30. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna (bazna) varijanta, 12. oktobar 2008. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U 10 kutija nalaze se olovke. Poznato je da u različiim kutijama ima različit broj olovaka, pri čemu su u svakoj kutiji olovke različitih boja. Dokažite da iz svake kutije možemo uzeti po olovku tako da sve one budu različitih boja.

2. (3 poena) Dato je 50 različitih prirodnih brojeva, od kojih 25 nisu veći od 50, a ostali su veći od 50, ali ne prelaze preko 100. Pri tome ni koja dva se ne razlikuju tačno za 50. Nađite zbir (svih) tih brojeva.

3. (4 poena) U kružnicu poluprečnika 2 upisan je oštrougli trougao $A_1A_2A_3$. Dokažite da se na lukovima A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 može naći po jedna tačka

B_1, B_2, B_3 (tim redom), tako da površina šestougla $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ bude brojčano jednaka obimu trougla $A_1A_2A_3$.

4. (4 poena) Data su tri prirodna broja takva da je jedan od njih jednak poluzbiru druga dva. Može li proizvod ta tri broja biti tačan 2008. stepen prirodnog broja?

5. (4 poena) Nekoliko sportista startovalo je istovremeno sa jednog kraja pravolinijske staze. NJihove brzine su različite, ali konstantne (stalne). Kad dođu do kraja staze sportisti se trenutno okreću i trče nazad, zatim sve to ponavljaju, itd. U jednom momentu su se svi sportisti našli u jednoj tački. Dokažite da će takvih susreta biti još.

30. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna (bazna) varijanta, 12. oktobar 2008. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Aljoša ima kolače raspoređene u nekoliko kutija. Aljoša je zapisao po koliko kolača ima u svakoj kutiji. Serjoža je uzeo po jedan kolač iz svake kutije i stavio na prvi tanjir. Zatim je ponovo uzeo po jedan kolač iz svake kutije koja nije prazna i stavio ih na drugi tanjir. Tako je radio sve dok svi kolači nisu bili raspoređene po tanjirima. Posle toga, Serjoža je zapisao po koliko je kolača bilo na svakom tanjiru. Dokažite da je količina različitih brojeva koje je Aljoša zapisao jednaka količini različitih brojeva koje je Serjoža zapisao.

2. (3 poena) Rešite sistem jednačina $(n > 2)$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \ldots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \ldots + x_n + x_1} = \ldots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \ldots + x_{n-1}}\ ; \ x_1 - x_2 = 1$$

3. (4 poena) U kružnicu poluprečnika 2 upisan je tridesetougao $A_1 A_2 \ldots A_{30}$. Dokažite da se na lukovima A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{30}A_1$ može naći po jedna tačka B_1,B_2,...,B_3 (tim redom), tako da površina šezdesetougla $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{30}B_{30}$ bude brojčano jednaka obimu tridesetougla $A_1A_2 \ldots A_{30}$.

4. (4 poena) Da li postoji aritmetička progresija od pet različitih prirodnih brojeva, čiji je proizvod jednak tačno 2008-om stepenu prirodnog broja?

5. (4 poena) Na kvadratnoj mreži nacrtano je nekoliko pravougaonika čije se stranice poklapaju sa linijama mreže. Svaki pravougaonik se sastoji iz neparnog broja polja (kvadratića) i nikoja dva pravougaonika nemaju zajedničkih polja. Dokažite da te pravougaonike možemo obojiti sa 4 boje tako da pravougaonici iste boje nemaju zajedničke granične tačke.

30. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Osnovna varijanta, 26. oktobar 2008. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena,
a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na šahovskoj tabli 100×100 raspoređeno je 100 dama koje ne tuku jedna drugu. Dokažite da se u svakom ugaonom kvadratu 50×50 nalazi bar jedna dama. (*Dama je šahovska figura koja se kreće po horizontali, vertikali i dijagonali - na bilo koje rastojanje*!)

2. (6 poena) Imamo 4 kamena, od kojih svaki važe ceo broj grama. Imamo terazije sa tasovima i strelicom koja pokazuje na kojem od dva tasa se nalazi veća masa i za koliko grama je ta masa veća. Može li se sa 4 merenja odrediti masa svakog kamena, ako se u jednom od tih merenja može pogrešiti za 1 gram? (*Masa kamena ne može biti* ni 0, *ni negativna*!)

3. (6 poena) Serjoža je nacrtao trougao *ABC* i njegovu težišnu duž *AD*. Zatim je svom drugu Ilji saopštio dužinu težišne duži *AD* i dužinu stranice *AC*. Na osnovu tih podtaka Ilja je dokazao tvrđenje: ugao *CAB* je tup, a ugao *DAB* je oštar. Nađite odnos $\frac{AD}{AC}$ (i dokažite Iljino tvrđenje za svaki trougao u kome važi takav odnos).

4. (6 poena) Baron Minhauzen je pričao da on ima kartu zemlje Oz na kojoj je prikazano 5 gradova. Svaka dva grada spojena su putem koji ne prolazi kroz druge gradove. Svaki put na karti seče najviše jedan od drugih puteva (i najviše na jednom mestu). Putevi su označeni žutom ili crvenom bojom (prema boji podloge na putu), a pri obilasku oko svakog grada (po obodu) boje puteva koji iz njega polaze, a na koje se pri takvom obilasku nailazi, menjaju se naizmenično. Može li Baron biti u pravu?

5. (8 poena) Dati su pozitivni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zna se da je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \frac{1}{2}$.

Dokažite da je $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) < 2$.

6. (9 poena) Nad stranicama *AC* i *BC* raznostraničnog trougla *ABC* sa spoljašnje strane, kao nad osnovicama, konstruisani su jednakokraki trouglovi *AB'C* i *CA'B* sa jednakim uglovima na osnovicama. Svaki od tih uglova je φ. Normala iz temena *C* povučena na duž *A'B'* seče simetralu duž *AB* u tački C_1. Odredite ugao AC_1B.

7. U beskonačnom nizu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ broj a_1 jednak je 1, a svaki sedeći broj a_n nastaje iz prethodnog broja a_{n-1} po pravilu: ako najveći neparni delilac broja *n* ima ostatak 1 pri deljenju sa 4, tada je $a_n = a_{n-1} + 1$, a ako ima ostatak 3, tada je $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokažite da se u tom nizu:

a) (5 poena) broj 1 pojavljuje beskonačno mnogo puta;

b) (5 poena) svaki prirodan broj javlja beskonačno mnogo puta.

(Evo nekoliko prvih članova tog niza: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)
(*Najveći neparni delilac broja n je najveći neparni broj kojim je broj n deljiv, pri čemu to ne mora biti prost delilac.*)

30. TURNIR GRADOVA
Jesenje kolo.
Osnovna varijanta, 26. oktobar 2008. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Kvadratna tabla podeljena je pravama koje su paralelne stranicama table na 64 pravougaona polja koja su zatim obojena kao šahovska tabla. Rastojanja među pravama ne moraju biti jednaka, pa zato polja mogu biti različitih dimenzija. Poznato je, međutim, da odnos površine ma kojeg belog polja prema površini ma kojeg crnog polja nije veći od 2. Nađite najveći mogući odnos zbira površina belih polja prema zbiru površina crnih polja.
(*Ako uzmemo da je jedna stranica table vertikalna, a druga horizontalna, onda povučenih 7 vertikalnih i 7 horizontalnih pravih dele tablu na 64 pravougaona polja*)

2. (6 poena) Prostor je razdeljen na jednake kocke. Da li je tačno da je za svaku od tih kocki uvek moguće naći drugu koja sa njom ima zajedničku stranu?

3. (6 poena) Na stolu se nalazi N > 2 gomilica oraha sa bar jednim orahom svakoj od njih.. Dvoje igraju ("vuku poteze") naizmenično. U jednom potezu treba uzeti dve gomilice u kojima su brojevi oraha uzajamno prosti, a zatim od njih ih napraviti jednu gomilicu. Pobeđuje onaj koji učini poslednji potez. Za svako N objasnite koji od igrača može uvek da pobedi, ma kako igrao njegov protivnik.

4. (6 poena) Dat je nejednakokraki trapez $ABCD$. Tačka A_1 je tačka preseka kružnice opisane oko trougla BCD i prave AC (A_1 je različito od C.) Analogno odrećujemo tačke B_1, C_1, D_1. Dokažite da je $A_1B_1C_1D_1$ takođe trapez. (*Trapez je figura kod koje su dve stranice paralelne, a dve ne*!)

5. (8 poena) U beskonačnom nizu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ broj a_1 jednak je 1, a svaki sedeći broj a_n nastaje iz prethodnog broja a_{n-1} po pravilu: ako najveći neparni delilac broja n ima ostatak 1 pri deljenju sa 4, tada je $a_n = a_{n-1} + 1$, a ako ima ostatak 3, tada je $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokažite da se u tom nizu svaki prirodan broj javlja beskonačno mnogo puta.
(Evo nekoliko prvih članova tog niza: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)
(*Najveći neparni delilac broja n je najveći neparni broj kojim je broj n deljiv, (pri čemu to ne mora biti prost delilac.*)

6. (9 poena) Polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima je takav da jednačina $P(m)+P(n)=0$ ima beskonačno mnogo rešenja za cele brojeve m i n. Dokažite da grafik funkcije $y=P(x)$ ima centar simetrije.

7. Test se sastoji iz 30 pitanja. Na svako pitanje postoje dve varijante odgovora (jedan tačan, a drugi netačan). U jednom pokušaju Vita odgovora na sva pitanja, posle čega mu saopštavaju na koliko pitanja je odgovorio tačno. Može li Vita da postupa tako da garantovano sazna na koja je pitanja tačno odgovorio, najkasnije

a) (5 poena) posle 29. pokušaja (i da odgovori tačno na sva pitanja u 30. pokušaju);

b) (5 poena) posle 24. pokušaja (i da odgovori tačno na sva pitanja u 25. pokušaju)?

(U početku Vita ne zna ni jedan odgovor, a test je stalno jedan te isti)

30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U konveksnom 2009 - uglu povučene su sve dijagonale. Prava seče 2009- ugao, ali ne prolazi ni kroz jedno njegovo teme. Dokažite da ta prava seče paran broj dijagonala.

2. (4 poena) Neka $a*b$ znači izraz a^b. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se dobije isti rezultat?

3. (4 poena) Vlada hoće da napravi kolekciju kocki istih dimenzija i na svakoj strani svake kocke da napiše po jednu cifru, tako da se te kocke mogu poređati da čine ma koji 30- cifreni broj. Koliko najmanje kocki mu je za to dovoljno? (Cifre 6 i 9 se pri obrtanju kocke ne pretvaraju jedna u drugu.)

4. (4 poena) Prirodan broj su uvećali za 10% i ponovo dobili prirodan broj. Da li se pri tome zbir cifara mogao umanjiti za 10%?

5. (5 poena) U rombu *ABCD* ugao *A* iznosi 120°. Na stranicama *BC* i *CD* uzete su tačke *M* i *N* tako da je $\angle NAM = 30°$. Dokažite da se centar kružnice opisane oko trougla *NAM* nalazi na dijagonali romba.

30. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.
Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Neka $a*b$ znači izraz a^b. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se uvek dobije isti rezultat?

2. (4 poena) U ravni je dato nekoliko tačaka takvih da nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj. Neke tačke spojene su dužima. Zna se da svaka prava koja ne prolazi kroz date tačke seče paran broj duži. Dokažite da iz svake tačke polazi paran broj duži.

3. Za svaki prirodan broj n označimo sa $O(n)$ njegov najveći neparni delilac. Dati su proizvoljni prirodni brojevi $x_1=a$ i $x_2=b$. Formirajmo beskonačni niz prirodnih brojeva po pravilu: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, gde je $n = 3, 4, ...$

a) (2 poena) Dokažite da će, počev od nekog mesta, svi brojevi u nizu biti jednaki jednom istom broju.

b) (2 poena) Kako naći taj broj, ako se znaju brojevi a i b?

4. (4 poena) Redom je napisano nekoliko nula i jedinica. Posmatrajmo (sve) parove cifara u tom redu (ne obavezno susednih), gde je leva cifra 1, a desna 0. Neka se među tim parovima nalazi tačno M takvih u kojima između jedinice i nule ima paran broj cifara (moguće i nijedna), i tačno N takvih u kojima između jedinice i nule stoji neparan broj cifara. Dokažite da je $M \geq N$.

5. (4 poena) U unutrašnjosti nekog tetraedra uzeta je proizvoljna tačka X. Kroz svako teme tetraedra povučena je prava, paralelna duži koja spaja tačku X sa tačkom preseka medijana (težišnih duži) naspramne strane. Dokažite da se četiri dobijene prave seku u jednoj tački.

30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 15. mart 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Vasa i Pera igraju sledeću igru. Na tabli su napisani brojevi 1/2009 i 1/2008. Pri svakom potezu Vasa bira neki broj *x,* a Pera uveća jedan od brojeva na tabli (koji hoće) za *x.* Vasa pobeđuje ako se u nekom trenutku na tabli pojavi broj 1 Može li Vasa pobediti bez obzira na to kako igra Pera?

2. a) (2 poena) Dokazati da postoji mnogougao koji se može podeliti jednom duži na dva podudarna dela tako da ta duž deli jednu stranicu na pola, a drugu u odnosu 1 : 2.

b) (3 poena) Da li postoji konveksan mnogougao s takvim svojstvom?

3. (5 poena) U svakom polju kvadrata 101×101, osim centralnog, stoji jedan od sledeća dva saobraćajna znaka: "pravo" ili "skreći". Šahovska figura "auto" može spolja ući (pod pravim uglom prema ivici) na bilo koje ivično polje kvadrata. Ako je stala na polje na kojem je znak "pravo", onda produžava pravo na sledeće polje, a ako je stala na polje sa znakom "skreći", onda skreće pod uglom od 90^0 na stranu koju sama izabere. U centralnom polju se nalazi garaža. Mogu li se polja označiti tako da auto ne može da stigne u garažu?

4. (5 poena) Dat je beskonačan niz međusobno različitih prirodnih brojeva. Poznato je da je svaki član tog niza, osim prvog, ili aritmetička ili geometrijska sredina svoja dva susedna člana. Da li su obavezno svi članovi tog niza, počevši od nekog mesta, isključivo aritmetičke ili isključivo geometrijske sredine svojih suseda?

5. (6 poena) Zamak je opasan kružnim bedemom sa 9 kula na kojima stražare vitezovi. Kada protekne sat vremena svaki od njih (istovremeno) prelazi na susednu kulu, pri čemu se svaki od vitezova stalno kreće ili u pravcu kazaljke na satu ili u suprotnom pravcu. Za jednu noć svaki od vitezova je stigao da boravi na svakoj od kula. Poznato je da su u nekom trenutku na svakoj kuli dežurala bar dva viteza, kao i da je bio trenutak kada je na tačno 5 kula bio tačno po jedan vitez. Dokazati da je postojao trenutak kada je postojala kula na kojoj niko nije stražario.

6. (7 poena) Ugao *C* u vrhu jednakokrakog trougla *ABC* je 120^0. Iz temena *C* su puštena (povučena) dva zraka koji između sebe čine ugao od 60^0 i koji se po zakonu "upadni ugao jednak je uglu odbijanja" odbijaju od osnovice *AB* i završavaju na kracima tog jednakokrakog trougla. Na taj način je polazni trougao podeljen na 5 manjih trouglova. Uočimo ona tri koja leže na osnovici *AB.* Dokažite da je površina srednjeg od njih jednaka površini druga dva.

7. (9 poena) Neka C_n^k označava broj načina da se izaberu *k* predmeta iz skupa od *n* različitih predmeta (poredak predmeta nije bitan – načini koji se razlikuju samo u redosledu izbora predmeta smatraju se istim). Dokažite, ako su prirodni brojevi *k* i *l* manji od *n*, onda brojevi C_n^k i C_n^l imaju zajednički delilac veći od 1.

30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 15. mart 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Pravougaonik je podeljen na nekoliko manjih pravougaonika. Da li je moguće da za svaki par dobijenih pravougaonika duž, koja spaja njihova središta, seče još neki od tih pravougaonika?

2. (4 poena) Dat je beskonačan niz međusobno različitih prirodnih brojeva. Poznato je da je svaki član tog niza, osim prvog, ili aritmetička ili geometrijska sredina svoja dva susedna člana. Da li su obavezno svi članovi tog niza, počevši od nekog mesta, isključivo aritmetičke ili isključivo geometrijske sredine svojih suseda?

3. 6 poena) Na svakom polju table veličine 10×10 nalazi se žeton. U svakom potezu je dozvoljeno odabrati dijagonalu na kojoj se nalazi paran broj žetona i sa nje ukloniti jedan (proizvoljan) žeton. Koji je najveći broj žetona koji se mogu tako ukloniti sa table?

4. (6 poena) Tri ravni dele paralelepiped na osam tela, a svako od njih ima šest strana od kojih je svaka četvorougao (svaka ravan seče par naspramnih strana parelelepipeda, a ne seče preostali par naspramnih strana). Poznato je da se oko jednog od tih osam tela može opisati sfera. Dokazati da se i oko svakog od tih osam tela može opisati sfera.

5. (8 poena) Neka C_n^k označava broj načina da se izaberu *k* predmeta iz skupa od *n* različitih predmeta (poredak predmeta nije bitan – načini koji se razlikuju samo u redosledu izbora predmeta smatraju se istim). Dokažite, ako su prirodni brojevi *k* i *l* manji od *n*, onda brojevi C_n^k i C_n^l imaju zajednički delilac veći od 1.

6. (9 poena) Dat je prirodan broj $n > 1$. Dvoje naizmenično označavaju tačke na kružnici: prvi crvenom, a drugi plavom bojom. Kada je označeno po *n* tačaka svake boje, označavanje (igra) se završava. Zatim svaki od igrača bira luk maksimalne dužine čiji su krajevi njegove boje, ali tako da se na njemu ne nalazi niti jedna označena tačka. Pobeđuje onaj igrač čiji je luk duži. Moguć je i nerešen ishod – u slučaju da su luci jednaki, a takođe ako se ne može naći takav luk (tada se smatra da je dužina luka jednaka nuli). Koji od igrača ima dobitnu strategiju, ma kako igrao njegov protivnik?

7. (9 poena) U memoriju računara je upisan broj 6. Dalje računar vrši milion operacija. Svaka operacija se sastoji u sledećem: u *n*-tom koraku on povećava broj u svojoj memoriji za najveći zajednički delilac tog broja u memoriji i broja *n*. Dokažite da u ma kojem koraku računar uvećava broj u memoriji ili za 1 ili za neki prost broj.

ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

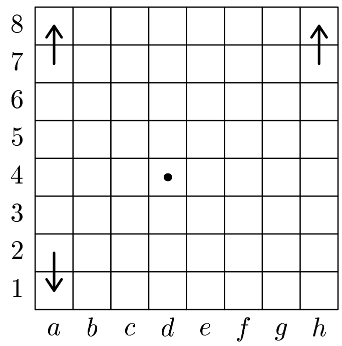
11 класс, устный тур, 10 мая 2009 г.

---

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

(И.И.Богданов)

2. Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$. Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$?
(Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).



(А.К.Толпыго)

3. Даны n цветов с номерами от 1 до n. Для каждого k от 1 до n пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до n в первые k цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что числа $f_1(n) + f_3(n) + f_5(n) + \ldots$ и $f_2(n) + f_4(n) + f_6(n) + \ldots$ отличаются на 1.
(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2) = 1$ и $f_2(2) = 2$.)

(М.А.Берштейн, Г.А.Мерзон)

4. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$ кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра кроме ребра AB.

(В.В.Произволов)

5. Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального n найдется такое натуральное k, что $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа c и m, что $P(x) = c \cdot x^m$.

(С.Спиридонов)

6. Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

(А.В.Шаповалов)

ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **11 класс, очный тур, 10 мая 2009 г.**

Решения задач

1. *На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?*

(И.И.Богданов)

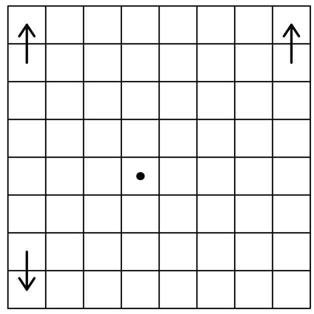
Ответ: $\frac{3}{2}100!$.

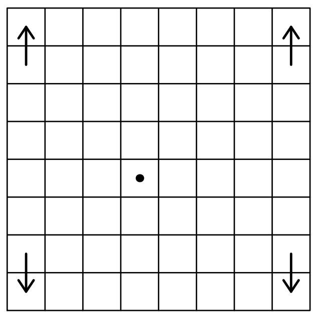
Заметим сначала, что для натуральных a и b неравенство $a+b>ab$ выполнено если и только если $a=1$ или $b=1$. Действительно, если скажем $a\geq b>1$, то $a+b\leq 2a\leq ab$. А если, например, $a=1$, то $1+b>b=1\cdot b$.

Пусть некоторая последовательность действий привела к максимальному результату. Среди них ровно одно действие содержало в качестве аргумента единицу. Согласно лемме, все остальные действия можем считать умножениями. В самом деле, если в результате одного из действий получилось не меньшее число, чем было, то и результатом последующих действий будут числа, не меньшие, чем были. Аналогично действие, содержащее единицу, можно считать сложением. Пусть единица была сложена с числом n. В итоге получится число $\frac{n+1}{n}100!=(1+\frac{1}{n})100!$. Поскольку мы ищем максимум, $n=2$.

2. *Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$. Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$?*
(Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

(А.К.Толпыго)





Пусть ладья попала на клетку $h1$ с клетки $h2$. Посмотрим, в каком порядке обходятся углы доски. Противоположные углы доски не могут идти подряд в пути ладьи — тогда соединяющий их путь отделяет один из двух других противоположных углов, и в этот угол ладья попасть не может. Значит, углы обходятся либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке. Случаи абсолютно аналогичны, разберем первый. Достаточно разобрать варианты, когда первый угол в пути левый. Если первым проходится левый верхний угол, то путь, соединяющий первые три угла, отрезает последний угол — ладья не может в него попасть. Если первым проходится левый нижний угол, то уже пройдя следующий угол, мы оказываемся отрезанными от остальных углов.

Полученное противоречие доказывает, что на клетку $h1$ ладья могла попасть только с клетки $g1$.

3. *Даны n цветов с номерами от 1 до n. Для каждого k от 1 до n пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до n в первые k цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что числа $f_1(n)+f_3(n)+f_5(n)+\ldots$ и $f_2(n)+f_4(n)+f_6(n)+\ldots$ отличаются на 1.*
(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2)=1$ и $f_2(2)=2$.)

(М.А.Берштейн, Г.А.Мерзон)

Обозначим сумму $f_1(n)+f_3(n)+\ldots$ через $O(n)$, а сумму $f_2(n)+f_4(n)+\ldots$ через $E(n)$. Докажем индукцией по n, что $|O(n)-E(n)|=1$. Для $n=1$ это равенство справедливо. Пусть оно верно для некоторого для некоторого количества цветов n. Заметим, что $f_k(n+1)=kf_k(n)+kf_{k-1}(n)$ при $1<k<n+1$, поскольку добавив число $n+1$, мы можем покрасить его в один из имеющихся k цветов, если остальные числа уже раскрашены в k цветов, либо, если остальные числа раскрашены в $k-1$

цвет, покрасить его в оставшийся из k первых цветов. Заметим также, что $f_{n+1}(n+1) = (n+1)f_n(n)$ и $f_1(n+1) = f_1(n)$. Тогда

$$O(n+1) = f_1(n) + 3(f_3(n) + f_2(n)) + 5(f_5(n) + f_4(n)) + \ldots,$$

$$E(n+1) = 2(f_2(n) + f_1(n)) + 4(f_4(n) + f_3(n)) + \ldots.$$

Вычитая одно выражение из другого и производя сокращения, получим, что

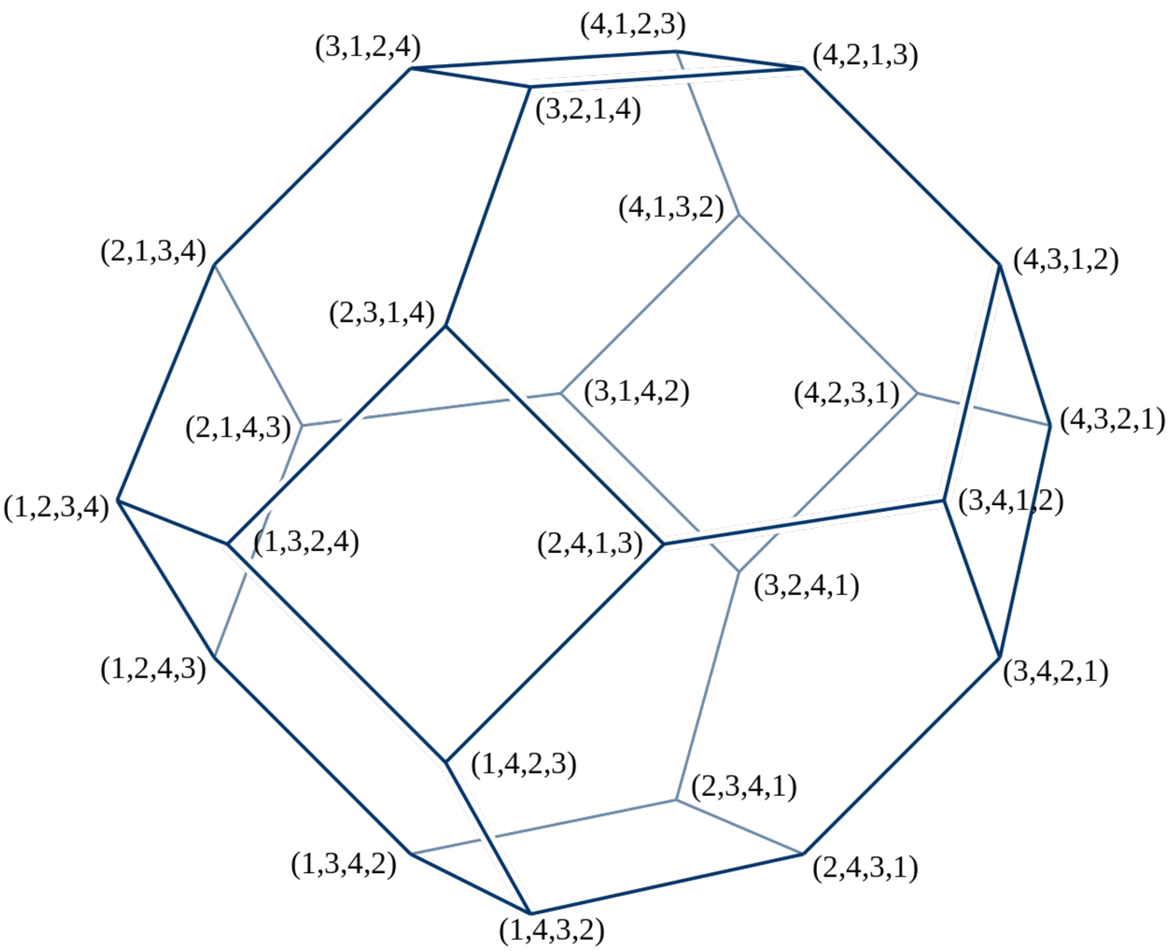
$$O(n+1) - E(n+1) = E(n) - O(n),$$

откуда следует утверждение задачи для $n+1$ цветов.

Комментарий. Как ни удивительно, у этой задачи имеется и геометрическое решение. Дело в том, что (для фиксированного n) числа $f_k(n)$ суть количества $(n-k)$-мерных граней у некоторого $(n-1)$-мерного многогранника — *пермутаэдра.* Такой многогранник можно получить, взяв в n-мерном пространстве выпуклую оболочку $n!$ точек, координаты которых — числа от 1 до n в каком-либо порядке. Чтобы разобраться в этом утверждении, можно начать с построения биекции между ребрами пермутаэдра и раскрасками множества $\{1, \ldots, n\}$ в $n-1$ цвет.

Например, количество вершин этого многоугольника $n!$, то есть равно $f(n)$. (В качестве хорошего упражнения можно попробовать установить биекцию между ребрами пермутаедра и раскрасками множества $\{1, \ldots, n\}$ в $n-1$ цвет.)

Для $n = 2$ пермутаэдр — это просто отрезок, для $n = 3$ — шестиугольник, для $n = 4$ — усеченный октаэдр (см. рисунок).



Таким образом, для решения задачи достаточно доказать, что знакопеременная сумма количеств k-мерных граней пермутаэдра равна 1. Но формула Эйлера гарантирует, что такая сумма равна 1 вообще для любого выпуклого (многомерного) многогранника. Например, для трехмерных многогранников эта формула превращается в известное равенство $V - E + F - 1 = 1$, где V, E и F — числа вершин, ребер и граней многогранника, а слагаемое “-1” соответствует его внутренности; равенство количеств вершин и ребер многоугольника — тоже частный случай это формулы.

4. *Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$ кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра кроме ребра AB.*

(В.В.Произволов)

Лемма. *Существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра, быть может, кроме CD, если и только если $AC + BD = AD + BC$.*

Пусть искомая сфера существует. Тогда вписанные окружности треугольников ABC и ABD касаются в точке касания данной сферы с ребром AB. Наоборот, если вписанные окружности треугольников ABC и ABD имеют общую точку (а значит, касаются), то содержащая их сфера — искомая. Пусть M_1 и M_2— точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ABD с ребром AB. По известной формуле для длин отрезков, на которые разбиваются стороны треугольника точками касания вписанной окружности, $AM_1 = \frac{AB+AC-BC}{2}$ и $AM_2 = \frac{AB+AD-BD}{2}$. Касание вписанных окружностей эквивалентно тому, что $AM_1 = AM_2$, то есть $\frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{AB+AD-BD}{2}$, что равносильно равенству $AC + BD = AD + BC$.

Вернёмся к решению задачи. Так как существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра, кроме CD, то по лемме $AC + BD = AD + BC$. И по той же лемме, применённой к ребру AB, получаем искомую сферу. Осталось доказать, что полученная сфера не касается всех рёбер тетраэдра. Предположим противное. Тогда она бы пересекала плоскости ABC и ABD по вписанным окружностям соответствующих треугольников, то есть имела бы две общие окружности со сферой, данной в условии, а значит, совпадала бы с ней.

5. *Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального n найдется такое натуральное k, что $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа c и m, что $P(x) = c \cdot x^m$.*

(С.Спиридонов)

Пусть $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$. Приведя дроби $a_m, \ldots, a_1, a_0$ к общему знаменателю t, запишем $P(x)$ в виде

$$\frac{1}{t}(b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0),$$

где числа $t, b_m, \ldots, b_0$ — целые. Возьмем x равным достаточно большому простому числу p. Тогда

$$P\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{b_m + pb_{m-1} + \ldots + p^m b_0}{t \cdot p^m}.$$

Если $p > |b_m|$, то числитель полученной дроби взаимно прост с p^m. С другой стороны, если хотя бы один из коэффициентов $b_{m-1}, \ldots, b_0$ отличен от нуля и p достаточно велико,

$$|b_m + pb_{m-1} + \ldots + p^m b_0| > |t|,$$

откуда числитель нашей дроби не может полностью сократится со знаменателем, и значит число $P(\frac{1}{p})$ не имеет вида $\frac{1}{k}$, что противоречит условию. Поэтому $b_{m-1} = \ldots = b_0 = 0$, и утверждение задачи доказано.

6. *Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)*

(А.В.Шаповалов)

У параллелепипеда есть две квадратные грани со стороной 1 м — назовем их малыми. За первые три минуты каждый муравей находит малую грань: он идет по ребру до конца, потом по другому — и тогда он знает, какие ребра образуют малую грань. Далее второй бегает по своей малой грани против часовой стрелки, а первый с начала 4-й по конец 5-й минуты обходит два ребра своей малой грани по часовой стрелке. Либо он встретит второго, либо затем за 2 минуты перейдет на другую малую грань, и там, идя снова по часовой стрелке, не позднее чем через 1,5 минуты встретит второго. Итого максимум будет потрачено 8,5 минут.

Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.

Базовый вариант, младшие классы.

1. Расположим коробки в ряд так, чтобы число карандашей в них возрастало слева направо. Заметим, что тогда в самой левой коробке минимум один карандаш, во второй слева — минимум два, …, в десятой слева — минимум 10 карандашей. Из самой левой коробки возьмём любой лежащий в ней карандаш. Поскольку во второй коробке лежат карандаши минимум двух разных цветов, там найдется карандаш не того цвета, что мы взяли из первой коробки. Возьмём его. В третьей коробке лежат карандаши минимум трёх разных цветов. Поэтому там найдётся карандаш, цвет которого отличается от цветов обоих уже выбранных. Возьмем его. Продолжая такую процедуру, мы выберем искомые 10 карандашей разных цветов.

2. Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. По условию ни одна из разностей не равна ни одному из 25 чисел, которые не превосходят 50. Поэтому вместе с ними разности дают 50 различных натуральных чисел, которые не превосходят 50, то есть это все числа от 1 до 50. Их сумма равна $51 \cdot 25$, а сумма всех исходных чисел равна, стало быть, $51 \cdot 25 + 50 \cdot 25 = 101 \cdot 25 = 2525$.

3. Пусть точки B_1, B_2, B_3 — середины дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 соответственно. Площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ равна сумме площадей четырёхугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, что нам и нужно.

4. Ответ: Может.

Решение. Возьмём сначала любые три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других, например, числа 1, 2 и 3. Их произведение равно 6 и не является 2008-й степенью натурального числа. Домножим каждое из чисел на 6^n, получим числа 6^n, $2 \cdot 6^n$, $3 \cdot 6^n$. По-прежнему, одно из чисел будет равно полусумме двух других, а произведение будет равно 6^{3n+1}. Осталось подобрать n так, чтобы $3n+1$ равнялось 2008 (или делилось на 2008). Поскольку 2007 делится на три, можно взять $3n + 1 = 2008$, то есть $n = 669$.

5. Изобразим беговую дорожку в виде левой половины некоторой окружности. Будем считать, что бегун, добегая до конца дорожки, не поворачивает обратно, а бежит дальше по правой половине этой окружности. Тогда все бегуны просто бегут по этой окружности. Условие того, что бегуны оказываются в одной точке исходной беговой дорожки, означает, что они находятся на прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности. Пусть через время t после начала забега бегуны встретились (находятся на соответствующей прямой). Тогда бегуны, находящиеся на левой половине, находятся на некотором расстоянии x от точки старта, и бегуны, находящиеся на правой половине, тоже находятся на расстоянии x от точки старта. При этом каждый бегун на левой половине пробежал некоторое целое число кругов и еще расстояние x, а каждый бегун на правой половине не добежал до некоторого целого числа кругов расстояние x. Где будут бегуны через время $2t$ от начала забега? Каждый бегун на левой половине пробежит некоторое целое число кругов и еще расстояние $2x$, а каждый бегун на правой половине не добежит до некоторого целого числа кругов расстояние $2x$. Но это как раз и означает, что они находятся на некоторой прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности (поскольку находятся на одинаковом расстоянии (вдоль окружности) от точки старта). Значит на исходной дорожке бегуны снова встретятся через время $2t$, и аналогично через время $3t$, и так далее.

Базовый вариант, старшие классы.

1. Расположим коробки в ряд так, чтобы число пирожных в них убывало слева направо. Теперь нарисуем на клетчатой бумаге «лесенку», где высота первого столбика (шириной в одну клетку) равна числу пирожных в первой слева коробке, высота второго стобика равна числу пирожных во второй слева коробке, и т.д. Лестница разделится на ступеньки. Первая (самая левая) ступенька будет состоять из самых высоких столбиков, вторая ступенька — из следующих по высоте столбиков, и так далее, последняя (самая правая) ступенька будет состоять из самых низких столбиков. Количество различных чисел в записях Алёши равно числу ступеней этой лесенки (самые полные коробки соответствуют самой высокой ступеньке, и так далее). Но этому же числу равно и количество различных чисел среди записанных Серёжей. В самом деле, можно считать, что выбирая по пирожному из каждой коробки, мы просто срезаем у нашей лесенки нижний слой квадратиков. Тогда заполнив подносы с наибольшим числом пирожных, мы срежем несколько слоев так, что пропадет целая ступенька (самая низкая), и число ступенек уменьшится на 1. Когда мы заполним подносы со следующим количеством пирожных (по величине), мы срежем еще одну ступеньку, и так далее.

2. Ответ: $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Решение. Возведём в квадрат равенство $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2+\cdots+x_n} = \sqrt{x_2}+\sqrt{x_3+\cdots+x_n+x_1}$, вычтем из обеих частей сумму $x_1+\cdots+x_n$ и снова возведём в квадрат. Получим $x_1(x_2+\cdots+x_n) = x_2(x_3+\cdots+x_n+x_1)$, откуда $(x_1-x_2)(x_3+\cdots+x_n) = 0$. Так как $x_1 - x_2 = 1$, получаем, что $x_3+\cdots+x_n = 0$. Поскольку из чисел $x_3, \ldots, x_n$ извлекается квадратный корень, то они неотрицательны, и раз их сумма равна 0, то каждое из них равно 0.

Пусть $x_2 \neq 0$, т.е. $x_2 - x_3 \neq 0$. Рассмотрев суммы с $\sqrt{x_2}$ и $\sqrt{x_3}$ и рассуждая как выше, получаем $x_1 = 0$. Тогда $x_2 = -1$, но существует $\sqrt{x_2}$ — противоречие. Значит, $x_2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, и тогда все условия выполнены.

3. Пусть точки B_1, B_2, …, B_{30} — середины дуг A_1A_2, A_2A_3, $\ldots A_{30}A_1$ соответственно. Площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ равна сумме площадей четырёхугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$, …, $OA_{30}B_{30}A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Заметим, что один из этих четырехугольников может оказаться невыпуклым (если центр окружности лежит снаружи исходного тридцатиугольника), но его площадь все равно вычисляется так же (проверьте). Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1\cdot A_1A_2+\frac{1}{2}OB_2\cdot A_2A_3+\cdots+\frac{1}{2}OB_{30}\cdot A_{30}A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = \cdots = OB_{30} = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{30}A_1$, что нам и нужно.

4. Ответ: Может.

Решение. Возьмём сначала любую прогрессию из пяти различных натуральных чисел, например, числа 1, 2, 3, 4, 5. Их произведение равно 120 и не является 2008-й степенью натурального числа. Домножим каждое из чисел на 120^n, получим числа 120^n, $2\cdot120^n$, $3\cdot120^n$, $4\cdot120^n$, $5\cdot120^n$. По-прежнему, числа будут образовывать арифметическую прогрессию, а их произведение будет равно 120^{5n+1}. Осталось подобрать n так, чтобы $5n+1$ делилось на 2008. Поскольку 5 и 2008 взаимно просты, это возможно. Ищем y такое, чтобы $5n+1 = 2008y$. Годится, например, $y = 2$, $n = 403$. Произведение будет тогда 2008-й степенью числа 120^2.

5. Можно считать, что наши прямоугольники нарисованы на бесконечной клетчатой плоскости. Разобьем мысленно плоскость на квадраты размером 2×2 клетки, и пронумеруем клетки каждого квадратика цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой стрелке, начиная с левого верхнего угла квадратика. Так как обе стороны каждого нашего прямоугольника нечетны, в углах любого прямоугольника будут стоять одинаковые цифры. Занумеруем тогда цифрами 1, 2, 3, 4 четыре различных цвета, и каждый прямоугольник выкрасим в цвет, номер которого стоит в углах этого прямоугольника. Нетрудно убедиться, что цифры в углах любых двух примыкающих друг к другу прямоугольников будут различны.

Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.

Сложный вариант, младшие классы.

1. Доска состоит из четырех угловых квадратов 50×50: левого верхнего, левого нижнего, правого верхнего и правого нижнего. Предположим, что в одном из угловых квадратов, скажем, в левом верхнем, нет ферзей. Пусть в правом нижнем квадрате всего x ферзей. В левом нижнем квадрате тогда находится не более $50-x$ ферзей (так как ферзи левого и правого нижних квадратов находятся в 50 строчках прямоугольника 50×100). Аналогично, в правом верхнем угловом квадрате находится не более $50-x$ ферзей. Общее количество ферзей на доске не превосходит тогда $x+50-x+50-x=100-x$. Но ферзей всего 100, а x неотрицательно — это возможно лишь при $x=0$. Значит, в правом нижнем квадрате ферзей тоже нет, то есть все ферзи находятся в левом нижнем и правом верхнем квадратах.

Рассмотрим у нашей доски клетчатую диагональ, соединяющую левую нижнюю и правую верхнюю клетки, а так же все диагонали, параллельные этой и пересекающие левый нижний и правый верхний квадраты. Их будет ровно 99, и все 100 ферзей находятся на этих диагоналях. Тогда какие-то два ферзя находятся на одной диагонали и значит бьют друг друга — противоречие.

2. Ответ: можно.

Пусть гири весят a, b, c, d грамм.

Первое решение.

Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири a, b, на другой — c, d;

2) на одной чаше гири a, c, на другой — b, d;

3) на одной чаше гири a, d, на другой — b, c;

4) одна чаша пустая, на другой — a, b, c, d.

Пусть $b=a+x$, $c=a+y$, $d=a+z$. Из первых трех взвешиваний (сложив результаты), мы знаем разность между $3a+(b+c+d)$ и $2(b+c+d)$, то есть $x+y+z$, либо точно, либо с ошибкой в 1. Из последнего взвешивания мы знаем $a+b+c+d=4a+(x+y+z)$ либо точно, либо с ошибкой в 1. Причем ошибка на 1 может быть только ровно в одном из этих случаев. Значит мы знаем разность $(x+y+z)$ и $4a+(x+y+z)$, то есть $4a$, с точностью до 1. Тогда легко найдем a из делимости на 4. Аналогично найдем b, c, d.

Второе решение.

Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири a, b, c, на другой — d;

2) на одной чаше гири a, b, d, на другой — c;

3) на одной чаше гири a, c, d, на другой — b;

4) на одной чаше гири b, c, d, на другой — a;

Из показаний весов мы получаем следующие числа (одно, возможно, с ошибкой):

$x=a+b+c-d$, $y=a+b-c+d$, $z=a-b+c+d$, $t=-a+b+c+d$.

Решаем эту систему: например, чтобы найти a, складываем три первых уравнения и вычитаем из результата четвертое, получаем: $4a=(x+y+z-t)$, откуда $a=(x+y+z-t)/4$. Аналогично находим b, c и d. Одно из чисел x, y, z, t мы знаем, возможно, с ошибкой в 1 грамм. Поэтому в выражениях для чисел a, b, c, d числители могут не делиться на 4. Но легко однозначно восстановить их истинные значения (добавляя или вычитая 1 так, чтобы числитель делился на 4). Откуда находим массы камней.

3. Ответ: 1/2.

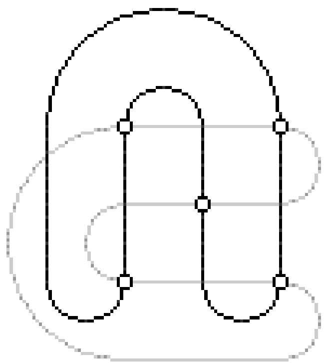
Немного переформулируем задачу. Продлим медиану AD на ее длину за точку D, получим точку D'. Тогда $CABD'$ — параллелограмм (так как диагонали этого четырехугольника делятся пополам их точкой пересечения), откуда угол DAB равен углу $DD'C$. Поскольку углы CAB и ACD' параллелограмма в сумме дают 180°, условие того, что угол CAB тупой, означает, что угол ACD' острый. В итоге имеем: Илья, зная только длину стороны AD' (она равна удвоенной длине AD), смог доказать, что в треугольнике CAD' углы при стороне CD' острые. При каком сотношении сторон AC и AD' это возможно?

Ясно, что если треугольник CAD' равнобедренный ($AC = AD' = 2AD$), то углы при основании острые (ведь они равны и их сумма меньше $180°$). Значит, ответ $AD/AC = 1/2$ подходит (и мы доказали для этого случая утверждение Ильи).

Если треугольник CAD' неравнобедренный ($AC \neq AD'$), то например возьмем большую из сторон AC и AD' за гипотенузу, а меньшую — за катет, и построим треугольник CAD', в котором один из углов ACD' или $AD'C$ будет прямым. Достроим теперь параллелограмм $CABD'$ и получим треугольник CAB, который вполне мог оказаться у Сережи, и в этом треугольнике один из углов DAB или CAB будет прямым. Значит Илья не смог бы доказать свое утверждение для $AD/AC \neq 1/2$.

4. Ответ: могут.

Пример изображен на рисунке:



5. *Первое решение.* Раскроем в произведении $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ скобки. Получим сумму $1+(a_1+\dots+a_n)+(a_1a_2+\dots+a_{n-1}a_n)+(a_1a_2a_3+\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n)+\dots+a_1a_2\dots a_n$. В первой скобке стоит просто сумма чисел $a_1, \dots, a_n$, слагаемые во второй скобке получаются так — выбираем пару чисел из $a_1, \dots, a_n$ и записываем их произведение, слагаемые в третьей скобке получаются так — выбираем тройку чисел из $a_1, \dots, a_n$ и записываем их произведение, и так далее. Ясно, что сумма чисел во второй скобке не превосходит $(a_1+\dots+a_n)^2$, сумма чисел в третьей скобке не превосходит $(a_1+\dots+a_n)^3$, и так далее. Значит, наше произведение не превосходит $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n} < 2$.

Второе решение. Докажем по индукции, что для всех k от 1 до n верно утверждение: $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) < 1+2(a_1+\dots+a_k)$.

Для $k=1$ утверждение очевидно ($1+a_1 < 1+2a_1$, так как a_1 положительно).

Сделаем шаг индукции.

Пусть для некоторого k, где $k<n$, верно $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) < 1+2(a_1+\dots+a_k)$. Домножим это неравенство на $(1+a_{k+1})$. Получим:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k+1}) < (1+2(a_1+\dots+a_k))(1+a_{k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant 1+2(a_1+\dots+a_k)+a_{k+1}(1+2\cdot\frac{1}{2}) = 1+2(a_1+\dots+a_{k+1}).$$

Утверждение доказано.

Взяв $k=n$, получим, что $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < 1+2(a_1+\dots+a_n) < 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2$, что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. На самом деле выполнено более точное неравенство. Можно доказать, что при постоянной сумме $a_1+\dots+a_n$ выражение $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ принимает наибольшее значение, когда числа $a_1, \dots, a_n$ равны. Значит

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leqslant \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Как известно из курса математического анализа, выражение под корнем не превосходит числа Эйлера $e = 2,71828..$, откуда $(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) < \sqrt{e} = 1,64...$

Кстати, неравенство $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \le 2$ равносильно неравенству $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \ge \frac{1}{2}$, которое сразу следует из неравенства Бернулли.

6. Обозначим точку пересечения CC_1 с $A'B'$ за C', середину AC — M_B, а середину BC— M_A. Заметим, что $CB'M_BC'$ — вписанный, так как $\angle CC'B' = \angle CM_BB'$. Аналогично вписанный $CA'M_AC'$. Поэтому углы $\angle CC'M_B$, $\angle CC'M_A$ равны по $90° + \varphi$. Проведем через вершины A и B прямые параллельные M_BC', M_AC' соответственно. Пусть они пересеклись в точке C''. Из подобия получим, что точка C'' лежит на прямой CC'. При этом CC' является бисcктрисой в треугольнике $AC''B$. По известному свойству, что биссектриса проходит через середину дуги описанной окружности, получаем, что $\angle AC_1B = 180° - 2(90° - \varphi) = 2\varphi$.

7.

а) Пусть b_n равно 1, если наибольший нечетный делитель числа n имеет остаток 1 при делении на 4, и -1 в противном случае. Тогда $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Разобьем последовательность чисел b_n на строчки таким образом, чтобы длина первой строчки равнялась 1, длина второй – 2, ..., длина k-ой – 2^{k-1}:

$b_1,$

$b_2, b_3,$

$b_4, b_5, b_6, b_7,$

$\dots,$

$b_{2^{k-1}}, \dots, b_{2^k-1},$

$\dots$

Первые пять строк выглядят так:

$1,$

$\mathbf{1}, -1,$

$\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

$\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

$\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, \mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

Заметим, что каждая строка, начиная с третьей, получается "втасовыванием" в предыдущую строку последовательности $1, -1, 1, -1, \dots$ такой же длины. (Для наглядности, числа, взятые из предыдущей строки, выделены жирным шрифтом.) Действительно, $b_{2m} = b_m$ для любого m; при этом $(k + 1)$-ая строка имеет вид:

$b_{2^k}, b_{2^k+1}, b_{2^k+2}, b_{2^k+3}, b_{2^k+4}, b_{2^k+5}, \dots$

что сводится к

$b_{2^{k-1}}, 1, b_{2^{k-1}+1}, -1, b_{2^{k-1}+2}, 1, \dots$

Мы воспользовались тем, что 2^k делится на 4 при $k > 1$.

Докажем, что сумма всех чисел в k-й строке равна нулю при $k > 1$. Воспользуемся индукцией по k. База индукции $b_2 + b_3 = 0$ очевидна.

Предположим, что сумма всех чисел в k-й строке равна нулю. Поскольку элементы $(k + 1)$-й строки — это элементы k-й строки плюс еще четное количество чередующихся 1 и -1, то и сумма всех чисел в $(k + 1)$-й строке равна нулю.

Отсюда легко следует (вновь по индукции), что $a_{2^k-1} = 1$ для любого $k > 0$, то есть число 1 встречается в последовательности (a_n) бесконечно много раз.

б) Докажем теперь, что при $k > 1$ у k-й строки есть начальный участок, сумма чисел в котором равна $k - 1$. Воспользуемся индукцией. База вновь очевидна.

Пусть длина начального участка с суммой $k - 1$ в k-й строке равна m_k. При четном m_k положим $m_{k+1} = 2m_k - 1$, а при нечетном m_k положим $m_{k+1} = 2m_k$. Рассмотрим первые m_{k+1} чисел в $(k+1)$-й строке Легко понять, что в любом случае начальный участок $(k+1)$-й строки длины m_{k+1} получается вставлением между числами начального участка k-й строки нечетного количества чередующихся 1 и -1. Поэтому сумма увеличивается на 1, что и требовалось.

По доказанному в пункте а), $a_{2^{k-1}-1} = 1$, что соответствует концу $(k-1)$-й строки. Поэтому $a_{2^{k-1}-1+m_k} = k$. Так как при увеличении n на единицу a_n изменяется (в ту или другую сторону) на единицу, мы видим, что a_n обязательно принимает все значения от 1 до k при n пробегающем натуральные числа от $2^{k-1}-1$ до $2^{k-1}-1+m_k$. Отсюда следует, что каждое натуральное число встречается в последовательности (a_n) бесконечно много раз.

Критерии проверки

Как всегда, «+» ставится за любое правильное решение, «$\pm$» за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, «$\mp$» — за неверное решение, однако с существенным продвижением, «$-$» за неверное решение. «0» ставится, если задача не записана. Оценки «+.» «$-$». (варианты «+» и «$-$») ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем «$\pm$» и «$\mp$». Оценка «+/2» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком «+!».

При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

Базовый вариант, младшие классы.

Задача 1.

$\mp$ Коробки располагаются по возрастанию числа карандашей в них и карандаши выбираются последовательно. Но нет ключевого утверждения, что в очередной коробке карандашей больше, чем выбрано из предыдущих коробок. Например, написано только, что в очередной коробке есть карандаши другого цвета, чем в предыдущей коробке.

Задача 2.

$\pm$ За ошибку в вычислениях, приведшую к неверному ответу, если после её исправления получается верное решение.

$\mp$ *и выше* есть идея разбить на пары чисел с разностью 50, из каждой пары взято ровно одно число

$-$. Только верный ответ 2525 или ответ и частные случаи выбора чисел

Задача 3.

$-$ За разбор только случая равностороннего треугольника

Задача 5.

$-$ Все встречи только в точке старта

$\mp$ Есть идея, что встреча повторится через тот же промежуток времени

Сложный вариант, младшие классы.

Задача 1.

$\pm$ Задача решена, но не доказано утверждение, что если в одном из угловых квадратов ферзей нет, то в двух соседних с ним (по стороне) угловых квадратах будет по 50 ферзей

$\mp$ Доказано только, что если в одном из угловых квадратов ферзей нет, то в двух соседних с ним (по стороне) угловых квадратах будет по 50 ферзей

Задача 2.

$\pm$ Только верный пример взвешиваний без доказательства

Задача 3.

$\pm$ Сказано, что если отношение больше 1/2, то один угол может быть острым, если меньше 1/2, то другой тупым, если 1/2, то всё получается. Во всех трёх случаях есть попытки доказательства шевелением третей вершины треугольника, но они нестрогие.

$+/2$ Только найдено верное отношение (с доказательством), или только доказано при таком отношении утверждение Ильи

$\mp$ Доказано неравенство в одну сторону (например, что AD/AC не превосходит $1/2$)

$\mp$ Доказана половина утверждения Ильи (например, что $\angle BAC$ острый) при отношении $1/2$.

$-$. Только ответ

Задача 4.

$-$. Доказано, что дороги одного цвета образуют несамопересекающийся цикл

$-$. Доказано, что каждая дорога должна пересекать дорогу другого цвета

Задача 5.

Оценка не снижается, если нет доказательства, что сумма конечной геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$ и начальным членом $1/2$ меньше 1.

$+$ Оценка не снижается, если ссылаются на неравенство Коши или если говорят, что максимум произведения достигается при равных.

$\pm$ Утверждается без доказательства, что задача сводится к случаю $a_1 = \dots = a_n$, без объяснения или неправильно и задача решается для этого случая

$\mp$ Задача сведена к случаю $a_1 = \dots = a_n$, дальнейшего продвижения нет

$\mp$ Есть идея, что при раскрытии скобок слагаемые группируются, и что сумма оценивается геометрической прогрессией, но это не доказано

$-$ Рассмотрен только случай $n = 2$

Задача 6.

$-$. Только ответ

Задача 7а).

$-$. Утверждается без доказательства, что если $a_n = 1$, то и $a_{2^n+1} = 1$

$-$. Утверждается без доказательства, что члены последовательности с номерами $2^n - 1$ равны 1

$\mp$ Сказано, что у нечетных чисел остатки от деления на 4 наибольшего нечетного делителя чередуются, а остатки от деления на 4 наибольшего нечетного делителя у четного числа и у его половины совпадают, больше ничего не сделано

$\pm$ То же, что и в предыдущем пункте, но говорится, что отсюда следует, что сумма остатков (по модулю 4) наибольших нечетных делителей нечетных чисел равна 0, для четных чисел проводится аналогичное рассуждение и утверждается без объяснений, что 1 встретится бесконечное число раз.

Задача 7б)

$\mp$ Для некоторого отрезка $[a_k, b_k]$, который строится удвоением предыдущего, школьник пытается доказать утверждение о том, что там есть число k, но для этого отрезка это неверно

Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.

Сложный вариант, старшие классы.

1. Ответ: 5/4.

Рассмотрим среди вертикальных линий 2-ю, 4-ю и 6-ю, и среди горизонтальных тоже 2-ю, 4-ю и 6-ю. Эти линии делят доску на 16 прямоугольников, каждый из которых разделен на 4 клетки, раскрашенные в шахматном порядке. Если в каждом таком прямоугольнике отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных не больше 5/4, то это же будет верно и для большого прямоугольника (в самом деле, если в i-ом прямоугольнике a_i — площадь белых клеток, а b_i — площадь черных, и $a_i \le (5/4)b_i$, то сложив все эти неравенства получим нужное неравенство для всей доски).

Рассмотрим теперь отдельный прямоугольник, разбитый на 4 клетки. Пусть длины его сторон — x (по горизонтали) и y (по вертикали). Ясно, что у одной из белых клеток длина горизонтальной стороны не меньше $x/2$. Пусть для определенности эта клетка верхняя левая. Горизонтальную прямую, разделяющий прямоугольник, можно тогда передвигать вниз до тех пор, пока отношение площади левой верхней клетки (белой) к левой нижней (черной) не станет равно 2. При этом условие задачи (о том, что площадь любой белой клетки меньше удвоенной площади любой черной клетки) по-прежнему будет выполнено, а суммарная площадь белых клеток только увеличится (или не изменится). Дальше прямую двигать нельзя (нарушится условие задачи). Аналогично, после этого можно двигать вправо вертикальную прямую (пока площадь верхней левой клети не станет в 2 раза больше площади верхней правой). Стороны верхней левой клетки будут тогда равны $2x/3$ и $2y/3$, и площадь белых клеток будет равна $4xy/9+xy/9 = 5xy/9$, а площадь черных будет равна $xy-5xy/9 = 4xy/9$. Получили, что отношение площади белых клеток к площади черных равно 5/4, и больше быть не может.

Осталось привести пример, когда в каждом из 16 прямоугольников нужное отношение равно 5/4. Разделим доску так, чтобы наши 16 прямоугольников были одинаковыми квадратами, в каждом из них левая верхняя клетка была квадратной, причем ее стороны в 2 раза длиннее сторон правой нижней клетки. Ясно, что так разделить доску можно, и получится искомый пример.

2. Ответ: не обязательно.

Приведем один из примеров, который нетрудно описать. Будем считать, что в пространстве заданы три направления: вверх-вниз, вправо-влево, вперед-назад. Сначала заполним все пространство кубиками обычным образом. Выберем теперь один из кубиков. К нему примыкают такие шесть бесконечных слоев толщиной в один кубик: два параллельных слоя соответственно слева и справа, направленные вверх-вниз, два других — спереди и сзади, направленные влево-вправо, и еще два — снизу и сверху, направленные вперед-назад. Сдвинем каждый слой вдоль его направления на половину длины ребра кубика (первые два сдвинем вверх, следующие два — влево, следующие два — вперед). Все пространство по-прежнему будет заполнено, но выбранный кубик ни с одним другим не будет граничить по целой грани.

3. Всегда может выигрывать второй игрок. Разберем два случая.

Пусть $N > 2$ нечетно.

Докажем, что второй может каждым своим очередным ходом объединять две наибольшие имеющиеся кучки.

Сначала первый обязательно сделает кучку из двух орехов, после чего второй сделает кучку из трех орехов, и ситуация после хода второго будет такая: в наибольшей куче нечетное число орехов, а в каждой из остальных кучек по одному ореху.

В такой ситуации у первого есть две возможности. Либо он сделает кучку из двух орехов — и тогда второй присоединит ее к наибольшей куче. Либо он увеличит наибольшую кучку на один камень — тогда в ней будет четное число орехов, и так как N нечетно, то останется еще хотя бы одна кучка из одного ореха, и второй сможет присоединить один орех к наибольшей кучке. В итоге снова получается описанная ситуация.

Мы видим, что у второго всегда есть ход. Кучи со временем кончатся, и первый проиграет.

Пусть $N > 2$ четно.

Заметим, что после хода любого игрока число куч уменьшается на одну. Пусть второй действует так же, как и в случае нечетного N, до тех пор, пока перед его ходом не останутся две или три кучи

В первом случае он просто объединяет оставшиеся кучи (это возможно, так как в наибольшей четное число орехов, а в другой — два или один).

Во втором случае, если в двух «маленьких» кучах по одному ореху, он просто объединяет «маленькие» кучи и оставляет первому две кучи с четным числом орехов — и тот проиграл; если в «малениких» кучах один и два ореха, то добавляет один орех в наибольшую кучу (и снова первый проиграл).

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$.

Так как четырехугольник A_1BCD вписан в окружность, имеем $BO \cdot OD = A_1O \cdot OC$ (из подобия треугольников BOA_1 и COD). Аналогично, $BO{\cdot}OD = AO{\cdot}OC_1$, $AO{\cdot}OC = BO{\cdot}OD_1$ и $AO \cdot OC = B_1O \cdot OD$.

Из первых двух равенств получаем, что $OC/AO = OC_1/A_1O$, из двух других получаем, что $BO/OD = B_1O/OD_1$.

Заметим, что условие параллельности сторон BC и AD трапеции $ABCD$ можно записать в виде $BO/OD = OC/AO$ (из подобия треугольников BOC и DOA).

Но тогда (из предыдущего) $BO_1/OD_1 = OC_1/A_1O$, то есть стороны B_1C_1 и A_1D_1 параллельны.

Аналогично проверяем, что непараллельность сторон AB и CD влечет непараллельность сторон A_1B_1 и C_1D_1.

Значит $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция, что и требовалось доказать.

5. Пусть b_n равно 1, если наибольший нечётный делитель числа n имеет остаток один при делении на 4, и равно -1 в другом случае. Тогда $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Докажем по индукции, что $a_{2^k-1} = 1$. База выполнена. Пусть $a_{2^k-1} = 1$. Заметим, что $b_m = b_{2^k+m}$ при $m < 2^k$ и $m \neq 2^{k-1}$. Действительно: если $m = a \cdot 2^l$, где a — нечётно, то $2^k + m = (2^{k-l} + a) \cdot 2^l$, где $l < k$, то есть $2^{k-l} + a$ — наибольший нечётный делитель числа $2^{k-1} + m$. А так как $m \neq 2^{k-1}$, то $k > l + 1$, то есть 2^{k-l} делится на 4.

При $k = l + 1$ имеем $m = 2^{k-1}$ и $m + 2^k = 3 \cdot 2^{k-1}$, то есть $b_{2^{k-1}} = 1$ и $b_{3 \cdot 2^{k-1}} = -1$.

Тогда по предположению индукции и по только что доказанному:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_{2^{k+1}-1} &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{2^k-1}) + b_{2^k} + (b_{2^k+1} + b_{2^k+2} + \dots + b_{2^{k+1}-1}) = \\ &= 2 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{2^k-1}) - 2 + b_{2^k} = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Докажем теперь по индукции, что на отрезке $1 \dots 2^k - 1$ последовательность a_n принимает значение k. Для первых двух отрезков утверждение верно. Пусть $a_x = n - 1$, где $x < 2^{n-1}$, докажем, что $a_{2^n+x} = n + 1$. Тогда по предположению индукции и по доказанному ранее

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_{2^n+x} &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{2^n-1}) + b_{2^n} + (b_{2^n+1} + b_{2^n+2} + \dots + b_{2^n+x}) = \\ &= 1 + 1 + (b_1 + b_2 + \dots + b_x) = n + 1. \end{aligned}$$

Заметим, что на отрезке $2^n - 1 \dots 2^n + x$ встречаются все числа от 1 до $n + 1$. Поэтому каждое число встречается бесконечно много раз.

Замечание: из решения следует, что $a_{2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\dots} = n + 1$.

6. Можно считать, что старший коэффициент $P(x)$ равен 1. Если бы степень многочлена $P(x)$ была четной, то при достаточно больших по модулю x выполнялось бы неравенство

$P(x) > 0$, и могло найтись лишь конечное число пар целых чисел m, n, для которых выполнено равенство $P(m) + P(n) = 0$. Значит, степень $P(x)$ нечетна (будем этим пользоваться в дальнейшем без напоминания).

Заметим теперь, что, начиная с некоторого x, $P(x)$ монотонно увеличивается при увеличении x и стремится к бесконечности при стремлении x к бесконечности. И аналогично, начиная с некоторого x, $P(x)$ монотонно уменьшается при уменьшении x и стремится к минус бесконечности при стремлении x к минус бесконечности.

Кроме того, для данного числа n может найтись лишь конечное число таких чисел m, что $P(m) = -P(n)$ (поскольку многочлен может принимать одно и то же конкретное значение лишь в конечном числе точек, не превышающем его степень).

Учитывая все вышесказанное, получаем, что для любого наперед заданного числа C есть пары чисел m, n, для которых $P(m)+P(n) = 0$, причем числа m и n разных знаков, и модуль каждого из них больше C.

Пусть степень $P(x)$ равна k, и $P(x) = x^k + ax^{k-1} + \dots$ (здесь и далее троеточием обозначены слагаемые меньших степеней). Легко подобрать такое число d, что многочлен $P(x-d)$ будет иметь вид $x^k+bx^{k-2}+\dots$, то есть коэффициент при степени $k-1$ будет нулевым. Действительно, $P(x - d) = (x - d)^k + a(x - d)^{k-1} + \dots = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + \dots$, и достаточно взять d равным a/k. Докажем, что точка $(d; 0)$ и является центром симметрии графика. Обозначим $P(x - d)$ за $Q(x)$. Достаточно доказать, что $Q(x) = -Q(-x)$ при любом x.

Итак, $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + \dots$, и нам известно, что уравнение $Q(m) + Q(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в таких числах m и n, что $m-d$ и $n-d$ — целые. Возьмем такие достаточно большие по модулю решения $m > 0$ и $n < 0$. Докажем, что $|m| = |n|$. Пусть $|m| < |n|$, например $n = -m - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(m) + Q(n) = Q(m) + Q(-m-1) &= \\ &= m^k + bm^{k-2} + \dots + (-m-1)^k + b(-m-1)^{k-2} + \dots = \\ &= -km^{k-1} + R(m), \end{aligned}$$

где $R(x)$ — некий фиксированный многочлен степени $k - 2$. Если m достаточно велико, то число km^{k-1} будет много больше, чем $|R(m)|$, и значит сумма $-km^{k-1} + R(m)$ будет меньше нуля. При увеличении модуля n сумма $Q(m) + Q(n)$ будет еще уменьшаться (так как будет уменьшаться $Q(n)$). Поэтому не может быть $|m| < |n|$ при достаточно больших по модулю m и n. Аналогично не может быть и $|m| > |n|$. Значит, есть бесконечно много чисел m таких, что $Q(m) + Q(-m) = 0$, то есть многочлен $Q(x) + Q(-x)$ имеет бесконечно много корней. Это возможно, только если этот многочлен нулевой, то есть выполнено тождество $Q(x) + Q(-x) = 0$, а это как раз и означает, что график многочлена $Q(x)$ симметричен относительно точки $(0; 0)$, и значит график $P(x)$ симметричен относительно точки $(d; 0)$.

7. а) Ответ: сможет.

Пусть при первых 29 попытках Витя отвечает так: в k-ой попытке отвечает «да» на k-ый вопрос и «нет» — на остальные вопросы. Заметим, что любые две попытки из первых 29-ти отличаются ровно в двух ответах. Поэтому количество верных ответов в любых двух этих попытках либо одинаково, либо отличается на 2. Если есть две попытки, скажем i-я и j-я, в которых число верных ответов различается на 2, мы сразу знаем верные ответы на i-й и j-й вопросы. Тогда, сравнивая например i-ю попытку с остальными попытками, узнаем верные ответы на все вопросы с первого по 29-й. Ответ на 30-й вопрос теперь легко узнать из первой попытки: посчитаем, сколько верных ответов было на первые 29 вопросов, и, сравнивая с сообщением о числе верных ответов при первой попытке, найдем ответ на 30-й вопрос.

Остается случай, когда количество верных ответов в любых двух попытках с первой по 29-ю одинаково. Это означает, что ответы на все вопросы с первого по 29-й одинаковы. Но тогда по сообщению о числе верных ответов в первой попытке мы поймем, это ответы «да», или ответы «нет»(в первом случае нам могут сказать, что верных ответов было 1 или 2, во втором случае — что верных ответов было 28 или 29). Затем узнаем ответ на 30-й вопрос (тоже из первой попытки).

Заметим, что этот метод работает, если общее число вопросов в тесте не меньше 5.

б) Разобьем вопросы теста на группы по 5 вопросов (с 1-го по 5-й, с 6-го по 10-й и т.д.) При первой попытке ответим «нет» на все вопросы.

Покажем теперь, как за 4 следующие попытки узнать все ответы на вопросы в первой группе. На вопросы с 6-го по 30-й отвечаем в этих попытках «нет», а в ответах на вопросы с 1-го по 5-й отвечаем так:
при 2-й попытке отвечаем «да» на все пять вопросов;
при 3-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 2-й вопросы (на остальные три — «да»);
при 4-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 3-й вопросы (на остальные три — «да»);
при 5-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 4-й вопросы (на остальные три — «да»).

Заметим, что из сообщений о числе верных ответов в 1-й и 2-й попытках мы знаем, например, сколько было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й в первой попытке.

Если при второй попытке на оба вопроса 1 и 2 мы ответили верно или на оба — неверно, то после третьей попытки мы знаем ответы на вопросы 1 и 2, после четвертой — на вопрос 3, после пятой — на вопрос 4, а значит на 5-й вопрос тоже знаем (так как знаем, сколько было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й при второй попытке). Аналогично с вопросами 1, 3 и 1, 4. Значит остается случай, когда среди ответов при второй попытке на вопросы 1, 2 ровно один верный, среди ответов на вопросы 1, 3 — ровно один верный, и среди ответов на вопросы 1, 4 — ровно один верный. То есть при второй попытке на вопросы 1, 2, 3 наши ответили были либо все верны, либо все неверны.

Но мы уже знаем, каких ответов на вопросы с 1-го по 5-й больше (когда мы отвечаем на их все «нет»): верных или неверных. Значит, мы знаем ответы на вопросы 2, 3, 4, а тогда и на вопрос 1, а значит и на 5-й вопрос.

Аналогично узнаем ответы на вопросы 2-й, 3-й, 4-й и 5-й группы (потратив на каждую 4 попытки). Тогда за $1 + 4 \cdot 5 = 21$ попытку знаем ответы на вопросы 1 — 25. Заметим, что ответы на вопросы последней группы можно узнать за 3 попытки, поскольку мы уже знаем, сколько верных ответов мы сделали на эти вопросы при самой первой попытке. Значит всего хватит 24 вопроса.

Критерии проверки.

Как всегда, «+» ставится за любое правильное решение, «+−» за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, «−+» — за неверное решение, однако с существенным продвижением, «−» за неверное решение. «0» ставится, если задача не записана. Оценки «+.», «−.» (варианты «+» и «−») ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем «+−» и «−+». Оценка «+/2» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком «+!» . При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

Базовый вариант.

Задача 2.

+− Найдены $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ и доказано, что сумма $x_3 + \cdots + x_n = 0$, но ответа нет (решение не закончено)

−+ Доказательство того, что $x_3 + \cdots + x_n = 0$, без дальнейшего продвижения

$-+$ Найдены $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, но дальнейшего продвижения нет (нет идеи, что сумма $x_3 + \dots + x_n = 0$)

Задача 3.

Разбор только случая правильного 30-угольника оценивается не выше, чем $-+$

$+$. Если проведенное рассуждение годится только для случая, когда центр окружности лежит внутри 30-угольника

$-$. Есть нереализованная идея сделать численно равными длину A_1A_2 и площадь OA_1BA_2

Задача 5.

$-$ За раскраски только отдельных конкретных картинок или раскраски небольшой части соседних прямоугольников (локальная конструкция)

Сложный вариант

Задача 1.

$+$. верно разобран случай прямоугольника 2×2 клетки, есть пример для доски 8×8, и утверждается, что если в каждом из 16 прямоугольников 2×2 клетки отношение не больше $5/4$, то и во всем прямоугольнике тоже (доказательство не приводится из-за его очевидности)

$+-$ верно разобран случай прямоугольника 2×2 клетки, есть пример для доски 8×8, но доказательство утверждения, что если в каждом из 16 прямоугольников 2×2 клетки отношение не больше $5/4$, то и во всем прямоугольнике тоже, доказано неверно

$+-$ есть оценка, но нет примера

$-+$ только верно разобран случай прямоугольника 2×2

Задача 2.

$+-$ верный пример без достаточных пояснений (например, не показано, как картинка продолжается на все пространство)

Задача 3.

$+-$ верно разобран только четный случай

$-+$ верно разобран только нечетный случай

Задача 5.

$-+$ за доказательство того, что $a_{2^n-1} = 1$

Задача 7а).

$+-$ верный алгоритм без пояснений.

$+-$ небольшие погрешности в алгоритме (например, устранимая ошибка в разборе какого-нибудь подслучая)

Задача 7б).

$+-$ небольшие погрешности в алгоритме (в этом случае за 7а)б) ставилось $+ +-$)

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2008**

1 [**3**] Each of ten boxes contains a different number of pencils. No two pencils in the same box are of the same colour. Prove that one can choose one pencil from each box so that no two are of the same colour.

2 [**3**] Twenty-five of the numbers 1, 2, ..., 50 are chosen. Twenty-five of the numbers 51, 52, ..., 100 are also chosen. No two chosen numbers differ by 0 or 50. Find the sum of all 50 chosen numbers.

3 [4] Acute triangle $A_1A_2A_3$ is inscribed in a circle of radius 2. Prove that one can choose points B_1, B_2, B_3 on the arcs A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 respectively, such that the numerical value of the area of the hexagon $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ is equal to the numerical value of the perimeter of the triangle $A_1A_2A_3$.

4 [4] Given three distinct positive integers such that one of them is the average of the two others. Can the product of these three integers be the perfect 2008th power of a positive integer?

5 [4] On a straight track are several runners, each running at a different constant speed. They start at one end of the track at the same time. When a runner reaches any end of the track, he immediately turns around and runs back with the same speed (then he reaches the other end and turns back again, and so on). Some time after the start, all runners meet at the same point. Prove that this will happen again.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2008.**

1. Arrange the boxes in a line so that the number of pencils in them increases from left to right. Then the first box from the left contains at least one pencil, the next one contains at least two pencils, ..., the tenth box from the left contains at least 10 pencils. Take any pencil from the first box. Since the second box contains pencils of at least two different colors, some of these pencils has color distinct from that of the chosen pencil. Take it. The third box contains pencils of at least three colors. Hence some of these pencils has color distinct from the colors of both chosen pencils. Take it. Proceeding in the same manner, we choose the required 10 pencils of different colors.

2. Subtract 50 from each given number exceeding 50. By the conditions of the problem, each of the resulting differences is distinct from any of 25 given numbers not exceeding 50. So these numbers and the differences form a set of 50 distinct positive integers not exceeding 50. Thus it contains all positive integers from 1 to 50. Their sum equals $51 \cdot 25$, hence the sum of the given numbers equals $51 \cdot 25 + 50 \cdot 25 = 101 \cdot 25 = 2525$.

3. Let B_1, B_2, B_3 be the midpoints of arcs A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, respectively. The area of hexagon $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ is the sum of the areas of quadrilaterals $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$, and $OA_3B_3A_1$. But each of these quadrilaterals has perpendicular diagonals, hence the area of each quadrilateral is the half-product of its diagonals. Therefore, the required sum is equal to $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1$. Since $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$ by the conditions of the problem, this sum is numerically equal to $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, as required.

4. Answer. Yes, it can.

   Solution. First take any three distinct positive integers such that one of them is equal to the half-sum of the remaining two; for instance, 1, 2, and 3. Their product equals 6 and so is not 2008th power of a positive integer. Multiply each of these numbers by 6^n to obtain 6^n, $2\cdot 6^n$, $3\cdot 6^n$. As before, one of the numbers is the half-sum of two others, and now their product equals 6^{3n+1}. It remains to choose n so that $3n+1$ equals 2008 (or is divisible by 2008). Since 2007 is divisible by 3, we can take $3n+1 = 2008$, that is, $n = 669$.

5. Represent the running track as the left half of a circle. We may assume that a runner at the end of the running track does not turn back but continues to run along the right half of the same circle. Thus all runners are always running along this circle. The condition that they are at the same point of the initial running track means that they are on a line perpendicular to the diameter separating the left and right halves of the circle. Suppose all runners meet (are on the corresponding line) in time t after start. Then all runners in the left and in the right halves are at the same distance x from the starting point. Each runner in the left half has covered some integer number of circles plus distance x, and each runner in the right half has to run distance x to cover some integer number of circles. Where will the runners be in time $2t$ after start? Each runner in the left half will cover some integer number of circles plus distance $2x$, and each runner in the right half will have to run distance $2x$ to cover some integer number of circles. But this means that they again will be on a line perpendicular to the diameter separating the left and right halves of the circle, because they are at the same distance (along the circle) from the starting point. Hence, on the initial running track, the runners will meet again in time $2t$, similarly in time $3t$, and so on.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2008**

1 [3] Alex distributes some cookies into several boxes and records the number of cookies in each box. If the same number appears more than once, it is recorded only once. Serge takes one cookie from each box and puts them on the first plate. Then he takes one cookie from each box that is still non-empty and puts the cookies on the second plate. He continues until all the boxes are empty. Then Serge records the number of cookies on each plate. Again, if the same number appears more than once, it is recorded only once. Prove that Alex's record contains the same number of numbers as Serge's record.

2 [3] Solve the system of equations ($n > 2$)

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1} = \cdots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \cdots + x_{n-1}};$$
$$x_1 - x_2 = 1.$$

3 [4] A 30-gon $A_1A_2\ldots A_{30}$ is inscribed in a circle of radius 2. Prove that one can choose a point B_k on the arc A_kA_{k+1} for $1 \le k \le 29$ and a point B_{30} on the arc $A_{30}A_1$, such that the numerical value of the area of the 60-gon $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ is equal to the numerical value of the perimeter of the original 30-gon.

4 [4] Five distinct positive integers form an arithmetic progression. Can their product be equal to a^{2008} for some positive integer a?

5 [4] On the infinite chessboard several rectangular pieces are placed whose sides run along the grid lines. Each two have no squares in common, and each consists of an odd number of squares. Prove that these pieces can be painted in four colours such that two pieces painted in the same colour do not share any boundary points.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2008.**

1. Arrange the boxes in a line so that the number of cookies in them decreases from left to right. On a sheet of squared paper, draw a "staircase" in which the height of the first column (square side in width) equals the number of cookies in the first box from the left, the height of the second column equals the number of cookies in the second box, and so on. Then the staircase divides into "footsteps": the first footstep (from the left) consists of the highest columns, the second footstep consists of the columns next to the highest, and so on. The last footstep (to the right) consists of the lowest columns. The number of different integers in Alex's records is equal to the number of footsteps of this staircase (the boxes with the maximal number of cookies correspond to the highest footstep, and so on). But this number is equal to the number of different integers in Serge's records. Indeed, choosing a cooky in each box may be described as cutting off the bottom row of cells in our staircase. Therefore, when we fill up the plates with the maximal number of cookies, several rows will be removed so that the lowest footstep will disappear, and thus the number of footsteps will decrease by 1. By filling up the plates with the next to maximal number of cookies, we remove the next footstep, and so on. Hence the number of footsteps equals the number of different integers in Serge's records as required.

2. Answer: $x_1 = 1, x_2 = \ldots = x_n = 0$.

   Solution. Let us square the equality $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \ldots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \ldots + x_n + x_1}$, subtract the sum $x_1 + \ldots + x_n$ from both sides, and square again. We obtain $x_1(x_2 + \ldots + x_n) = x_2(x_3 + \ldots + x_n + x_1)$, hence $(x_1 - x_2)(x_3 + \ldots + x_n) = 0$. Since $x_1 - x_2 = 1$, we have $x_3 + \ldots + x_n = 0$. Since our equations contain square roots of $x_3, \ldots, x_n$, these numbers are nonnegative, and since their sum is 0, each of them is 0.

   Suppose $x_2 \neq 0$, that is, $x_2 - x_3 \neq 0$. Considering the sums which contain $\sqrt{x_2}$ and $\sqrt{x_3}$ and arguing as above, we get $x_1 = 0$. Then

$x_2 = -1$, but since there exists $\sqrt{x_2}$, we obtain a contradiction. Thus $x_2 = 0$, hence $x_1 = 1$, and then all conditions are satisfied.

3. Let B_1, B_2, $\ldots$, B_{30} be the midpoints of arcs A_1A_2, A_2A_3, $\ldots A_{30}A_1$ respectively. The area of 60-gon $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{30}B_{30}$ is the sum of the areas of quadrilaterals $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$, $\ldots$, $OA_{30}B_{30}A_1$. But each of these quadrilaterals has perpendicular diagonals, hence the area of each quadrilateral is the half-product of its diagonals. Observe that one of these quadrilaterals can be non-convex (if the center of the circle lies outside the given 30-gon) but its area is calculated in the same way (verify this!). The required sum is then equal to $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \ldots + \frac{1}{2}OB_{30} \cdot A_{30}A_1$. Since $OB_1 = OB_2 = \ldots = OB_{30} = 2$ by the conditions of the problem, this sum is numerically equal to $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{30}A_1$, as required.

4. Answer: Yes, it can.

   Solution. First take any arithmetic progression of five distinct positive integers, for instance, 1, 2, 3, 4, 5. Their product equals 120 and so is not 2008th power of a positive integer. Multiply each of these numbers by 120^n to obtain 120^n, $2 \cdot 120^n$, $3 \cdot 120^n$, $4 \cdot 120^n$ and $5 \cdot 120^n$. As before, the numbers form an arithmetic progression, and now their product equals 120^{5n+1}. It remains to choose n so that $5n+1$ is divisible by 2008. This is possible, since 5 and 2008 are coprime. We need a y such that $5n+1 = 2008y$. For instance, $y = 2$ and $n = 803$ fit. Then the product is 2008th power of 120^2.

5. We may assume that our rectangles are drawn on an infinite sheet of squared paper. Divide it into squares 2×2 and mark the cells in each square by 1, 2, 3, 4 clockwise starting from the upper left corner. Since both sides of each rectangle are of odd length, its corner cells are marked by the same number. Let us number four different colors by 1, 2, 3, 4 and paint each rectangle with the color whose number marks the corner cells. It is readily seen that the numbers in the corners of any two adjacent rectangles are distinct.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2008.**

1. On a 100×100 chessboard, 100 Queens are placed so that no two attack each other. Prove that if the board is divided into four 50×50 subboards, then there is at least one Queen in each subboard.

2. Each of four stones weighs an integral number of grams. Available for use is a balance which shows the difference of the weights between the objects in the left pan and those in the right pan. Is it possible to determine the weight of each stone by using this balance four times, if it may make a mistake of 1 gram either way in at most one weighing?

3. Serge has drawn triangle ABC and one of its medians AD. When informed of the ratio $\frac{AD}{AC}$, Elias is able to prove that $\angle CAB$ is obtuse and $\angle BAD$ is acute. Determine the ratio $\frac{AD}{AC}$ and justify your result.

4. Baron Münchausen asserts that he has a map of Oz showing five towns and ten roads, each road connecting exactly two cities. A road may intersect at most one other road once. The four roads connected to each town are alternately red and yellow. Can this assertion be true?

5. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive numbers such that $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le \frac{1}{2}$. Prove that $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) < 2$.

6. ABC is a non-isosceles triangle. E and F are points outside triangle ABC such that $\angle ECA = \angle EAC = \angle FAB = \angle FBA = \theta$. The line through A perpendicular to EF intersects the perpendicular bisector of BC at D. Determine $\angle BDC$.

7. In the infinite sequence $\{a_n\}$, $a_0 = 0$. For $n \ge 1$, if the greatest odd divisor of n is congruent modulo 4 to 1, then $a_n = a_{n-1} + 1$, but if the greatest odd divisor of n is congruent modulo 4 to 3, then $a_n = a_{n-1} - 1$. The initial terms are 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2 and 1.
   (a) Prove that the number 1 appears infinitely many times in this sequence.
   (b) Prove that every positive integer appears infinitely many times in this sequence.

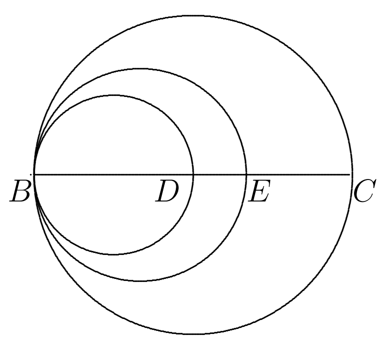
Note: The problems are worth 4, 6, 6, 6, 8, 9 and 5+5 points respectively.

Solution to Junior A-Level Fall 2008[1]

1. Clearly, the western half of the board has 50 Queens, as does the northern half of the board. Assume by symmetry that the northwestern quadrant is empty. Then 50 Queens must be in the southwestern quadrant and another 50 in the northeastern quadrant. Hence the southeastern quadrant is also empty. However, the squares in the southwestern and the northeastern quadrants all lie on 99 diagonals going between the southwest and the northeast. By the Pigeonhole Principle, two of the Queens will be on squares of the same diagonal, and hence attack each other. This is a contradiction. Hence no quadrants may be empty.

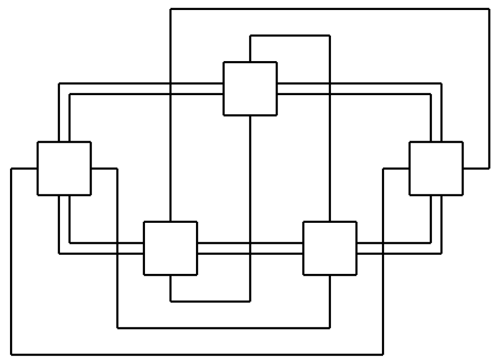
2. Label the coins A, B, C and D, with respective weights a, b, c and d. In the four weighings, weigh B, C and D, A and B against C and D, A and C against B and D, and A and D against B and C. Let the results be $b+c+d=w$, $a+b-c-d=x$, $a-b+c-d=y$ and $a-b-c+d=z$. For now, assume that no mistakes are possible. We have $w+x+y+z=3a$ so that $a=\frac{w+x+y+z}{3}$. Since $y+z=2a-2b$, we have $b=\frac{2a-(y+z)}{2}$. Similarly, $c=\frac{2a-(z+x)}{2}$ and $d=\frac{2a-(x+y)}{2}$. Suppose now a mistake of 1 gram is possible. If $w+x+y+z$ is a multiple of 3, no mistakes have been made. If it is one more or one less, we know the direction of the mistake. In any case, we can round the total to the nearest multiple of 3 and use it to determine a. Now each of $a-w$, x, y and z has the same parity as $a+b+c+d$, and hence as one another. Whichever has the opposite parity to the other three is where the mistake has been made.

3. Note that $\angle CAB$ is obtuse if and only if A lies inside the circle with diameter BC, and $\angle BAD$ is acute if and only if A lies outside the circle with diameter BD. If $\frac{AD}{AC}$ is constant, A lies on a circle of Apollonius of C and D, with a diameter on the line CD. The only such circle which lies between the circles with diameters BC and BD must also have B as one end of the diameter on CD. Since $\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2}$, the other end of this diameter must be the point E between C and D such that $\frac{ED}{EC}=\frac{1}{2}$. It follows that the ratio Serge gives Elias must be $\frac{1}{2}$. Since ABC is a triangle, A does not lie on BC. Then $\angle CAB$ is obtuse since A lies inside the circle with diameter BC, and $\angle BAD$ is acute since A lies outside the circle with diameter BD.



[1]Courtesy of Andy Liu.

4. **Solution by Sasha Kitaygorodsky.**
The Baron may have the following map. The double lines indicate the yellow brick road while the single lines indicate the red side-streets.



5. **Solution by Mariya Sardarli.**
By the Arithmetic-Geometric Means Inequality, we have

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \le \left(\frac{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n.$$

By the Binomial Theorem,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \\ &< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{m!} \\ &\le \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \\ &= 3-\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Hence $(1+\frac{1}{2n})^n = \sqrt{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} < \sqrt{3} < 2$.

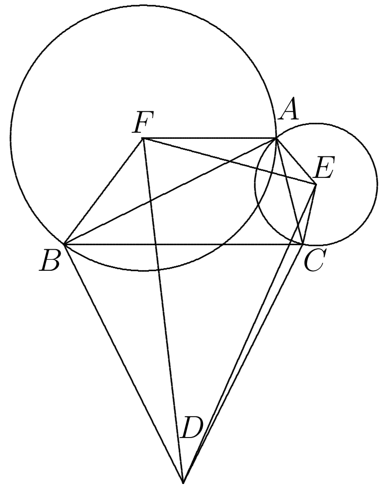
6. Let D be the point outside triangle ABC such that $DB = DC$ and $\angle BDC = 2\theta$. Draw the circles through A with respective centres E and F. The powers of the point D with respect to these circles are $DE^2 - CE^2$ and $DF^2 - BF^2$. We claim that they are equal, so that D lies on the common chord of these circles, which passes through A and is perpendicular to the line EF of centres. By the Cosine Law,

$$DE^2 - CE^2 = DC^2 - 2DC\cdot CE\cos DCE = DC^2 + 2DC\cdot CE\sin BCA$$

since $\angle DCB + \angle ACE = 90^\circ$. Similarly,

$$DF^2 - BF^2 = DB^2 - 2DB\cdot BF\cos DBF = DB^2 + 2DB\cdot BF\sin ABC.$$

Since triangles ACE and ABF are similar, $\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$. By the Sine Law, $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin BCA}{\sin ABC}$. Hence $CE\sin BCA = BF\sin ABC$. Since $DC = DB$, we indeed have $DE^2 - CE^2 = DF^2 - BF^2$ and the claim is justified. Since the position of D is uniquely determined, $\angle BDC = 2\theta$.



7. **Solution by Mariya Sardarli.**

(a) We will prove by induction on m that $a_n = 1$ whenever $n = 2^m - 1$. It is easy to verify that $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 2$ and $a_7 = 1$. Suppose that the result holds for some $m \geq 3$. For $1 \leq k \leq 2^m - 1$, $k \neq 2^{m-1}$, let $k = 2^s g$ where g is odd and $s \leq m-2$. Then $2^m + k = 2^s(2^{m-s} + g)$ and $2^{m-s} + g \equiv g \pmod 4$ since $m - s \geq 2$. On the other hand, the greatest odd divisor of 2^{m-1} is 1 while that of $2^m + 2^{m-1} = 2^{m-1}3$ is 3. Hence $a_{2^{m+1}-1} - a_{2^m}$ is 2 less than $a_{2^m-1} - a_0$. By the induction hypothesis, $a_{2^m-1} = 1$. Since the greastest odd divisor of 2^m is 1, $a_{2^m} = 2$. It follows that $a_{2^{m+1}-1} = 2 + 1 - 0 - 2 = 1$.

(b) We claim that if a value h appears in the sequence, then the value $h+2$ also appears in the sequence. Since 1 and 2 appear in the sequence, every positive integer appears in the sequence. Let $a_k = h$ for some k and let m be such that $k < 2^m$. By the argument in (a), $a_k - a_0 = a_{2^{m+1}+k} - a_{2^{m+1}}$, so that $a_{2^{m+1}+k} = h + 2$. Thus the claim is justified and the sequence is unbounded. Suppose there is a value h which appears only a finite number of times. Every time the sequence hits a new high, it has to return to 1 at some point by the result in (a). After the last appearance of h, the sequence either cannot return to 1 or cannot get to a new high. This is a contradiction.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2008.**

1. A standard 8×8 chessboard is modified by varying the distances between parallel grid lines, so that the cells are rectangles which are not necessarily squares, and do not necessarily have constant area. The ratio between the area of any white cell and the area of any black cell is at most 2. Determine the maximum possible ratio of the total area of the white cells to the total area of the black cells.

2. Space is dissected into non-overlapping unit cubes. Is it necessarily true that for each of these cubes, there exists another one sharing a common face with it?

3. A two-player game has $n > 2$ piles each initially consisting of a single nut. The players take turns choosing two piles containing numbers of nuts relatively prime to each other, and merging the two piles into one. The player who cannot make a move loses the game. For each n, determine the player with a winning strategy, regardless of how the opponent may respond.

4. In the quadrilateral $ABCD$, AD is parallel to BC but $AB \neq CD$. The diagonal AC meets the circumcircle of triangle BCD again at A' and the circumcircle of triangle BAD again at C'. The diagonal BD meets the circumcircle of triangle ABC again at D' and the circumcircle of triangle ADC again at B'. Prove that the quadrilateral $A'B'C'D'$ also has a pair of parallel sides.

5. In the infinite sequence $\{a_n\}$, $a_0 = 0$. For $n \geq 1$, if the greatest odd divisor of n is congruent modulo 4 to 1, then $a_n = a_{n-1} + 1$, but if the greatest odd divisor of n is congruent modulo 4 to 3, then $a_n = a_{n-1} - 1$. The initial terms are 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2 and 1. Prove that every positive integer appears infinitely many times in this sequence.

6. $P(x)$ is a polynomial with real coefficients such that there exist infinitely many pairs (m, n) of integers satisfying $P(m)+P(n) = 0$. Prove that the graph $y = P(x)$ has a centre of symmetry.

7. A contest consists of 30 true or false questions. Victor knows nothing about the subject matter. He may write the contest several times, with exactly the same questions, and is told the number of questions he has answered correctly each time. How can he be sure that he will answer all 30 questions correctly

   (a) on his 30th attempt;

   (b) on his 25th attempt?

Note: The problems are worth 4, 6, 6, 6, 8, 9 and 5+5 points respectively.

Solution to Senior A-Level Fall 2008[1]

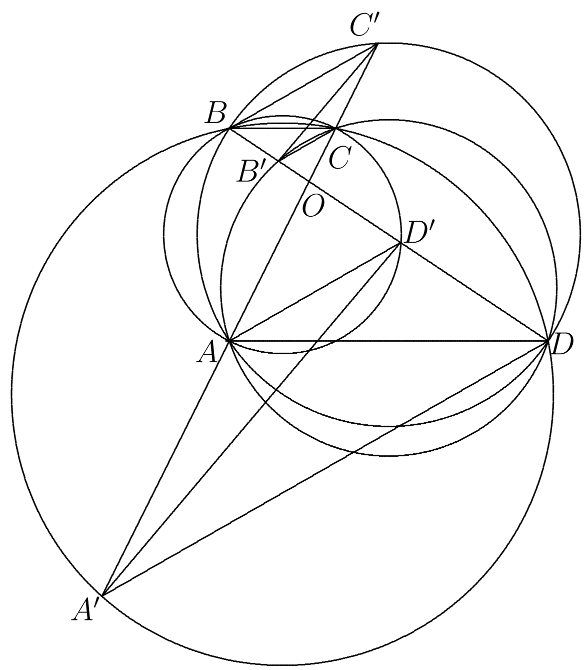
1. We may have rows and columns of alternating widths $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$. Let the white cells remain squares while the black cells become non-squares. Then the area of each white cell is either $\frac{1}{9}$ or $\frac{4}{9}$ while the area of each black cell is $\frac{2}{9}$. Thus the ratio between the area of any white cell and the area of any black cell is at most 2. The total area of the white cells is $16(\frac{1}{9}+\frac{4}{9})=\frac{80}{9}$ while the total area of the black cells is $32(\frac{2}{9})=\frac{64}{9}$. Here, the ratio of the total area of the white cells to the total area of the black cells is $\frac{80}{9}:\frac{64}{9}=5:4$. To show that this is the maximum possible, divide the modified chessboard into 16 subboards each consisting of four cells in a 2×2 configuration. Let the dimensions of one of the subboards be $a\times b$. Let the vertical grid line divide it into two rectangles of widths x and $a-x$, and we may assume that $x>\frac{a}{2}$. Let the horizontal grid line divide the subboard into two rectangles of heights y and $b-y$, and we may assume that $y>\frac{b}{2}$. The condition that the ratio between the area of any white cell and the area of any black cell is at most 2 applies here also, and this is satisfied if and only if $x\le\frac{2a}{3}$ and $y\le\frac{2b}{3}$. Let the white cells be $x\times y$ and $(a-x)(b-y)$. Their total area is $T=2xy+ab-bx-ay=x(2y-b)+a(b-y)$. Since $2y>b$, T increases as x increases to its maximum value of $\frac{2a}{3}$. Similarly, $T=y(2x-a)+b(a-x)$ increases as y increases to its maximum value of $\frac{2b}{3}$. Hence $T\le\frac{8ab}{9}+ab-2\frac{2ab}{3}=\frac{5ab}{9}$. It follows the ratio of the total area of the white cells to the total area of the black cells is at most 5:4. Since this is true in each of the 16 subboards, it is true on the entire board.

2. It is not necessarily true. We tile space in the standard way with unit cubes. Choose one of them and call it C. There are two cubes sharing the front and back faces of C. They belong to two infinite columns of cubes parallel to the x-axis. There are two cubes sharing the top and bottom faces of C. They belong to two infinite columns of cubes parallel to the y-axis. There are two cubes sharing the left and right faces of C. They belong to two infinite columns of cubes parallel to the z-axis. These six columns do not intersect. Now we shift all the cubes in each column by half a unit. Then C does not share a complete face with any other cube.

3. Call a pile *even* if it has an even number of nuts. If it has an odd number of nuts, call it *small* if it has only one, and *big* otherwise. We first consider the case when n is odd. The first player is forced to form an even pile with two nuts on the first move, and the second player merges it with a small pile into a big pile. The second player's strategy is to always leave one big pile and an even number of small piles for the first player. In each move, the first player is forced to form an even pile, and it will be the only even pile at the time. If this merger involves the big pile, the second player merges the even pile with a small pile. If this merger does not involve the big pile, then the even pile has two nuts, and 2 is relatively prime to any odd number, in particular, the number of nuts in the big pile. Thus the second player can merge the big pile with the even pile. It follows that the second player always has a move, and hence wins the game. We now consider the case where n is even. the second player uses exactly the same strategy until the game is down to one big pile and three small piles (or four small piles at the beginning of the game for $n=4$). After the first player creates once again an even pile, the second player merges the other two piles into a second even pile. Now the first player has no move, and the second player wins.

[1]Courtesy of Andy Liu.

4. We have $\angle CAD' = \angle CBD' = \angle CA'D$ and $\angle ACB' = \angle ADB' = \angle AC'B$ from the cyclic quadrilaterals. Since AD is parallel to BC, all six angles are equal. Hence BC', $B'C, AD'$ and $A'D$ are all parallel. Let O be the point of intersection of AC and BD. From similar triangles, we have $\frac{OB'}{OC} = \frac{OD'}{OA}$, $\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OD}$ and $\frac{OB}{OC'} = \frac{OD}{OA'}$. Multiplication yields $\frac{OB'}{OC'} = \frac{OD'}{OA'}$, so that triangles $OB'C'$ and $OD'A'$ are similar. It follows that $A'D'$ is parallel to $B'C'$.



5. **Solution by Mariya Sardarli.**
We first prove by induction on m that $a_n = 1$ whenever $n = 2^m - 1$. It is easy to verify that $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = 2$ and $a_7 = 1$. Suppose that the result holds for some $m \geq 3$. For $1 \leq k \leq 2^m - 1, k \neq 2^{m-1}$, let $k = 2^s g$ where g is odd and $s \leq m - 2$. Then $2^m + k = 2^s(2^{m-s} + g)$ and $2^{m-s} + g \equiv g \pmod 4$ since $m - s \geq 2$. On the other hand, the greatest odd divisor of 2^{m-1} is 1 while that of $2^m + 2^{m-1} = 2^{m-1}3$ is 3. Hence $a_{2^{m+1}-1} - a_{2^m}$ is 2 less than $a_{2^m-1} - a_0$. By the induction hypothesis, $a_{2^m-1} = 1$. Since the greastest odd divisor of 2^m is 1, $a_{2^m} = 2$. It follows that $a_{2^{m+1}-1} = 2 + 1 - 0 - 2 = 1$. We claim that if a value h appears in the sequence, then the value $h + 2$ also appears in the sequence. Since 1 and 2 appear in the sequence, every positive integer appears in the sequence. Let $a_k = h$ for some k and let m be such that $k < 2^m$. As before, $a_k - a_0 = a_{2^{m+1}+k} - a_{2^{m+1}}$, so that $a_{2^{m+1}+k} = h + 2$. Thus the claim is justified and the sequence is unbounded. Suppose there is a value h which appears only a finite number of times. Every time the sequence hits a new high, it has to return to 1 at some point. After the last appearance of h, the sequence either cannot return to 1 or cannot get to a new high. This is a contradiction.

6. **Solution by Olga Ivrii.**
Let $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$. We may assume that $a_0 > 0$. Suppose m and n are of the same sign, say positive. Note that $P(x) > 0$ whenever $x > \alpha$ for some positive number α. In order for $P(m) + P(n) = 0$ to hold, we must have $P(m) \leq 0$ or $P(n) \leq 0$. By symmetry, we may assume the former is the case. Then $m < \alpha$, so that we have finitely many values of m. For each of these values of m, we have finitely many values of n for which $P(n) = -P(m)$. This contradicts the condition that there exist infinitely many pairs (m, n) of integers satisfying $P(m) + P(n) = 0$. It follows that m and n must have opposite signs. If k is even, then $P(x) > 0$ whenever $|x| > \alpha$ for some positive number α, and we have the same contradiction as before. It follows that k must be odd.

For odd k, $m^k+n^k = (m+n)Q_1(m, n)$, where $Q_1(m, n) = m^{k-1} - m^{k-2}n + \cdots - mn^{k-2} + n^{k-1}$. Note, that if $mn < 0$ then $Q_1(m, n) \geq m^{k-1} + n^{k-1}$.

Therefore, $0 = P(m) + P(n) = (m + n)Q_1(m, n) + Q_2(m, n)$ implies

$|m + n| = |Q_2(m, n)/Q_1(m, n)| < \beta$. ($Q_2(m, n)$ is polynomial of degree at most $k - 1$)

In case $mn > 0$, $P(m) + P(n) = 0$ implies that both $|m| < \beta$, $|n| < \beta$.

Since there exist infinitely many pairs (m, n) of integers satisfying $P(m) + P(n) = 0$, some value of $m+n$ must occur infinitely often. Let this value be c. Define $R(x) = P(x)+P(c-x)$. Then $R(x)$ has infinitely many roots. Since it is a polynomial, it is identically zero. Hence $P(x) + P(c - x) = 0$ for all real numbers x, meaning that the graph $y = P(x)$ has a centre of symmetry at $(\frac{c}{2}, 0)$.

7. (a) In the first test, Victor answers True for all 30 questions. Suppose he gets 15 questions correct. In the second test, Victor changes the answers in test 1 to Questions 2, 3 and 4. The number of correct answers must be 12, 18, 14 or 16. In the first two cases, Victor knows the correct answers to Questions 2, 3 and 4, and has enough tests left to sort out the remaining questions. Hence we may assume by symmetry that the number of correct answers is 14. This means that the correct answers to two of Questions 2, 3 and 4 are True, and the other one False. Victor then changes the answers from test 1 to Questions $2k - 1$ and $2k$ in the k-th test, $3 \leq k \leq 15$. If in the kth test, he gets either 13 or 17 questions correct, then he knows the correct answers to Questions $2k - 1$ and $2k$. Thus we may assume that he gets 15 correct answers in each test. Thus one correct answer is True and other False in each of these 13 pairs of questions. Moreover, Victor now knows that the correct answer to Question 1 is False. So far, he has used 15 tests. In test 16, Victor changes the answers from test 1 to Questions 2, 3 and 5, and in test 17 to Questions 2, 4 and 5. The following chart shows he can deduce the correct answers to Questions 2 to 6. He has just enough tests left to sort out the remaining pairs.

Correct Answer to Question					Numbers of Correct Answers in Test	
2	3	4	5	6	16	17
T	T	F	T	F	12	14
T	F	T	T	F	14	12
F	T	T	T	F	14	14
T	T	F	F	T	14	16
T	F	T	F	T	16	14
F	T	T	F	T	16	16

Suppose that in the first test, Victor gets a correct answers where $a \neq 15$. He changes the answers from test 1 to Questions $2k-1$ and $2k$ in the k-th test, $2 \leq k \leq 15$. In each of these 14 tests, he will get either a questions correct again, or $a \pm 2$ questions correct. In the latter case, he will know the correct answers to Questions $2k-1$ and $2k$. In the former case, he will know that one of these two answers is True and the other is False. Victor will also have similar knowledge about Questions 1 and 2 since he knows the total number of answers that should be True. Because $a \neq 15$, Victor must know the correct answers to one pair of questions. Hence he only needs at most 14 more questions to sort out the remaining pairs.

(b) **Solution by Nhan Nyugen.**
In the first test, Victor answers True for all 30 questions. Suppose he gets a questions correct. In the second test, he changes the answers to the first two questions to False. He will get either a questions correct again, or $a \pm 2$ questions correct. In the latter case, he will know the correct answers to the first two questions. In the former case, Victor changes the first four answers to True, False, False and False in the third test, and to False, True, False and True in the fourth test. In the third test, the number of correct answers may be $a \pm 1$ or $a \pm 3$, while in the fourth test, the number of correct answers may be a or $a \pm 2$. From these data, he can deduce the correct answers to the first four questions, as shown in the chart below.

Number of Correct Answers		Correct Answer to Question			
in the Third Test	in the Fourth Test	1	2	3	4
$a-3$	a	False	True	True	True
	$a-2$	False	True	False	True
$a-1$	a	False	True	True	False
	$a+2$	True	False	True	True
	$a-2$	True	False	True	False
$a+1$	a	True	False	False	True
	$a+2$	False	True	False	False
$a+3$	a	True	False	False	False

Victor now handles each of the six subsequent groups of four questions in the same manner in 3 more questions, because Question 1 is relevant throughout. After 22 tests, he knows all the correct answers except to the last two questions. He can use the 23rd test to determine the correct answer to the second last question. Then he also knows the answer to the last question because he knows the total number of answers that should be True. Thus in the 24th test, Victor can answer all 30 questions correctly.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2009.**

1. In a convex 2009-gon, all diagonals are drawn. A line intersects the 2009-gon but does not pass through any of its vertices. Prove that the line intersects an even number of diagonals.

2. Let $a \wedge b$ denote the number a^b. The order of operations in the expresson $7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7$ must be determined by inserting five pairs of brackets. Is it possible to put brackets in two distinct ways so that the expressions have the same value?

3. Vlad is going to print a digit on each face of several unit cubes, in such a way that a 6 does not turn into a 9. If it is possible to form every 30-digit number with these blocks, what is the minimum number of the blocks?

4. When a positive integer is increased by 10%, the result is another positive integer whose digit-sum has decreased by 10%. Is this possible?

5. In the rhombus $ABCD$, $\angle A = 120^\circ$. M is a point on BC and N is a point on CD such that $\angle MAN = 30^\circ$. Prove that the circumcentre of triangle MAN lies on a diagonal of $ABCD$.

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 4 and 5 points respectively.

Courtesy of Andy Liu

Solution to Junior O-Level Spring 2009

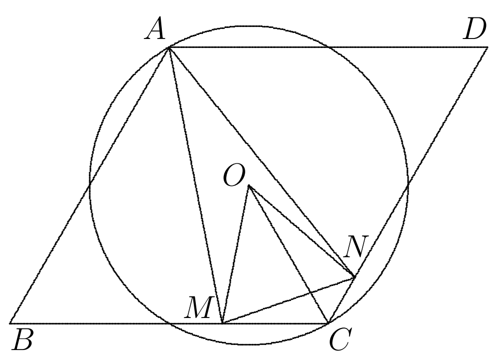
1. Let there be m vertices of the convex 2009-gon on one side of the line and n vertices on the other side. Since $m+n=2009$, one of m and n is odd and the other is even. Hence mn is even. The line intersects mn segments which join two points on opposite sides. Two of them are sides of the 2009-gon, but the remaining $mn-2$ are diagonals, and this number is even.

2. **Solution by Olga Ivrii:**
More generally, $(n \wedge (n \wedge n)) \wedge n = (n^{n \wedge n})^n = (n^n)^{n \wedge n} = (n \wedge n) \wedge (n \wedge n)$. Adding three more terms to both sides the same way maintains the equal value.

3. **Solution by Olga Ivrii:**
We need at least 30 copies of each non-zero digits because there is a 30-digit number consisting only of that digit. We need at least 29 copies of zero because there is a 30-digit number whose last 29 digits are zeros. Since $30 \times 10 = 50 \times 6$, Vlad needs at least 50 cubes. His first five cubes may consist of the numbers (0,1,2,3,4,5), (6,7,8,9,0,1), (2,3,4,5,6,7), (8,9,0,1,2,3) and (4,5,6,7,8,9). Since each digit appears three times and no two copies of the same number appear on the same cube, Vlad can use this set to form any 3-digit number. If he makes nine more copies of this set, he can use the 50 cubes to form any 30-digit number.

4. **Solution by Olga Ivrii:**
It is possible, and a lot of carrying is involved in changing the old number to the new. We want the old number to start with a block of 9s, and we want its last digit to be 0. However, a number with a lone 0 following a block of 9s has the same digit-sum when multiplied by $\frac{11}{10}$. So we put m 9s in front, a lone 0 at the end, and n 5s in between. When this number is multiplied by $\frac{11}{10}$, the new number consists of 10, $m-1$ 9s, 5, $n-1$ 1s and 05 in that order. The digit-sum of the original number is $9m+5n$ while the digit-sum of the new number is $9m+n$. From $9(9m+5n) = 10(9m+n)$, we have $35n = 9m$. Hence we can choose $m = 35$ and $n = 9$.

5. **Solution by Olga Ivrii:**



Let O be the circumcentre of MAN. Then $\angle MON = 2\angle MAN = 60°$. Hence OMN is an equilateral triangle. Since $\angle MON + \angle MCN = 180°$, $CMON$ is a cyclic quadrilateral. Now $\angle OCM = \angle ONM = 60° = \angle OMN = \angle OCN$. Hence O lies on the bisector of $\angle MCN$, which is the diagonal AC.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2009.**

1. Let $a \wedge b$ denote the number a^b. The order of operations in the expresson $7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7$ must be determined by inserting five pairs of brackets. Is it possible to put brackets in two distinct ways so that the expressions have the same value?

2. Several points on the plane are such that no three lie on a straight line. Some pairs of points are connected by segments. If any line which does not pass through any of these points intersects an even number of these segments, prove that each of these points is connected to an even number of the other points.

3. Let a and b be arbitrary positive integers. The sequence $\{x_k\}$ is defined by $x_1 = a$, $x_2 = b$ and for $k \geq 3$, x_k is the greatest common divisor of $x_{k-1} + x_{k-2}$.
   (a) Prove that the sequence is eventually constant.
   (b) How can this constant value be determined from a and b?

4. In an arbitrary binary number, consider any digit 1 and any digit 0 which follows it, not necessarily immediately. They form an odd pair if the number of other digits in between is odd, and an even pair if this number is even. Prove that the number of even pairs is greater than or equal to the number of odd pairs.

5. X is an arbitrary point inside a tetrahedron. Through each of the vertices of the tetrahedron, draw a line parallel to the line joining X to the centroid of the opposite face. Prove that these four lines are concurrent.

Note: The problems are worth 3, 4, 2+2, 4 and 4 points respectively.

Courtesy of Andy Liu

Solution to Senior O-Level Spring 2009

1. **Solution by Olga Ivrii:**
   More generally, $(n\wedge(n\wedge n))\wedge n=(n^{n\wedge n})^n=(n^n)^{n\wedge n}=(n\wedge n)\wedge(n\wedge n)$. Adding three more terms to both sides the same way maintains the equal value.

2. Suppose there is a point A connected to an odd number of other points. Then there must be a second such point B, because each connection involves two points. Take a line very close to AB, so that it does not pass through any given point. This line cuts a segments connnect to A, b segments connected to B and c segments not connected to A or B, where $a+b+c$ is an even number. We now rotate this line slightly so that A remains on the same side but B moves to the opposite side of this line. Apart from possibly AB, this line cuts a segments connected to A, d segments connected to B and c segments not connected to A or B. If A is connected to B, then $d-b$ is even, and the total count $1+a+d+c=1+a+b+c+(d-b)$ is odd. If A is not connected to B, then $d-b$ is odd, and the total count $a+d+c=a+b+c+(d-b)$ is still odd. In either case, we have a contradiction.

3. **Solution by Olga Ivrii:**
   (a) Note that x_k is odd for all $k\geq 3$. Hence $x_{k+2}=\frac{x_{k+1}+x_k}{2^t}$ for some positive integer t. If $x_{k+1}=x_k$, then $t=1$ and the sequence in constant from this point on. Otherwise, $x_{k+2}<\max\{x_{k+1},x_k\}$. Similarly, $x_{k+3}<\max\{x_{k+2},x_{k+1}\}$. If $x_k<x_{k+1}$, then $x_{k+2}<x_{k+1}$ and $x_{k+3}<x_{k+1}$. If $x_k>x_{k+1}$, then $x_{k+2}<x_k$ and $x_{k+3}<x_k$. Thus $\max x_{k+3},x_{k+2}\},\max\{x_{k+1},x_k$, so that the sequence is essentially decreasing, though not monotonically. Since the terms are positive integers, an infinite descent is impossible. Hence the sequence must eventually be constant.

   (b) Let g be the greatest common odd divisor of a and b. Then g is an odd divisor of x_k for $k\geq 3$. Hence it is the greatest common odd divisor of x_{k+1} and x_k. When the sequence becomes constant, g is the greatest common odd divisor of two equal terms both of which are odd. Hence this constant term must be equal to g.

4. We claim that if there is a pair of adjacent 0s, then they may be removed. This affects two kinds of pairs, those in which the 0 is one of the digits removed, and those in which the 0 comes after the digits removed. Among the first kind, whenever one of the removed 0 had formed part of an odd pair, the other removed 0 had formed part of an even pair with the same digit 1, and vice versa. Among the second kind, odd pairs remain odd and even pairs remain even with the removal of the two 0s. This justifies our claim. Similarly, pairs of adjacent 1s may be removed. When no pairs of adjacent digits are identical, the digits of the number are alternately 0 and 1. If we are left with a 0-digit or 1-digit number, then the numbers of odd and even pairs are both 0. Suppose we are left with a number with at least 2 digits. Since leading 0s and trailing 1s do not count, we may assume that our number has the form $1010\cdots 10$. Clearly all pairs are even.

5. Let O be the centroid of the tetrahedron $ABCD$ and G be the centroid of the face BCD. Then O lies on AG, with $AO=3OG$. Let P be the point on the extension of XO such that $PO=3OX$. Then triangles GOX and AOP are similar, so that XG is parallel to AP. By symmetry, the fixed point P lies on each of the four lines.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring** 2009

1. Basil and Peter play the following game. Initially, there are two numbers on the blackboard, $\frac{1}{2009}$ and $\frac{1}{2008}$. At each move, Basil chooses an arbitrary positive number x, and Peter selects one of the two numbers on the blackboard and increases it by x. Basil wins if one of the numbers on the blackboard increases to 1. Does Basil have a winning strategy, regardless of what Peter does?

2. (a) Prove that there exists a polygon which can be dissected into two congruent parts by a line segment which cuts one side of the original polygon in half and another side in the ratio 1:2.

   (b) Can such a polygon be convex?

3. The central square of an 101×101 board is the bank. Every other square is marked S or T. A bank robber who enters a square marked S must go straight ahead in the same direction. A bank robber who enters a square marked T must make a right turn or a left turn. Is it possible to mark the squares in such a way that no bank robber can get to the bank?

4. In a sequence of distinct positive integers, each term except the first is either the arithmetic mean or the geometric mean of the term immediately before and the term immediately after. Is it necessarily true that from a certain point on, the means are either all arithmetic means or all geometric means?

5. A castle is surrounded by a circular wall with 9 towers. Some knights stand on guard on these towers. After every hour, each knight moves to a neighbouring tower. A knight always moves in the same direction, whether clockwise or counter-clockwise. At some hour, there are at least two knights on each tower. At another hour, there are exactly 5 towers each of which has exactly one knight on it. Prove that at some other hour, there is a tower with no knights on it.

6. In triangle ABC, $AB = AC$ and $\angle CAB = 120°$. D and E are points on BC, with D closer to B, such that $\angle DAE = 60°$. F and G are points on AB and AC respectively such that $\angle FDB = \angle ADE$ and $\angle GEC = \angle AED$. Prove that the area of triangle ADE is equal to the sum of the areas of triangles FBD and GCE.

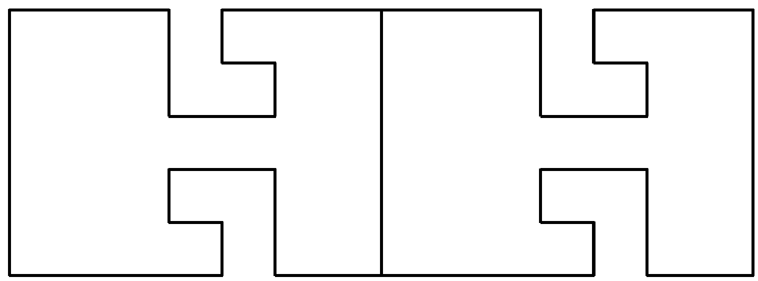
7. Let $\binom{n}{k}$ be the number of ways of choosing a subset of k objects from a set of n objects. Prove that if k and ℓ are positive integers less than n, then $\binom{n}{k}$ and $\binom{n}{\ell}$ have a common divisor greater than 1.

Note: The problems are worth 3, 2+3, 5, 5, 6, 7 and 9 points respectively.

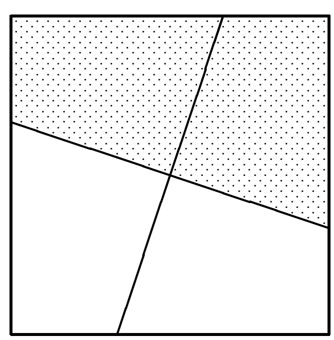
Solution to Junior A-Level Spring 2009

1. Basil starts by choosing the number $\frac{2007}{2008}$. If Peter adds it to $\frac{1}{2008}$, Basil wins immediately. Hence he must add it to $\frac{1}{2009}$, yielding $\frac{4034071}{4034072}$. Basil now chooses $\frac{1}{4034072}$, and Peter can only add it to the number which is not $\frac{4034071}{4034072}$. However, when this is done 4032062 times, the other number will also become $\frac{4034071}{4034072}$. Basil now wins by choosing $\frac{1}{4034072}$ once more.

2. (a) The following diagram shows such a polygon along with the dissecting line.



   (b) **Solution by Daniel Spivak:**
   Divide the sides of a square in counter-clockwise order in the ratio 1:2. If we connect both pairs of points of division on opposite sides, the square is dissected into four congruent parts. If we connect only one pair, we have two congruent convex quadrilaterals. Disregard one of them, and the line connecting the other pair of points of divisioni will dissect the remaining convex quadrilateral into two congruent parts.



3. **Solution by Yung-lin Yang:**
The robber plans ahead for his escape route. Divide the square into 51 layers of concentric squares. The bank is the sole square of the 0-th layer. The eight surrounding squares constitute the 1-st layer, and so on. With no movement restriction while in the bank, the robber can get to the 1-st layer. Suppose the robber gets to the n-th layer. If the square of entry is marked S, he can go straight into the $(n+1)$-st layer. If the square is marked T, he turns either way and heads for a corner. If he passes on his way a square marked T, he can turn and get to the $(n+1)-st$ layer. If this does not happen by the time he gets to a corner of the n-th layer, he can go to the $(n+1)-st$ layer regardless of whether the corner square is marked S or T. It follows that he can leave the 101×101 square. The bank robber then realizes that the escape route can be traversed in the opposite direction and leads him from outside to the bank!

4. **Solution by Daniel Spivak and Yu Wu, independently:** In the sequence defined by $a_{2k-1} = k^2$ and $a_{2k} = k(k+1)$ for all $k \geq 1$, we have

$$\sqrt{a_{2k-1}a_{2k+1}} = \sqrt{k^2(k+1)^2} = k(k+1) = a_{2k}$$

while

$$\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+2}) = \frac{1}{2}(k(k+1) + (k+1)(k+2)) = (k+1)^2 = a_{2k+1}.$$

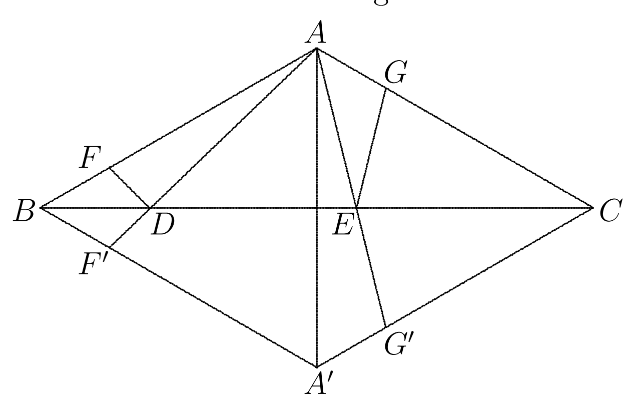
Hence the means are alternately geometric and arithmetic.

5. **Solution by Olga Ivrii and Yung-lin Yang:**
Knights who move together formed a group. At the hour when there are exactly 5 towers each of which has exactly one knight on it, each of these 5 knights is a group by himself. Since there are at most 2 groups on each of the other 4 towers, the total number of groups is at most 13. Suppose the number of groups moving clockwise is no less than the number of groups moving counter-clockwise. Let the former remain in place and let the latter skip over one tower and move to the one beyond. We call them stationary groups and skipping groups respectively. We have exactly the same distribution of knights among the towers. Suppose there is a stationary group on each tower. At the hour when there are exactly 5 towers each of which has exactly one knight on it, each of these 5 knights is a stationary group. Now there can be at most 4 moving groups. So at any hour, one of these 5 towers will have exactly one knight on it, contradicting the condition that at some hour, there are at least two knights on each tower. Hence there is at least one tower with no stationary groups. Each skipping group can visit it once every 9 hours. Since the number of skipping groups is at most 6, this tower will be unguarded at some hour.

6. We use the symbol [ ] to denote area. Reflect the diagram about BC so that A', F' and G' are the respective images of A, F and G. Then D lies on AF' and E lies on AG', and both ABA' and ACA' are equilateral triangles. Now

$$\angle A'AG' = \angle DAE - \angle F'AG' = \angle BAA' - \angle F'AG' = \angle BAF'.$$

It follows that triangles BAF' and $A'AG'$ are congruent.



We have

$$[ADE] + [DEG'A'F'] = [AF'A'] + [AA'G'] = [AF'A'] + [BAF'] = [BAA'] = \frac{1}{2}[BACA'].$$

On the other hand, triangles BDF and CEG are congruent respectively to triangles BDF' and CEG'. Hence

$$[BDF] + [CEG] + [DEG'A'F'] = [BDF'] + [CEG'] + [DEG'A'F'] = [BCA'] = \frac{1}{2}[BACA'].$$

It follows that $[ADE] = [BDF] + [CEG]$.

7. **Solution by Jonathan Schneider:**
Let $0 < k < \ell < n$. Then $\binom{\ell}{k} < \binom{n}{k}$. Suppose we have n players from which we wish to choose a team of size ℓ, and to choose k captains among the team players. The team can be chosen in $\binom{n}{\ell}$ ways and the captains can be chosen in $\binom{\ell}{k}$ ways. On the other hand, if we choose the captains first among all the players, the number of ways is $\binom{n}{k}$. From the remaining $n-k$ players, there are $\binom{n-k}{\ell-k}$ ways of choosing the $\ell-k$ non-captain players. Hence $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$. Now $\binom{n}{k}$ divides $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}$. If it is relatively prime to $\binom{n}{\ell}$, then it must divide $\binom{\ell}{k}$. This is a contradiction since $\binom{\ell}{k} < \binom{n}{k}$.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2009.**

1. A rectangle is dissected into several smaller rectangles. Is it possible that for each pair of rectangles so obtained, the line segment joining their centres intersects some other rectangle?

2. In a sequence of distinct positive integers, each term except the first is either the arithmetic mean or the geometric mean of the term immediately before and the term immediately after. Is it necessarily true that from a certain point on, the means are either all arithmetic means or all geometric means?

3. There is a counter is each square of a 10×10 board. We may choose a diagonal containing an even number of countes and remove any counter from it. What is the maximum number of counters which can be removed from the board by these operations?

4. Three planes dissect a parallelepiped into eight hexahedra such that all of their faces are quadrilaterals. One of the hexahedra has a circumsphere. Prove that each of these hexahedra has a circumsphere.

5. Let $\binom{n}{k}$ be the number of ways of choosing a subset of k objects from a set of n objects. Prove that if k and ℓ are positive integers less than n, then $\binom{n}{k}$ and $\binom{n}{\ell}$ have a common divisor greater than 1.

6. A positive integer n is given. Two players take turns marking points on a circle. The first player uses the red colour while the second player uses the blue colour. When n points of each colour has been marked, the game is over,and the circle has been divided into $2n$ arcs. The winner is the player who has the longest arc both endpoints of which are of this player's colour. Which player can always win, regardless of any action of the opponent?

7. At step 1, the computer has the number 6 in a memory cell. In step n, it computes the greatest common divisor d of n and the number m currently in that cell, and replaces m with $m + d$. Prove that if $d > 1$, then d must be prime.

Note: The problems are worth 4, 4, 6, 6, 8, 9 and 9 points respectively.

Courtesy of Andy Liu

Solution to Senior A-Level Spring 2009

1. Place the original rectangle in the first quadrant so that its southwest corner coincides with the origin of the coordinate plane. The small rectangle whose southwest corner also coincides with the origin is called the main rectangle. Let its centre be at (x, y). Consider the rectangles which have parts of the northern edge of the main rectangle as their southern edges. Let there be n of them and let their centres be at (x_i, y_i), with $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Let k be such that $x_k < x < x_{k+1}$. The segment joining (x_k, y_k) and (x, y) must therefore pass through the $(k+1)$-st rectangle, which means that the segment joining (x, y) and (x_{k+1}, y_{k+1}) cannot pass through the k-th rectangle. It follows that it must intersect the eastern edge of the main rectangle rather than its northern edge, so that $n = k+1$. Similarly, if there are m rectangles which have parts of the eastern edge of the main rectangle as their western edges, the line segment joining (x, y) to the centre of the last of these rectangles must intersect the northern edge of the main rectangle rather than its eastern edge. However, the n-th northern neighbour and the m-th eastern neighbour of the main rectangle share common interior points, which is a contradiction. Thus it is not possible that for each pair of rectangles so obtained, the line segment joining their centres intersects some other rectangle.

2. **Solution by Daniel Spivak and Yu Wu, independently:**
In the sequence defined by $a_{2k-1} = k^2$ and $a_{2k} = k(k+1)$ for all $k \geq 1$, we have

$$\sqrt{a_{2k-1}a_{2k+1}} = \sqrt{k^2(k+1)^2} = k(k+1) = a_{2k}$$

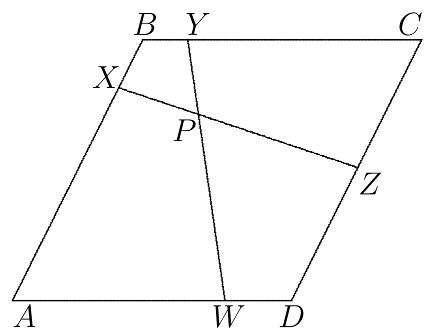
while

$$\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+2}) = \frac{1}{2}(k(k+1) + (k+1)(k+2)) = (k+1)^2 = a_{2k+1}.$$

Hence the means are alternately geometric and arithmetic.

3. **Solution by Zimu Zhu:**
The status of a diagonal is the parity of the number of counters currently on it. Initially, twenty of them are odd. Whenever a counter is removed, it affects the status of the two diagonals on which it lies. They cannot both be odd. If one is odd and the other is even, the total number of odd diagonals remains the same. If both are even, that number increases by two. Hence it cannot fall below its initial value of twenty. It follows that at least ten counters must remain on the board. Label the squares (i, j) where $0 \leq i, j \leq 9$. We can remove all but five counters on the squares (i, j) where $i + j$ is odd, namely (1,0), (3,0), (5,0), (7,0) and (9,0). This is accomplished in ten stages by removing the counters on the squares, using even diagonals in alternating directions:
0. (0,1), (0,3), (0,5), (0,7) and (0,9),
1. (1,2), (1,4), (1,6), (1,8).
2. (2,1), (2,3), (2,5), (2,7) and (2,9),
3. (3,2), (3,4), (3,6), (3,8).
4. (4,1), (4,3), (4,5), (4,7) and (4,9),
5. (5,2), (5,4), (5,6), (5,8).
6. (6,1), (6,3), (6,5), (6,7) and (6,9),
7. (7,2), (7,4), (7,6), (7,8).
8. (8,1), (8,3), (8,5), (8,7) and (8,9),
9. (9,2), (9,4), (9,6), (9,8).
Similarly, we can remove all but five counters on the squares (i, j) where $i + j$ is even, namely (0,0), (2,0), (4,0), (6,0) and (8,0). Thus only the ten counters on the first row are left.

4. Our solution makes use of the following two auxillary results.
Lemma 1. Let $ABCD$ be a parallelogram. Let a line intersect AB at X and CD at Z. Let another line intersect BC at Y and DA at W. Let WY intersect XZ at P. If the quadrilateral $AXPW$ is cyclic, then so are the quadrilaterals $BYPX$, $CZPY$ and $DWPZ$.
Proof:
Let $\angle WAX = \theta$. Then $\angle YCZ = \theta$ also since $ABCD$ is a parallelogram. We also have $\angle WPZ = \angle XPY = \theta$ since $AXPW$ is a cyclic quadrilateral. It follows that so is $CZPY$. Now $\angle XBY = \angle ZDW = \angle WPX = \angle YPZ = 180° - \theta$. Hence $BYPX$ and $DWPZ$ are cyclic quadrilaterals also.



Lemma 2. Let $AXPW$ be a face of a hexahedron. Let $A'X'P'W'$ be the opposite face such that AA', XX', PP' and WW' are the lateral edges. If all six faces are cyclic quadrilaterals, then the hexahedron itself is cyclic.
Proof:
Since $AXPW$ is cyclic, there are many spheres which contains its circumcircle, and we can find one which passes through A'. Now A, X and A' determines a unique circle. It must be the circumcircle of $AXA'X'$, and it must lie on this sphere. It follows that X' lies on this sphere. The same argument shows that P' and W' also lie on this sphere, so that the hexahedron is cyclic.
We now return to the original problem. Each of the three planes has a cross-section with the parallelepiped in the form of a parallelogram. This cross-section does not meet two opposite faces of the parallelepiped, which are also parallelograms. All three parallelograms are divided into four quadrilaterals. In two of these parallolgrams, one of the four quadrilaterals is cyclic. By Lemma 1, the others are also cyclic. In the third parallelogram, which is a face of the parallelepiped, the dividing lines form the same angles with the sides of the parallelogram as those in the opposite face. Hence the four quadrilaterals here are cyclic too. It follows that all faces of the eight hexahedra are cyclic. By Lemma 2, the hexahedra are all cyclic.

5. **Solution by Jonathan Schneider:**
Let $0 < k < \ell < n$. Then $\binom{\ell}{k} < \binom{n}{k}$. Suppose we have n players from which we wish to choose a team of size ℓ, and to choose k captains among the team players. The team can be chosen in $\binom{n}{\ell}$ ways and the captains can be chosen in $\binom{\ell}{k}$ ways. On the other hand, if we choose the captains first among all the players, the number of ways is $\binom{n}{k}$. From the remaining $n-k$ players, there are $\binom{n-k}{\ell-k}$ ways of choosing the $\ell - k$ non-captain players. Hence $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$. Now $\binom{n}{k}$ divides $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}$. If it is relatively prime to $\binom{n}{\ell}$, then it must divide $\binom{\ell}{k}$. This is a contradiction since $\binom{\ell}{k} < \binom{n}{k}$.

6. **Solution by Jonathan Zung:**
The second player has a winning strategy divided into four stages.

   1. After the first player has marked the initial red point, the second player define as principal points the remaining vertices of a regular n-gon inscribed in the circle, with this red point as one of the vertices.
   2. The second player marks principal points whenever possible, until all have been marked. Since the second player has n moves and there are only $n-1$ unmarked principal points initially, this stage ends before the second player's last move.
   3. Once all the principal points have been marked, the second player find pairs of adjacent red principal points. For each such pair, the second player marks a blue point between the two red points. Suppose the first player has marked k principal points red while the second player has marked the remaining $n-k$ principal points blue. There are at most $k-1$ pairs of adjacent red principal points. Hence this stage also ends before the second player's last move.
   4. When the second player is ready to make the last move, all n principal points have been marked. There are $n-1$ other marked points. Hence there exist two adjacent principal points with no other points in between. At least one of them is blue since the second player ensured there is a blue point between any two adjacent red principal points. The second player's final marked point is on this arc, arbitrarily close to a principal point where the other principal is blue.

   The longest arc the second player can claim may be made arbitrarily close to $\frac{1}{n}$ of the circle, while all arcs the first player can claim are shorter than $\frac{1}{n}$ of the circle. Hence the second player can be assured of a win regardless of any action by the first player.

7.

See on the next page

7 Let us write down few first terms in the sequence:

Step #		1	2	3	4	**5**	**6**	7	8	9	10	**11**	**12**	...
Number in the cell	6	7	8	9	10	**15**	**18**	19	20	21	22	**33**	**36**	...
Increment		1	1	1	1	**5**	**3**	1	1	1	1	**11**	**3**	

Let us denote by n the number of the step, $A(n)$ the number in the cell, $I(n) = A(n) - A(n-1)$ its increment.

One can notice the following pattern: *If on some step n $I(n) \neq 1$ then $A(n) = 3n$.* (In the table corresponding columns are in bold).

Let $A(n) = 3n$ for some n. On the next step the number increases by $I(n+1) = \gcd(n+1, 3n)$ and since n and $(n+1)$ are coprimes then $I(n+1) = \gcd(n+1, 3)$. Thus, increment is either $I(n+1) = 1$ or $I(n+1) = 3$. In the latter case we have that $(n+1)$ is divisible by 3 so on the next step $I(n+2) = 1$ for certain.

This observation leads us to the following

Conjecture *Let $A(n) = 3n$ for some n, and the next increment be $I(n+1) = 1$. Consider the nearest step $n+k$ when increment will be different from 1: $I(n+k) \neq 1$. Then $I(n+k)$ is a prime number and $A(n+k) = 3(n+k)$.*

To prove conjecture we use induction. We already checked the base for small numbers n. Let $A(n) = 3n$ for some n and $(n+k)$ be the nearest number with $I(n+k) \neq 1$:

Step #	n	n+1	n+2	...	n+k-1	n+k
Number in the cell	3n	3n+1	3n+2	...	3n+k-1	?

For increment $I(n+k)$ we have (using here and below $\gcd(a,b) = \gcd(a, a-b)$):

$$I(n+k) = \gcd(n+k, 3n+k-1) = \gcd\big(n+k, 3(n+k) - (3n+k-1)\big) = \gcd(n+k, 2k+1).$$

Hence, $I(n+k)$ is divisor of $(2k+1)$.

Assume that $(2k+1)$ is not a prime and p is a prime divisor of $\gcd(n+k, 2k+1)$. Since $(2k+1)$ is odd then $p \leq (2k+1)/3$. Therefore $p < k$. Let us look at step $n+k-p$. At this step an increment is

$$I(n+k-p) = \gcd(n+k-p, 3n+k-p-1) = \gcd\big(n+k-p, 3(n+k-p) - (3n+k-p-1)\big) = \gcd(n+k-p, 2k+1-2p).$$

But since both $(n+k-p)$ and $(2k+1-2p)$ are divisible by p we see that on step $(n+k-p)$ increment differs from 1. This contradicts to the assumption that $(n+k)$ is the nearest step.

Therefore, $(2k+1)$ is a prime number and $I(n+k) = 2k+1$ and then

$$A(n+k) = A(n+k-1) + I(n+k) = (3n+k-1) + (2k+1) = 3(n+k).$$

Our conjecture is proven by induction and the problem solved.