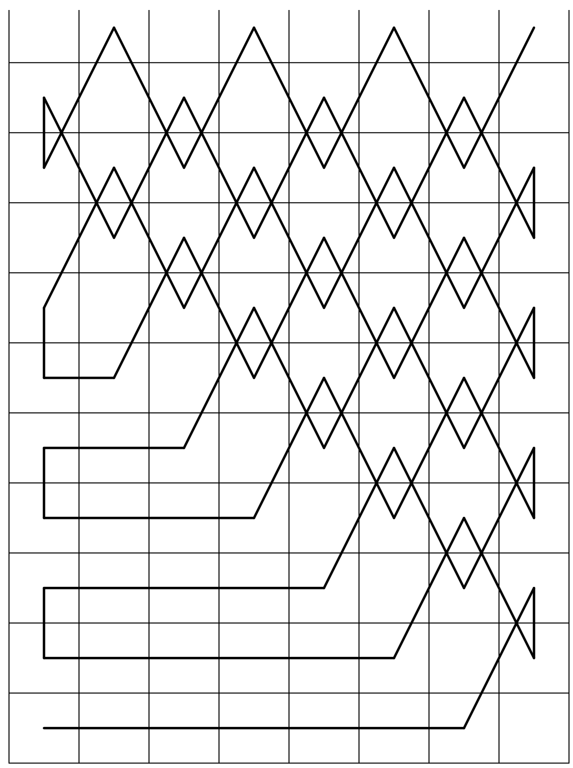


Рис. 4.

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,
8 – 9 классы, базовый вариант, 14 марта 2021 г.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

4 2. В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, а также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Жюри

4 3. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

Жюри

4.

3 а) Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

3 б) А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

Владимир Расторгуев

5. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры

2 а) 100×101 клеток;

4 б) 100×100 клеток?

Николай Чернятьев

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 14 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
	1.
2	а) Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой?
2	б) Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.
	Александр Грибалко
	2.
2	а) У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)
2	б) Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.
	Алексей Толпыго
5	3. При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел?
	Борис Френкин
5	4. Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2]+px+q=0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней? ($[x^2]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2.)
	Алексей Толпыго
6	5. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка M — середина стороны AC. Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой BM.
	Михаил Евдокимов

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 28 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Число $2021 = 43 \cdot 47$ составное. Докажите, что если вписать в числе 2021 сколько угодно восьмёрок между 20 и 21, тоже получится составное число.

Михаил Евдокимов

5 2. В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

6 3. Треугольник ABC равносторонний. На сторонах AB и AC выбрали точки E и F, а на продолжении стороны AB — точку K так, что $AE = CF = BK$. Точка P — середина EF. Докажите, что угол KPC прямой.

Владимир Расторгуев

7 4. Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой — уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?

Александр Грибалко

5. В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника M расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если

4 а) M — квадрат 21×21;

4 б) M — прямоугольник 20×21?

Александр Шаповалов

10 6. В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, …, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

12 7. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся ровно на d.

Николай Белухов

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 28 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди. *Максим Дидин*
5	2.	Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам $x = a_1 + \ldots + a_n$ и $y = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}$? *Артемий Соколов*
5	3.	Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω. *Алексей Доледенок*
8	4.	В ряд лежат $100N$ бутербродов с колбасой. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина? *Иван Митрофанов*
8	5.	В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, $\ldots$, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга. *Фёдор Ивлев*
10	6.	Найдите хоть одно вещественное число A со свойством: для любого натурального n расстояние от верхней целой части числа A^n до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа x — наименьшее целое число, не меньшее x.) *Дмитрий Креков*
	7.	Дано целое $n > 2$. На сфере радиуса 1 требуется расположить n попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины α. Докажите, что
6	а)	при любом $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ это возможно;
7	б)	при любом $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ это невозможно. *Илья Богданов*

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

РЕШЕНИЯ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [4]. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: может.

Решение. Например, $(8!-4)+(8!-3)+\ldots+8!+\ldots+(8!+4)=9\cdot 8!=9!$.

Замечание. См. также задачу 3 базового варианта старших классов.

2 [4]. В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, а также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Жюри

Ответ: не обязательно.

Решение. Например, нетрудно проверить, что в треугольнике с углами $\angle A=40^\circ$, $\angle B=80^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 10°, а в треугольнике с углами $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 15°.

Замечание. Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3 [4]. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

Жюри

Ответ: может.

Решение 1. Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который ещё не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар 1001, 1005 и 1002, 1004. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «лёгкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжёлой» паре — так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвёртым взвешиванием.

Решение 2. Сначала положим на чаши по две гири.

1) Одна из чаш перевесила. Тогда гири разбиваются на две пары: лёгкую и тяжёлую. Есть два варианта: лёгкая пара — гири 1001, 1002, тяжелая — 1004, 1005 или лёгкая пара — 1001, 1004, тяжёлая — 1002, 1005. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более тяжелую гирю лёгкой пары с более лёгкой гирей тяжёлой пары, узнаем, какой из вариантов имеет место.

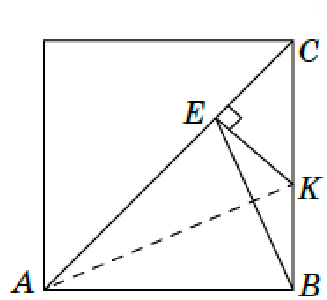
2) Весы в равновесии. Тогда гири разбиваются на две пары равного веса: 1001, 1005 и 1002, 1004. Вторым и третьим взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более лёгкие гири пар, узнаём, какая пара какая.

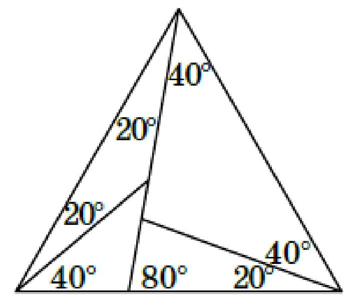
4. а) [3] Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных? **б)** [3] А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

Владимир Расторгуев

Ответы: можно в обоих пунктах.

Решение. См. рисунки. На левом рисунке сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.



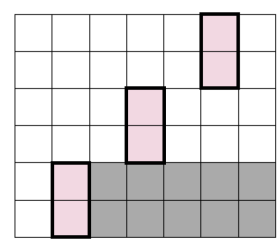


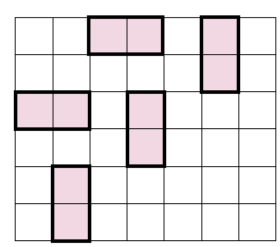
5. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры

а) [2] 100×101 клеток;

б) [4] 100×100 клеток?

Николай Чернятьев





а) Ответ: не всегда.

Решение. На рисунке справа вверху показано расположение доминошек на доске 6×7, которое не позволяет пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю. Действительно, попасть в (серую) область правее самой нижней доминошки нельзя, поскольку сначала мы должны подняться выше первой доминошки, и тогда мы уже выше серой полосы (а вниз ходить нельзя). Далее, нельзя попасть в аналогичную серую область правее следующей доминошки и т.д. Эта конструкция обобщается на любую доску размера $2n \times (2n+1)$.

Замечание. Для упрощения доказательства можно было бы добавить ещё горизонтальные доминошки над вертикальными, чтобы оставался единственный путь по доске, упирающийся в итоге в последнюю вертикальную доминошку (рисунок справа внизу).

б) Ответ: всегда.

Решение. Начальная и конечная клетки лежат на главной диагонали доски и имеют «координаты» $(1,1)$ и $(100,100)$. Докажем, что в любую свободную клетку этой диагонали можно попасть.

Действительно, пусть мы дошли до клетки (n,n). Если клетка $(n+1,n+1)$ свободна, то хоть одна из клеток $(n,n+1)$ и $(n+1,n)$ не занята и через неё можно пройти на клетку $(n+1,n+1)$.

Если же клетка $(n+1,n+1)$ занята, то из её соседей занята ровно одна клетка, причём по стороне, поэтому один из двух путей из (n,n) в $(n+2,n+2)$ не закрыт.

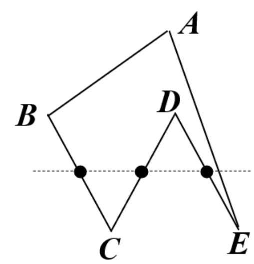
10 – 11 классы

1. а) [2] Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой?
б) [2] Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.

Александр Грибалко

Ответы: а) не могут; **б)** могут.

Решение. Ясно, что проведено ровно две диагонали, причём они выходят из одной вершины (пусть из A). Тогда указанные точки пересечения медиан получаются гомотетией с центром A и коэффициентом $2/3$ из середин сторон BC, CD и DE.



а) Эти середины сторон не могут лежать на одной прямой, так как прямая, не содержащая сторону выпуклого многоугольника, может пересечь его границу не более чем в двух точках.

б) Эти середины сторон могут лежать на одной прямой, как показано на рисунке справа.

2. а) [2] У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)
б) [2] Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Алексей Толпыго

а) Ответ: не может.

Решение. Как бы Таня ни помещала гири на весы, равновесия они никогда не покажут. Поэтому каждое взвешивание делит множество подозрительных перестановок не более чем на две части. Вначале было 24 подозрительных перестановки, после первого взвешивания при «неудачном» исходе их останется не меньше 12, после второго — не меньше 6, ..., после четвёртого — не меньше 2.

б) Ответ: может.

Решение 1. Сначала положим на чаши по две гири. В результате гири разбиваются на две пары: лёгкую и тяжёлую (если весы показали равновесие, то, как мы знаем, более тяжёлая группа — на левой чаше). Есть три варианта: лёгкая пара — гири 1000, 1002, тяжёлая — 1004, 1005; лёгкая пара — 1000, 1004, тяжёлая — 1002, 1005; лёгкая пара — 1000, 1005, тяжёлая — 1002, 1004. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием сравним более тяжёлые гири обеих пар, положив на левую чашу гирю из тяжёлой пары. В первом варианте перевесит левая чаша, в третьем — правая, а во втором весы покажут равновесие (на левой чаша 1005, на правой — 1004).

Решение 2. Положим гирю A на левую чашу, а гирю B — на правую. Если равновесия нет, более тяжёлую гирю кладём на левую чашу и вторым взвешиванием сравниваем с C. Если снова нет равновесия, опять более тяжёлую гирю кладём на левую чашу и третьим взвешиванием сравниваем с D. У нас в запасе осталось одно взвешивание.

Если равновесие хоть раз было, более тяжёлая гиря в этом взвешивании весит 1005 г, другая — 1004 г, а две оставшиеся гири определяются ещё одним взвешиванием.

Если равновесия ни разу не было, мы заведомо нашли самую тяжёлую гирю (1005 г). Разберём случаи, какая это гиря, и покажем, что в каждом из них мы уже знаем также гирю 1004 г (тогда оставшиеся две гири мы различим четвёртым взвешиванием).

1) Это A. Она все три взвешивания была на левой чаше, значит, один раз весы показали бы «равновесие», а этот случай разобран.

2) Это B. Она дважды была на левой чаше, поэтому 1004 г может весить только A.

3) Это C. Тогда 1004 г весит гиря, «проигравшая» C при втором взвешивании (так как она более тяжёлая из A и B, а D не может весить 1004 г).

4) Это D. Тогда 1004 г весит самая тяжёлая гиря из трёх оставшихся (она определилась при втором взвешивании).

3. [5] При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: при нечётных n.

Решение. Произведение n последовательных целых чисел делится на n, значит, и равная ей сумма целых чисел делится на n. Поэтому среднее арифметическое этих чисел — целое число. Значит, n нечётно. Вот пример для $n = 2m+1$: $((2m)! - m) + ((2m)! - m + 1) + \ldots + ((2m)! + m) = (2m+1) \cdot (2m)! = n!$.

4. [5] Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней? ($[x^2]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2.)

Алексей Толпыго

Ответ: может.

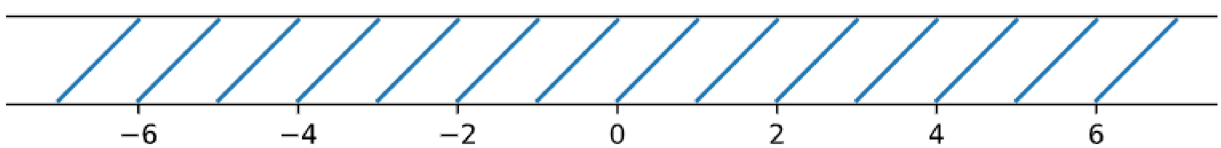
Решение. Рассмотрим, например, уравнение $[x^2] - 100x + 2500 = 0$. Оно имеет 199 корней вида $50 + \frac{k}{100}$ (где $k = -99, -98, \ldots, 99$). Действительно,

$$\left[\left(50 + \frac{k}{100}\right)^2\right] = \left[2500 + k + \left(\frac{k}{100}\right)^2\right] = 2500 + k = 100 \cdot \left(50 + \frac{k}{100}\right) - 2500.$$

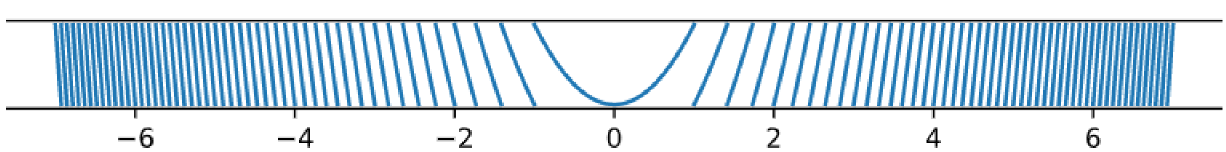
Идеология. Прямая $y = 100x - 2500$ касается параболы $y = x^2$ в точке $(50, 2500)$.

Замечание. Поясним неформально, как можно было придумать решение задачи.

Поскольку $[x^2] = x^2 - \{x^2\}$, исходное уравнение можно переписать в виде $x^2 + px + q = \{x^2\}$. Будем решать его графически: искать пересечения графиков параболы и дробной части квадрата. График дробной части $y = \{x\}$ представляет собой ряд равномерно идущих наклонных полуинтервалов:



Аналогично, график $y = \{x^2\}$ состоит из кусочков параболы: мы разрезаем параболу $y = x^2$ горизонтальными прямыми вида $y = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, на кусочки и каждый кусочек параллельно сдвигаем вниз к оси абсцисс. Но эти кусочки идут уже не равномерно, а «чем дальше от нуля, тем всё чаще» (ведь при стремлении x к бесконечности ордината возрастает на 1 при увеличении x на всё меньшее (стремящееся к 0) число:

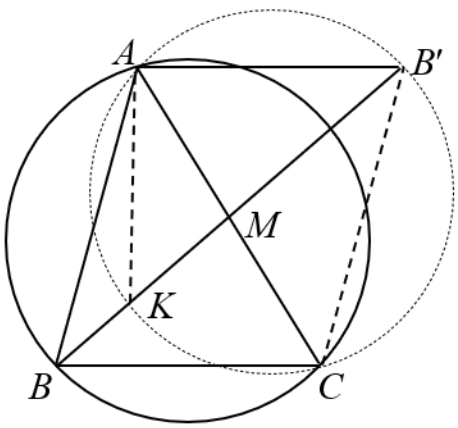


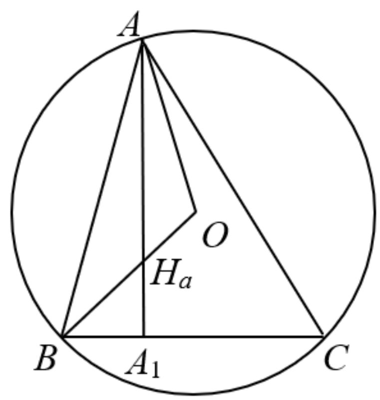
Но тогда любое уравнение вида $(x - a)^2 = \{x^2\}$ с достаточно большим а годится: в окрестности своей вершины парабола $y = (x - a)^2$ пересечёт много кусочков графика $y = \{x^2\}$.

5. [6] Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка M — середина стороны AC. Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой BM.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно точки M, а описанная окружность треугольника ACB' пересекает медиану BM в точке K. Тогда внешний угол AKB' треугольника AKB равен $\angle ACB' = \angle A$ (см. далее рисунок слева). Но и внешний угол BH_aA_1 треугольника AH_aB равен $\angle BAA_1 + \angle ABO = 90^\circ - \angle B + 90^\circ - \angle C = \angle A$ (см. далее рисунок справа). Поэтому $\angle AKB = \angle AH_aB$, то есть точка K лежит на описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BH_cC.

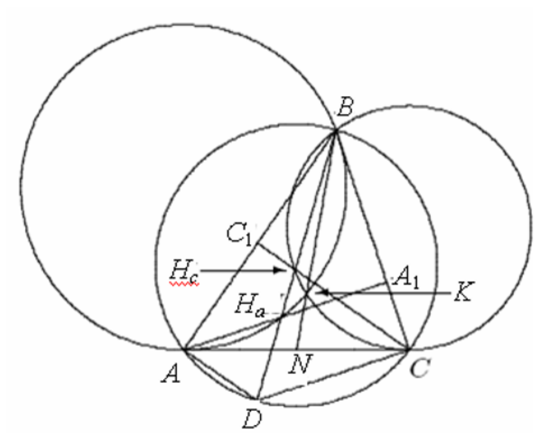




Решение 2. Пусть BD — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle ADB = \angle C$, имеем:

$$\angle CAH_a = \angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle ADB = \angle ABH_a.$$

Следовательно, сторона AC касается описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она касается описанной окружности треугольника BH_cC. Как известно, радикальная ось BK этих двух окружностей проходит через середину M отрезка AC их общей касательной.



СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] Число $2021 = 43{\cdot}47$ составное. Докажите, что если вписать в числе 2021 сколько угодно восьмёрок между 20 и 21, тоже получится составное число.

Михаил Евдокимов

Решение. Разность двух таких чисел, в которых число восьмёрок различается на 1, имеет вид $1880\ldots0$. Но $188 = 47{\cdot}4$, то есть делится на 47, как и 2021. Поэтому, добавляя восьмёрки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 47.

2. [5] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

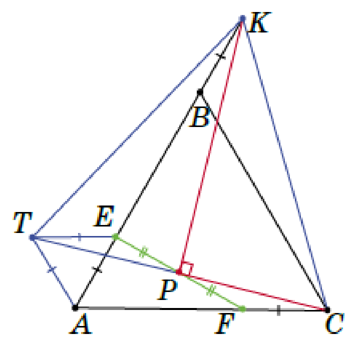
Решение. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на k кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

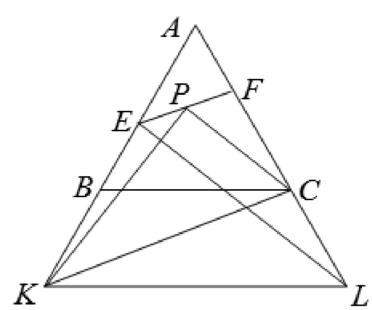
Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

3. [6] Треугольник ABC равносторонний. На сторонах AB и AC выбрали точки E и F, а на продолжении стороны AB — точку K так, что $AE = CF = BK$. Точка P — середина EF. Докажите, что угол KPC прямой.

Владимир Расторгуев



Решение 1. На продолжении отрезка CP за точку P отметим такую точку T, что $CP = PT$. Тогда $FCET$ — параллелограмм, откуда TE равно и параллельно FC. Но тогда треугольники TEK и KBC равны по первому признаку: тупые углы у них равны $120°$ и соответствующие стороны при этих углах равны. Следовательно, треугольник TKC равнобедренный и его медиана KP является высотой.



Решение 2. Построим равносторонний треугольник AKL. Ясно, что PC — средняя линия треугольника EFL. Треугольники EKL и CAK равны ($KL = AK$, $EK = AC$, $\angle EKL = \angle CAK$). Значит, $CK = EL = 2PC$. Треугольники EAL и CLK также равны, поэтому $\angle ELA = \angle CKL$. Следовательно, $KCP = 60° - \angle PCA + \angle BCK = 60° - \angle ELA + \angle CKL = 60°$ (мы использовали, что $PC \parallel EL$ и $BC \parallel KL$). Но тогда KPC — половина равностороннего треугольника, откуда угол KPC прямой.

4. [7] Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой — уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?

Александр Грибалко

Ответ: всегда.

Решение 1. Выберем любого аборигена — будем называть его Петей, — и покажем, как найти его возраст. Мысленно наденем на каждого второго аборигена шапку, начиная с Пети. Занумеруем аборигенов без шапок, идущих за Петей по часовой стрелке: 1, 2, ..., 24, 25.

Заметим, что каждый абориген верно сообщает сумму возрастов своих соседей (если сложить названные аборигеном числа). Сложим числа, названные 1-м, 3-м, ..., 25-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *плюс* возраст Пети. Сложим числа, названные 2-м, 4-м, ..., 24-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *минус* возраст Пети. Вычтя из первой суммы вторую и поделив на 2, получим возраст Пети.

Зная возраст любого аборигена, легко узнать, кто его соседи, по их ответам.

Решение 2. Для удобства будем считать, что в круге стоят через одного 25 мужчин и 25 женщин. Покажем, как различить мужчин (женщины определяются аналогично). Заметим, что два высказывания о возрасте одной женщины отличаются на 1 тогда и только тогда, когда ее соседи – рыцарь и лжец. Поэтому достаточно опознать одного мужчину: далее по кругу определяются все остальные.

Разберём два случая.

1) Для одной из женщин высказывания об её возрасте различаются на 2. Тогда оба её соседа – лжецы, и, как сказано выше, все мужчины определяются.

2) Таких женщин нет. Все мужчины разбиваются на группы: внутри такой группы оба соседа каждой женщины говорят об её возрасте одно и то же. Но пока не известно, какие группы состоят из лжецов, а какие – из рыцарей.

Сложив все числа, названные мужчинами, получим удвоенную сумму возрастов женщин. Теперь сложим первые числа, названные мужчинами. Если полученная сумма имеет ту же чётность, что сумма возрастов женщин, то среди мужчин чётное число лжецов, а если не совпадает – нечётное. Поскольку из двух возможных вариантов количество лжецов чётно только в одном, путешественник определит, какой из вариантов правильный.

5. В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника M расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если

а) [4] M — квадрат 21×21;

б) [4] M — прямоугольник 20×21?

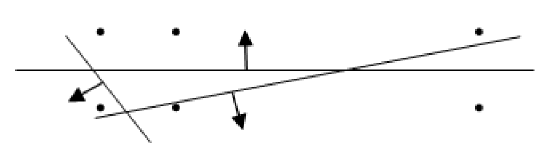
Александр Шаповалов

Ответы: а) 3 хода; **б)** 4 хода.

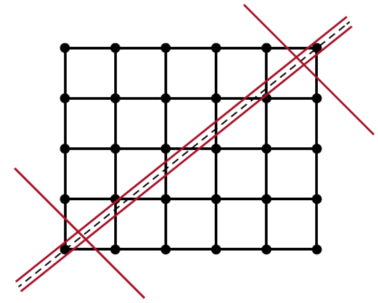
Решение. Вместо исходного прямоугольника M будем рассматривать прямоугольник N с вершинами в угловых лампочках.

Оценки. Заметим, что каждым ходом зажигается хотя бы одна из четырёх угловых лампочек. Следовательно, ходов не больше 4. В п. а) заметим ещё, что мы должны на каком-то ходу зажечь центральную лампочку. Вместе с ней по одну сторону от проведённой прямой окажется хотя бы две угловых лампочки (поскольку прямая, параллельная проведённой и проходящая через центр, делит квадрат N на две симметричные относительно центра части).

Примеры. **а)** Сначала зажигаем всё, кроме нижнего ряда лампочек, затем зажигаем все из оставшихся лампочек, кроме угловой, и наконец зажигаем угловую лампочку. (На рисунке изображены два нижних слоя лампочек, стрелки указывают по какую сторону от прямой зажигаются лампочки.)



б) Прямоугольник N имеет размеры 19×20. На его диагонали нет других лампочек, поскольку 19 и 20 взаимно просты. Проведём первую прямую параллельно диагонали, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжём все лампочки ниже этой прямой. Аналогично проведём вторую прямую параллельно диагонали, но чуть выше, и зажжём все лампочки выше этой прямой, как на рисунке. (Для примера мы взяли N размером 4×5 — поменьше, но тоже с взаимно простыми сторонами.) Оставшиеся две угловые лампочки можно зажечь за два хода, отсекая прямой от остальных.



6. [10] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, ..., n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

Ответ: $n = 100(m+1)$ при $k = 2m$ и $n = 100(m+1)+1$ при $k = 2m+1$.

Решение. Пусть $k = 2m$ или $k = 2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i = 100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из $k+1$ различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

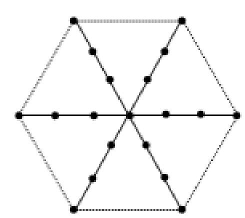
Рассмотрим для каждого туриста первые $m+1$ номеров из его списка. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m+m=2m$, все на ремонте). Следовательно, $n \geqslant 100(m+1)$.

При чётном k этой оценки достаточно. В случае нечётного k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров будут на ремонте, а у Васи — все номера до совпадающего с Петиным (их не более m) будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n \geqslant 100(m+1)+1$.

Замечание. Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном k мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери $k+2$ номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более k ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном k представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по $k+2$ номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и $k=5$). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил $\frac{k+1}{2}$ ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



7. [12] Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p+q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся ровно на d.

Николай Белухов

Решение 1. Случай $p = q = 1$ очевиден. Иначе p и q различны, пусть $p < q$. Всего лягушка пропрыгала путь, длина которого делится на p и на q, а значит, и на pq, так как p и q взаимно просты. Тогда длина пути равна kpq для некоторого натурального k, и лягушка сделала kq «коротких» прыжков вправо и kp «длинных» прыжков влево.

Известно, что при взаимно простых p и q можно представить d в виде $d = ap - bq$ с целыми a и b. Это равенство, очевидно, сохранится, если одновременно увеличить (или уменьшить) a на q и b на p. Поэтому можно выбрать a натуральным и не превосходящим q. При этом b будет неотрицательным (иначе $d \geqslant p+q$), и так как $a \leqslant q$, то $b < p$ (ведь $d > 0$). Поэтому $a + b < p + q \leqslant k(p + q)$.

Назовём каждую серию из $a + b$ последовательных прыжков лягушки *окном*. Условно считаем, что за последним прыжком лягушки идёт её первый прыжок (как при движении по кругу), поэтому окно может состоять и из нескольких последних и первых прыжков. Тогда всего окон ровно $k(p + q)$ штук.

Надо найти окно, где лягушка сделала ровно a коротких прыжков (и b длинных) — тогда она сдвинется на d за эти $a+b$ прыжков. Такое окно найдётся, если есть окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a: можно сдвигать первое окно по кругу, пока не дойдём до второго, число коротких прыжков в окне каждый раз меняется максимум на 1, поэтому будет момент, когда оно равно a.

Сложим число коротких прыжков во всех окнах — получим $kq(a+b)$, ведь каждый прыжок учли $a+b$ раз. Окон $k(p + q)$, и в среднем на окно придётся $\frac{kq(a+b)}{k(p+q)}$ коротких прыжков. Это число равно

$$\frac{kq(a+b)}{k(p+q)} = \frac{qa+qb}{p+q} = \frac{pa+qa-d}{p+q} = a - \frac{d}{p+q},$$

что больше $a - 1$ и меньше a. Значит, найдётся окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a.

Решение 2. Лягушку из условия назовём *старой*. Будем считать, что она пропрыгивает свою последовательность ходов бесконечное число раз по циклу. Посадим на прямую *новую* лягушку в точку d и заставим её прыгать ту же последовательность прыжков, что прыгает старая (тоже в бесконечном цикле).

Множество чисел, посещённых новой лягушкой, получается из множества чисел, посещённых старой, сдвигом на d. Если хотя бы одно число из нового множества совпадет с числом из старого, то обратный сдвиг даст нам искомую пару чисел. Предположим, что этого не произойдёт.

Как и в предыдущем решении, представим число d в виде $ap - bq$ для некоторых неотрицательных a и b. Заставим старую лягушку пропрыгать $a + b$ ходов по её циклу; она окажется в точке $e = xp - yq$, где $x + y = a + b$. Так как $a - x = y - b$, разность координат новой и старой лягушек кратна $p + q$: $d - e = (a - x)p - (b - y)q = (a - x)(p + q)$.

Далее пустим лягушек прыгать одновременно: старую по продолжению исходной траектории, а новую — по сдвинутой. На каждом шаге разность их координат будет либо не меняться (если они прыгают в одну сторону), либо меняться на $p + q$ (если одна прыгает на $+p$, а другая на $-q$). Таким образом, разность всегда будет оставаться кратной $p + q$; при этом она, по предположению, не может становиться нулевой, поэтому она всегда будет сохранять знак.

Пусть лягушки пропрыгали полный цикл и вернулись (новая в d, а старая в e). Количество ходов в цикле обозначим через T. Сумму всех чисел, посещённых новой лягушкой (без учёта начальной позиции), обозначим через S_1, а сумму чисел, посещённых старой, — через S. С одной стороны, числа на соответствующих ходах отличались не менее чем на $p+q$, причём разность всегда имела один и тот же знак, поэтому $|S_1 - S| \geq T(p + q)$. С другой стороны, набор чисел, посещённых новой лягушкой за цикл, отличается от аналогичного набора старой лягушки сдвигом на d, поэтому $|S_1 - S| = Td$ (отметим, что эти наборы могут содержать некоторые числа по несколько раз, если в течение цикла лягушка посещала их неоднократно). Подставляя и сокращая на T, получаем $d \geq p+q$, что противоречит условию задачи.

Решение 3. Как и в решении 2, будем считать, что лягушка прыгает в бесконечном цикле. Также воспользуемся представлением $d = ap - bq$ для неотрицательных a и b, сумму $a+b$ обозначив через r.

Через δ_i обозначим разность между положениями лягушки в момент $i+r$ (то есть через $i+r$ шагов после начала) и в момент i. Так как их разделяет r шагов, то

$$\begin{aligned}\delta_i = xp - (r-x)q = ap + (x-a)p - bq - (r-x-b)q = \\ = d + (x-a)p + (x-(r-b))q = d + (x-a)(p+q)\,.\end{aligned}$$

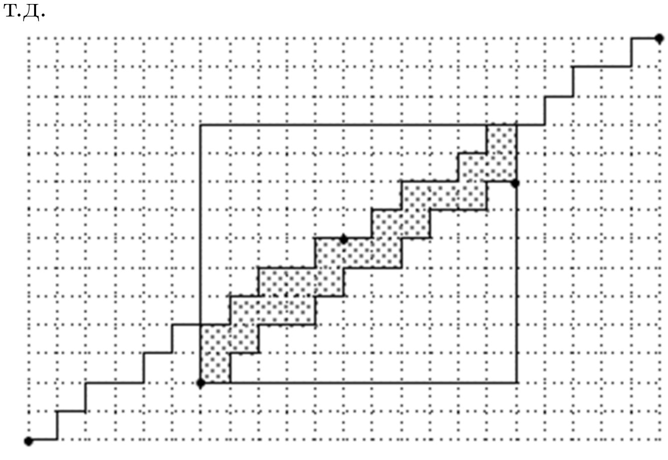
Если δ_i равно d, то мы нашли искомые позиции. Предположим противное, пусть $\delta_i \neq d$ для всех i. Тогда все числа δ_i имеют вид $d + (p+q)k_i$ для целых $k_i \neq 0$.

Заметим, что разность между δ_i и δ_{i+1} определяется тем, какими были $(i+1)$-й и $(i+r+1)$-й шаги; разобрав случаи, нетрудно убедиться, что она равна $\pm(p+q)$ или 0. Это означает, что числа δ_i либо все меньше 0, либо все больше 0.

Рассмотрим позицию лягушки через rT шагов, где T — количество шагов в её цикле. С одной стороны, она равна сумме $\delta_0+\delta_r+\delta_{2r}+\ldots+\delta_{r(T-1)}$, которая по доказанному выше должна быть либо отрицательной, либо положительной. С другой стороны, через rT шагов лягушка вернётся на позицию 0. Противоречие.

Решение 4. Поскольку p и q взаимно просты, лягушка может вернуться в исходную точку, только сделав kq прыжков вправо и kp прыжков влево, где k — натуральное число. Изобразим путь P лягушки на целочисленной решетке так: когда лягушка прыгает (на p) вправо будем сдвигаться на 1 вправо, а когда прыгает влево — на 1 вверх. Ниже на рисунке слева изображен такой путь P для $p=7$, $q=11$, $k=1$ и последовательности прыжков $7-11+7-11+7+7-11+7-11+7+7-11+7-11+7+7-11+7=0$.

Как известно, найдутся натуральные a и b, для которых $d = pa - qb$. Сдвинув путь P на a вправо и на b вверх, получим новый путь Q. Выше на рисунке справа изображён путь Q, полученный из пути на левом рисунке для $d=10$, $a=3$ и $b=1$ $(10 = 7\cdot 3 - 11\cdot 1)$. Если P и Q имеют общую точку (x,y), то точка $(x-a, y-b)$ также лежит на P. Соответствующие положения лягушки на числовой прямой равны $p(x-a) - q(y-b)$ и $px - qy$, а $(px-qy) - (p(x-a) - q(y-b)) = pa - qb = d$, что и требовалось. То же будет верно, если путь Q имеет общую точку с расширенным путем $\mathbf{P}$, полученным добавлением к P его копий, полученными сдвигами на (kq, kp), $(2kq, 2kp)$ и т.д.



Предположим, что общих точек у путей $\mathbf{P}$ и Q нет, например, Q лежит ниже $\mathbf{P}$. На рисунке справа $\mathbf{P}$ состоит из двух копий P, а Q получен из P сдвигом, соответствующим $d=20$, $a=6$, $b=2$ $(20 = 7\cdot 6 - 11\cdot 2)$.

Рассмотрим заштрихованную фигуру F, расположенную «между» $\mathbf{P}$ и Q, и наименьший содержащий её прямоугольник (его размеры $kq \times (kp+l)$, где l — натуральное число). Когда Q совпадает с P, площадь $S(F)$ равна 0. Сдвиг на a вправо увеличил эту площадь на kpa, а сдвиг на b вверх уменьшил её на kqb. Значит, $S(F) = k(pa-qb) = kd$.

Оценим площадь F снизу другим способом. Фигуру F можно разбить на kq вертикальных полосок толщиной в одну клетку. В каждой полоске есть минимум одна клетка (нижняя). Фигуру F пересекают по внутренним отрезкам $kp+l-1$ горизонтальных линий сетки. В каждой вертикальной полоске клеток хотя-бы на одну больше, чем количество пересекающих её линий, т.к. есть клетка прямо под каждой линией, и клетка выше самой верхней линии. Значит, общая площадь F не менее $kq+kp+l-1$ клеток, что не меньше $k(p+q)$ клеток. Это противоречит неравенству $d < p+q$.

в каждой вертикальной полоске клеток хотя-бы на одну больше чем количество пересекающих её линий, т.к. есть клетка прямо под каждой линией, и клетка выше самой верхней линии.

10 – 11 классы

1. [4] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

Решение. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на k кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

2. [5] Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}?$$

Артемий Соколов

Ответ: существует.

Решение 1. Докажем, что подходит $n=6$. Предварительно заметим, что любую пару $(0, y)$ с ненулевым y можно получить так: $0 = \frac{3}{2y} + \frac{3}{2y} - \frac{3}{y}$, $y = \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{y}{3}$. Аналогично можно получить любую пару $(x, 0)$ с ненулевым x. Тогда любую пару (x, y) с отличными от нуля x и y можно получить как «сумму» двух рассмотренных выше пар. Пару $(x, 0)$ можно получить как сумму двух пар $(\frac{x}{2}, 0)$, аналогично можно получить пару $(0, y)$, а пару $(0, 0)$ — как $1+1+1-1-1-1$.

Решение 2. Докажем, что подходит $n=4$. Заметим, что если мы зафиксируем положительное число k и рассмотрим все возможные пары положительных чисел a, b с суммой k, то множество значений выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ — это луч $[\frac{4}{k}; +\infty)$ (проверьте это, записав сумму в виде $\frac{1}{a} + \frac{1}{k-a} = \frac{k}{a(k-a)}$).

Тогда для данных x и y выберем положительные суммы $a+b$ и $c+d$ так, что $a+b-c-d = x$ (сами числа a, b, c, d пока не фиксируем).

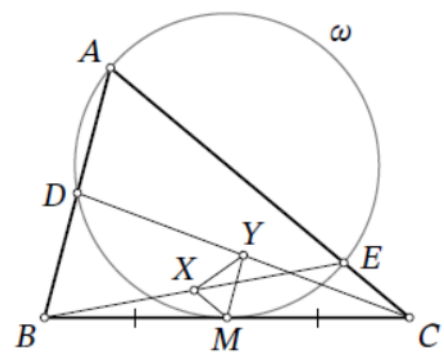
Поскольку выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, по сказанному выше, принимают все достаточно большие значения, можно подобрать положительные a, b, c, d так, чтобы разность этих выражений равнялась y.

Решение 3. Докажем, что подходит $n = 4$. Будем искать числа $a_1, \ldots, a_4$ как корни многочлена вида $P(t) = t^4 - xt^3 - ut^2 - yt + 1$ (согласно формулам Виета они удовлетворяют указанным равенствам). Поскольку $P(0) = 1$, для того чтобы многочлен $P(t)$ имел четыре вещественных корня, достаточно, чтобы числа $P(1) = 2-x-u-y$ и $P(-1) = 2+x-u+y$ были отрицательны. Мы этого добьемся, взяв $u > |x+y|+2$.

Замечание. Можно доказать, что $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ не подходят.

3. [5] Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω.

Алексей Доледенок



Решение. Заметим, что MX и MY — средние линии треугольников CBE и BCD соответственно. По условию

$$BD \cdot BA = BM^2 = CM^2 = CE \cdot CA,$$

откуда

$$MX : MY = CE : BD = BA : CA.$$

Поскольку $MX||AC$ и $MY||AB$, треугольники MXY и ABC подобны. Значит, $\angle MXY = \angle B = \angle YMC$. По теореме об угле между касательной и хордой сторона BC касается описанной окружности треугольника MXY, откуда следует утверждение задачи.

4. [8] В ряд лежат $100N$ бутербродов с колбасой. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

Иван Митрофанов

Решение. Докажем, что при $N = 3^{100}$ выиграет кот Матроскин. Для этого достаточно, чтобы на последнем шаге дяди Фёдора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы.

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых даёт остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого даёт остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые 3^{99} ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как Дядя Фёдор за это время съедает $3^{99} \cdot 100$ бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие 3^{99} ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется — ничего не делать. Так как за один ход дядя Фёдор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание 1), то ещё через 3^{99} ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьётся того, чтобы все бутерброды, номер которых даёт остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы.

Замечание 1. Каждым ходом дядя Фёдор будет съедать бутерброды с номерами, дающими различные остатки от деления на 100, даже если съедает их с двух сторон. Это можно понять, заметив, что до его хода количества бутербродов для каждого остатка одинаковы, так как общее их количество кратно 100; и после его хода ситуация такая же.

Замечание 2. Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при $N = 2^{100}$ он тоже выигрывает; на каждой стадии количество бутербродов при этом будет уменьшаться в 2 раза. Для этого ему нужно стягивать колбасу только с тех бутербродов (с номерами, дающими данный остаток от деления на 100), до которых дядя Фёдор на данной стадии гарантированно не доберётся. Нетрудно понять, что такой бутерброд действительно всегда найдётся.

А вот при $N = 2^{100} - 1$ уже выигрывает дядя Фёдор. Действительно, первыми $2^{99} - 1$ ходами он съест любые $2^{99}-1$ сотен бутербродов; за это время усилиями соперника появится не более $2^{99}-1$ бутербродов без колбасы. Далее, если перед дядей Фёдором лежит 2^k сотен бутербродов, из которых не более $(100-k)\cdot 2^k-1$ без колбасы, то при $k > 0$ он может съесть ту половину ряда (правую или левую), в которой бутербродов без колбасы больше. Тогда их в ряду останется не более $(100-k)\cdot 2^{k-1}-1$ плюс, благодаря коту Матроскину, не более 2^{k-1} новых — всего не более $(100-k+1)\cdot 2^{k-1}-1$. Продолжая так и далее, при $k = 0$ дядя Фёдор получит сто бутербродов, из которых не более 99 будут без колбасы.

5. [8] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, …, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

Ответ: $n = 100(m+1)$ при $k = 2m$ и $n = 100(m+1)+1$ при $k = 2m+1$.
Решение. Пусть $k = 2m$ или $k = 2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i = 100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из $k+1$ различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

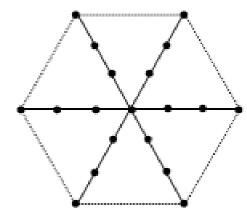
Рассмотрим для каждого туриста первые $m+1$ номеров из его списка. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m+m=2m$, все на ремонте). Следовательно, $n \geqslant 100(m+1)$.

При чётном k этой оценки достаточно. В случае нечётного k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров будут на ремонте, а у Васи — все номера до совпадающего с Петиным (их не более m) будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n \geqslant 100(m+1)+1$.

Замечание. Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном k мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери $k+2$ номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более k ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном k представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по $k+2$ номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и $k=5$). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил $\frac{k+1}{2}$ ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



6. [10] Найдите хоть одно вещественное число A со свойством: для любого натурального n расстояние от верхней целой части числа A^n до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа x — наименьшее целое число, не меньшее x.)

Дмитрий Креков

Решение. Рассмотрим любое квадратное уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, у которого два положительных корня, произведение которых равно 1. Подойдёт, например, уравнение x^2-4x+1, его корни — это $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$. Заметим, что сумма и произведение этих корней — целые, а тогда и сумма $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ — целая при любом натуральном n (это нетрудно доказать по индукции или просто раскрыв скобки: слагаемые с $\sqrt{3}$ либо входят в чётной степени, либо взаимно уничтожаются).

Тогда $((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)^2$ — точный квадрат, и он равен $(2+\sqrt{3})^{2n}+2+(2-\sqrt{3})^{2n}$ (так как произведение корней равно 1), то есть отстоит на 2 от числа $(2+\sqrt{3})^{2n}+(2-\sqrt{3})^{2n}$, которое, в свою очередь, есть верхняя целая часть числа $(2+\sqrt{3})^{2n}$ (поскольку второй корень положителен и меньше 1).

Но тогда число $A=(2+\sqrt{3})^2$ — искомое.

Коментарий. Несложно видеть, что в качестве t можно взять любое число, являющееся бо́льшим корнем многочлена вида $x^2-nx+1=0$, где n — натуральное число, не меньшее 3. Действительно, как и в решении выше, сумма корней $t^n+\frac{1}{t^n}$ этого многочлена оказывается целой, откуда для $A=t^2$ следует утверждение задачи.

В этом решении мы увидели, что для взятых нами чисел t расстояние от степени t^n до ближайшего целого стремится к нулю с ростом t. На самом деле, чисел, степени которых становятся всё ближе и ближе к целым числам, больше (но про остальные нельзя сказать, что они подходят для решения данной задачи!).

А именно, пусть $P(x)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все корни (в том числе комплексные), кроме одного, по модулю меньше 1. Тогда этот корень x_1 вещественный, и расстояние от x_1^n до ближайшего целого числа стремится к 0 с ростом n. Это следует из того, что сумма n-х степеней всех корней многочлена $P(x)$ целочисленно выражается через его коэффициенты, и потому является целой. А степени всех остальных корней стремятся к 0 — как раз потому, что они по модулю меньше 1. Это рассуждение можно прочитать в статье А. Егорова «Числа Пизо» (журнал ««Квант», номера 5 и 6 за 2005 год); см. также проект «Дробные части степеней» на XII Летней конференции Турнира городов.

Такие числа — корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все остальные корни по модулю меньше 1, — называются *числами Пизо* или *числами Пизо—Виджаярагхавана*. Они представляют интерес в связи с задачами диофантовой аппроксимации и изучались в работах Туэ, Харди, Пизо (см., например, книгу: Дж. В. С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961. [5, глава VIII]).

Свое название эти числа получили после публикации Шарля Пизо, который в своей диссертации открыл много замечательных свойств этих чисел.

7. Дано целое $n > 2$. На сфере радиуса 1 требуется расположить n попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины α. Докажите, что а) [6] при любом $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ это возможно; б) [7] при любом $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ это невозможно.

Илья Богданов

Решение. а) Пусть вертикальная прямая ℓ проходит через центр сферы O. Пусть две параллельных горизонтальных плоскости высекают на сфере две равных (не больших!) окружности γ_+ и γ_-. Тогда существует большая окружность Ω_0, касающаяся γ_+ и γ_- в (диаметрально противоположных) точках P_0 и M_0 соответственно. Повернув Ω_0 на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг ℓ, получим большую окружность Ω_k, также касающуюся двух окружностей в точках P_k и M_k соответственно.

Рассмотрим одну дугу P_0M_0 окружности Ω_0, а также дуги P_kM_k, полученные из неё поворотами. Все эти дуги не пересекаются, поскольку любая горизонтальная плоскость пересекает эти дуги в вершинах правильного n-угольника. Более того, каждую из этих дуг P_kM_k можно расширить до ближайших к ней (но не лежащих на ней) точек пересечения Ω_k с другими окружностями Ω_i. Заметим, что точки пересечения Ω_k и Ω_i лежат в (вертикальной) плоскости, симметрия относительно которой меняет эти окружности местами (эта плоскость содержит, например, биссектрису угла P_iOP_k). Отсюда легко видеть, что ближайшими к нашей дуге будут точки пересечения с Ω_{k-1} и с Ω_{k+1}, и каждую дугу P_kM_k можно расширить до дуги между этими точками (не включающей концы).

Если теперь плоскости, высекающие γ_+ и γ_-, взять близкими к центру сферы, то точки пересечения Ω_k и Ω_{k-1} будут (из симметрии) близки к серединам дуг P_kP_{k-1} и M_kM_{k-1}. Поэтому длины полученных дуг можно сделать сколь угодно близкими к $\pi + \frac{2\pi}{n}$, что и требовалось.

б) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно не пересекающиеся дуги больших окружностей с длинами $\pi + \alpha_1$, $\pi + \alpha_2, \ldots, \pi + \alpha_n$ при положительных α_i; мы считаем, что они содержат свои концы. Мы докажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 2\pi,$$

откуда и следует требуемое.

В дальнейшем под *полюсом* полусферы мы понимаем точку этой полусферы, наиболее удалённую от её границы.

Обозначим через B_i дугу большой окружности, дополнительную к A_i (её длина равна $\pi - \alpha_i$). Рассмотрим все (открытые) полусферы, содержащие B_i; пусть X_i и Y_i — концы B_i (мы считаем, что они принадлежат B_i). Полусфера содержит B_i тогда и только тогда, когда она содержит X_i и Y_i, то есть когда её полюс лежит в открытых полусферах с полюсами X_i и Y_i. Значит, множество $\mathcal{S}_i$ полюсов таких полусфер — это пересечение этих двух полусфер, то есть сферический «ломтик» раствора α_i; его площадь равна $2\alpha_i$.

Докажем теперь, что множества $\mathcal{S}_i$ попарно не пересекаются; поскольку площадь сферы равна 4π, отсюда вытекает требуемое неравенство. Предположим, что некоторая точка Z лежит в $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$; тогда полусфера с полюсом Z содержит B_1 и B_2, а значит, дополнительная к ней (замкнутая) полусфера $\mathcal{H}$ пересекает A_1 и A_2 по целым полуокружностям (а не их частям). Но любые две таких полуокружности на полусфере $\mathcal{H}$ пересекаются (ибо концы любой — диаметрально противоположные точки на границе полусферы). Это противоречит нашему предположению.

Замечание. Для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых меньше 2π, на сфере можно расположить попарно не пересекающиеся дуги длин $\pi + \alpha_i$ тем же методом, что и в решении пункта а).

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 апреля 2021 г.

1. Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?

Д. Э. Шноль

2. Петя и Вася по очереди красят рёбра N-угольной пирамиды: Петя — в красный цвет, а Вася — в зелёный (ребро нельзя красить дважды). Начинает Петя. Выигрывает Вася, если после того, как все рёбра окрашены, из любой вершины пирамиды в любую другую вершину ведёт ломаная, состоящая из зелёных рёбер. В противном случае выигрывает Петя. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

А. Н. Глебов

3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а T — точка касания этой окружности со стороной AC. Пусть P и Q — ортоцентры треугольников BAI и BCI соответственно. Докажите, что точки T, P, Q лежат на одной прямой.

Л. А. Емельянов

4. Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots$ такова, что при каждом целом $n > 100$ число a_n равно наименьшему натуральному числу, большему чем a_{n-1} и не делящемуся ни на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Докажите, что в такой последовательности лишь конечное количество составных чисел.

П. А. Кожевников

5. Полиция задержала 50 человек, из которых 35 — преступники, которые говорят, что захотят, а 15 — свидетели, которые всегда говорят правду. Все задержанные знают, кто преступники. Какое наименьшее число человек достаточно выбрать, чтобы, спросив потом у каждого, кто именно преступники, по ответам вычислить хотя бы одного преступника?

А. И. Аржанцев

6. Существует ли описанный 2021-угольник, все вершины и центр вписанной окружности которого имеют целочисленные координаты?

М. А. Евдокимов

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 апреля 2021 г.

Предварительные решения задач.

У-1. *Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?* *(Д. Шноль)*

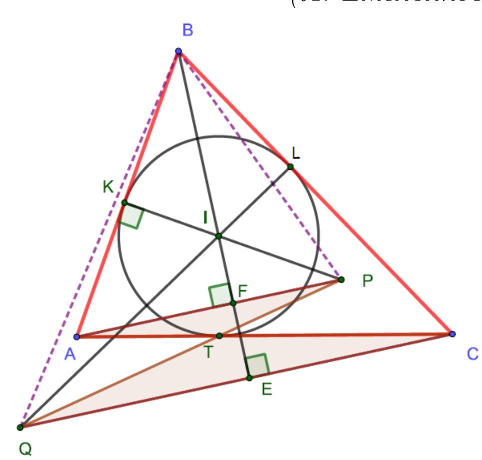
Ответ: нет. **Решение.** Положим $F(x) = f(x) + g(x)$, $\quad G(x) = f(x) - g(x)$. Тогда $f(x) = \frac{F(x)+G(x)}{2}$, $g(x) = \frac{F(x)-G(x)}{2}$. Пусть F и G строго возрастают (соответственно, строго убывают). Тогда f как их полусумма строго возрастает (соответственно, строго убывает), что противоречит условию. Если же какая-то из функций F и G строго возрастает, а другая строго убывает, то обе функции F и $-G$ строго возрастают или строго убывают. Следовательно, их полусумма g строго монотонна — снова противоречие с условием.

У-2. *Петя и Вася по очереди красят рёбра N-угольной пирамиды: Петя — в красный цвет, а Вася — в зелёный (ребро нельзя красить дважды). Начинает Петя. Выигрывает Вася, если после того, как все рёбра окрашены, из любой вершины пирамиды в любую другую вершину ведёт ломаная, состоящая из зелёных рёбер. В противном случае выигрывает Петя. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?* *(А. Глебов)*

Ответ: Вася. **Решение.** Пусть O — вершина пирамиды, $A_1A_2 \ldots A_N$ — её основание. Разобьём все рёбра пирамиды на пары смежных, одно из которых боковое, а другое лежит в основании: (OA_1, A_1A_2), (OA_2, A_2A_3), $\ldots$, (OA_N, A_NA_1). На каждый ход Пети Вася может отвечать в ту же пару, то есть красить в зелёный цвет ребро из той пары, в которой Петя только что покрасил второе ребро в красный. Если Петя покрасит хотя бы одно ребро в основании пирамиды, то в ответ Вася покрасит боковое ребро из той же пары, пусть это, например, ребро OA_N. Так как в конце игры вершина A_{N-1} соединена зелёным ребром либо с O, либо с A_N, то из неё можно дойти по зелёным рёбрам до O. Далее, вершина A_{N-2} соединена либо с O, либо с A_{N-1}, из которой есть путь по зелёным рёбрам до O. Следовательно, и из вершины A_{N-2} можно добраться до O по зелёным рёбрам. Продолжая эти рассуждения, получим, что из всех вершин можно дойти по зелёным рёбрам до вершины O, а это значит, что Вася победил. Таким образом, чтобы не проиграть, Петя должен красить только боковые рёбра. После его предпоследнего хода неокрашенными останутся ребро из пары, в которую он только что сходил, и два ребра ещё из одной пары. Тогда в ответ Вася может покрасить в зелёный цвет последнее неокрашенное боковое ребро, после чего они покрасят ещё по одному ребру в основании. В итоге зелёным цветом будут покрашены все рёбра в основании пирамиды, кроме одного, а также одно боковое ребро, поэтому каждые две вершины будут соединены путём из зелёных рёбер. Значит, и в этом случае Вася победит.

У-3. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а T — точка касания этой окружности со стороной AC. Пусть P и Q — ортоцентры треугольников BAI и BCI. Докажите, что точки T, P, Q лежат на одной прямой.* *(Л. Емельянов)*

Решение. Случай $AB = BC$ очевиден. Иначе основания F и E высот AF и CE лежат на биссектрисе BI по разные стороны от AC, прямые AP и CQ параллельны и $\angle PAT = \angle FAT = \angle ECT = \angle QCT$. Задача будет решена, если мы докажем подобие треугольников TAP и TCQ (тогда равные углы CTQ и ATP вертикальны и точки P, Q, T лежат на одной прямой). Для этого достаточно проверить, что $AT/AP = CT/CQ$. Пусть K и L — точки касания окружности со сторонами AB и BC соответственно. Тогда $AT = AK$ и $CT = CL$, и осталось доказать равенство $AK/AP = CL/CQ$. Оно следует из подобия треугольников APK и CQL: они прямоугольные, а поскольку BI — биссектриса угла B, углы BAP и BCQ равны.



Кратко то же самое с синусами. Так как AP содержит высоту треугольника ABI, то $AP \perp BI$. Пусть K — точка касания AB со вписанной окружностью, так что $K = PI \cap AB$.

Тогда $TA/PA = KA/PA = \sin\angle APK = \sin\angle ABI = \sin\frac{\angle B}{2}$.

Аналогично $CQ \perp BI$, откуда $CQ \parallel AP$. И также $TC/QC = \sin\frac{\angle B}{2}$, откуда $TA/PA = TC/QC$.

Таким образом, $TAP \sim TCQ$. Значит, $\angle ATP = \angle CTQ$, откуда и следует, что T, P, Q на одной прямой.

У-4. *Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots$ такова, что при каждом целом $n > 100$ число a_n равно наименьшему натуральному числу, большему чем a_{n-1} и не делящемуся ни на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Докажите, что в такой последовательности лишь конечное количество составных чисел.* (*П. Кожевников*)

Решение 1. Докажем, что все a_m, большие $(a_{100})^2$, — простые числа. Предположим противное, тогда некоторое $a_m > (a_{100})^2$ раскладывается как $a_m = dt$, где $1 < t \le d < a_m$, и следовательно $a_{100} < d < a_m$. Согласно определению a_m, d не является ни одним из $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Тогда $a_k < d < a_{k+1}$ для какого-то $k \in \{100, 101, \ldots, m-1\}$. Раз d не было выбрано в качестве a_{k+1}, оно делится на какое-то a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Но тогда и a_m делится на a_i. Противоречие.

Решение 2. Пусть последовательность S из условия задачи содержит бесконечно много составных чисел. Так как члены с номерами больше 100 не делятся на другие члены последовательности, она не содержит 1.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — все простые числа, не превосходящие a_{100}. Все остальные простые числа входят в S: действительно, пусть q — одно из них, и пусть a_t — наибольшее число в последовательности, меньшее чем q. Тогда q больше $a_1, \ldots, a_t$ и не делится на них (так как единицы среди них нет), причём меньшего числа с такими свойствами не существует. Следовательно, $a_{t+1} = q$.

Никакой другой член исходной последовательности не делится на q: предыдущие меньше q, а последующие не делятся на члены с меньшими номерами. Следовательно, составные числа из S не имеют простых делителей кроме $p_1, \ldots, p_k$.

Дальше возможны два способа решения.

Первый способ. Пусть $1 \le i \le k$, и пусть $r = p_i^{d_i}$ — наименьшая степень числа p_i, которая больше a_{100}. Если S не содержит меньшей степени p_i, то r не делится на меньшие числа из S и потому содержится в S. Таким образом, для каждого из чисел $p_1, \ldots, p_k$ некоторая его степень содержится в S. Пусть P — произведение всех этих степеней. Если в S есть составное число m, большее чем a_{100}, то оно не делится на эти степени и на остальные простые числа, поэтому $m \le P$.

Второй способ. Пусть S_0 — совокупность всех составных чисел из S, имеющих номера больше 100. Предположим, что S_0 бесконечно. Пусть m_1 — наименьшее число из S_0. Любое другое число из S_0 не делится на m_1, поэтому какое-то p_i, где $1 \le i \le k$, входит в его разложение с меньшим показателем, чем в разложение m_1. Для некоторого i количество таких чисел бесконечно, а среди них бесконечно много таких, что в их разложении показатель при p_i одинаков. Совокупность таких чисел обозначим S_1.

Дальше рассуждаем аналогично: пусть m_2 — наименьшее число из S_1, тогда любое другое число из S_1 не делится на m_2, и т.д. Получаем бесконечное множество чисел из S_1, в разложении которых одинаков показатель при некотором p_j ($j \ne i$, $1 \le j \le k$). Это бесконечное множество обозначим S_2, и т.д.

В итоге получаем бесконечное множество S_{k-1} членов исходной последовательности, у которых номера больше 100, а разложения отличаются показателем лишь при одном простом множителе. Но если n_1, n_2 — два числа из S_{k-1} и этот показатель больше у n_1, то n_1 делится на n_2 и они не могут одновременно принадлежать исходной последовательности — противоречие. (В действительности S_k можно построить по тому же правилу, и получится бесконечное множество, в котором все числа на самом деле равны.)

У-5. *Полиция задержала 50 человек, из которых 35 — преступники, которые говорят, что захотят, а 15 — свидетели, которые всегда говорят правду. Все задержанные знают, кто преступники. Какое наименьшее число человек достаточно выбрать, чтобы спросив потом у каждого, кто именно преступники, по ответам вычислить хотя бы одного преступника?* (*А. Аржанцев*)

Ответ: 47. **Решение.** *Оценка сверху.* Выберем 47 человек и каждого спросим «Кто из жителей преступники?». Пусть каждый назвал 35 человек и никто не назвал себя, иначе преступник определяется очевидно. Разобьем всех людей на группы так, что внутри одной группы ответы одинаковые. Заметим, что в одной группе не больше 15 человек, иначе каждый из них обвинил бы менее 35 человек. Докажем, что найдется группа, в которой менее 12 человек. Действительно, если в каждой группе хотя бы 12 человек, то если этих групп хотя бы 4, то всего людей хотя бы $12 \cdot 4 = 48 > 47$, а если групп не более, чем 3, то всего людей не более, чем $15 \cdot 3 = 45 < 47$, противоречие. Возьмем ту группу, где меньше 12 человек. Если бы кто-то из них был свидетелем, то вместе с ним свидетелем могли быть только люди из его группы и неопрошенные люди, то есть менее 15 человек, противоречие. Значит, люди этой группы — преступники.

Оценка сверху, 2-й способ. Выберем 47 человек и каждого спросим «Кто из жителей преступники?», и каждый из них назовет свое 35-элементное подмножество преступников. Заметим, что среди этих 47 человек не менее 12 свидетелей, поэтому они назовут одно и то же 35-подмножество. Далее, 35-подмножество назовем *потенциально-преступным* (п-п), если его назвали не менее 12 из 47 человек. Одно из п-п подмножеств должно в самом деле совпадать с множеством преступников. Но среди всех 50 человек есть человек A, входящий во все п-п 35-подмножества: действительно, п-п 35-подмножеств всего не более 3 (иначе опрошенных было бы не менее $4 \cdot 12 = 48$, и поэтому 15-элементные дополнения к п-п подмножествам накрывают не более 45 опрошенных. Значит A — точно преступник.

Оценка снизу. Пусть мы опросили $k < 47$ людей. Опросим еще $46 - k$ случайных людей из оставшихся. Разобьем 46 опрошенных людей на 4 группы по 11, 11, 11, 13 человек. Пусть группы, где 11 человек, будут отвечать на вопросы так, будто свидетели они и 4 неопрошенных человека, а группа из 13 человек будет отвечать на вопросы так, будто свидетели они и 2 любых неопрошенных. Так как мы не можем понять, какая из версий настоящая, то и преступника мы найти не сможем, ведь любой человек в какой-то из версий свидетель.

Комментарий. Попробуйте решить также задачу, когда людей опрашивают последовательно (можно выбирать очередного опрашиваемого, учитывая ответы предыдущих опрошенных).

У-6. *Существует ли описанный 2021-угольник, все вершины и центр вписанной окружности которого имеют целочисленные координаты?* *(М. Евдокимов)*

Ответ: существует. **Решение.** Будем называть точку с рациональными координатами рациональной. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Докажем, что на ней существует сколь угодно много рациональных точек. Рассмотрим прямую вида $y = kx+1$ с рациональным k. Она проходит через точку $(0, 1)$ окружности, и вторая точка пересечения с окружностью тоже будет рациональной (поскольку квадратное уравнение $x^2 + (kx + 1)^2 = 1$ с рациональными коэффициентами имеет рациональный корень 0, второй корень также рационален).

Выбирая разные рациональные k, отметим на окружности 2021 рациональную точку, включая точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Через каждую из этих 2021 точек проведём касательную к окружности и отметим точки пересечения соседних касательных, получим описанный 2021-угольник (строго это можно обосновать, например, так: сначала получим описанный квадрат, проведя касательные в четырёх указанных точках, а затем по очереди проведём остальные касательные: каждая будет отсекать от уже имеющегося многоугольника треугольник, примыкающий к вершине). Заметим, что уравнения касательных имеют рациональные координаты (поскольку касательные перпендикулярны прямым, соединяющим начало координат с рациональными точками касания). Точка пересечения прямых с рациональными координатами рациональна (как единственное решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами). Значит, вершины нашего 2021-угольника рациональны. Приведём координаты вершин к общему знаменателю N и рассмотрим гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом N. Она переведёт наш 2021-угольник в удовлетворяющий условию задачи.