28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna varijanta, 22. oktobar 2006. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na tabli su napisana u rastućem poretku dva prirodna broja x i y, ($x \le y$). Peđa zapisuje u svesku x^2 (kvadrat prvog broja), a zatim na tabli zamenjuje mesta brojevima x i $y-x$, pišući ih u rastućem poretku. Sa novim brojevima na tabli Peđa ponavlja tu operaciju, itd. sve dotle dok jedan od brojeva na tabli ne postane nula. Čemu će u tom momentu biti jednak zbir brojeva u Peđinoj svesci?

2. Zna se da lažovi uvek lažu, istinoljubci uvek govore istinu, a prevrtljivci nekad lažu, a nekad govore istinu. Vi možete postavljati pitanja na koja se odgovara sa “da” ili “ne”. (Na primer:”Da li je istina da je ovaj čovek prevrtljivac?”)

(1 poen) **a)** Pred vama su trojica – lažov, istinoljubac i prevrtljivac, koji znaju ko je ko među njima. Kako vi to možete saznati?

(3 poena) **b)** Pred vama su četvorica – lažov, istinoljubac i dva prevrtljivca i sva četvorica znaju ko je ko među njima. Dokažite da se prevrtljivci mogu dogovoriti da odgovaraju tako da vi, postavljajući pitanja toj četvorici, ni za koga od njih ne možete sa sigurnošću utvrditi ko je ko.

3. (2 poena) **a)** Napisano je 2007 prirodnih brojeva većih od 1. Dokažite da se može precrtati jedan broj, tako da se proizvod ostalih brojeva može predstaviti u vidu razlike kvadrata dva prirodna broja.

(2 poena) **b)** Napisano je 2007 prirodnih brojeva većih od 1, među kojima je jedan jednak 2006. Pokazalo se da među napisanim brojevima postoji samo jedan broj, tako da se proizvod ostalih brojeva može predstaviti u vidu razlike kvadrata dva prirodna broja. Dokažite da je taj broj 2006.

4. (4 poena) Na produžetku stranice BC trougla ABC preko temena B označena je duž BB′ jednaka stranici AB. Simetrale spoljašnjih uglova kod temena B i C seku se u tački M. Dokažite da tačke A, B′, M i C pripadaju istoj kružnici.

5. (4 poena) Koji je najveći broj nekonveksnih podudarnih mnogouglova na koje se može razrezati kvadrat, tako da sve stranice mnogouglova budu paralelne stranicama kvadrata i da se ni koja dva od tih mnogouglova ne mogu dobiti jedan iz drugog paralelnim pomeranjem (translacijom)? /Paralelno pomeranje – pomak bez obrtanja/

28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna varijanta, 22. oktobar 2006. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na tabli su napisana tri prirodna broja *x, y, z.* Peđa zapisuje u svesku proizvod bilo koja dva od njih, a na tabli umanjuje treći broj za 1. Sa nova tri broja na tabli Peđa ponavlja istu operaciju, itd. sve dotle dok jedan od brojeva na tabli ne postane nula. Čemu će u tom momentu biti jednak zbir brojeva u Peđinoj svesci?

2. (4 poena) Dat je tangentni četvorougao. Dodirne tačke četvorougla i kružnice oko koje je opisan spojene su redom dužima. U tako nastale trouglove upisane su kružnice. Dokažite da su dijagonale četvorougla čija su temena centri tih kružnica uzajamno normalne.

3. (4 poena) Tablica 2006×2006 popunjena je brojevima 1, 2, 3, … 2006^2. Dokažite da se u takvoj tablici mogu naći dva broja u poljima sa zajedničkom stranicom ili temenom, takva da je njihov zbir deljiv sa 4.

4. (4 poena) Date su dve beskonačne (na jednu stranu) progresije: aritmetička a_1, a_2, a_3, … i geometrijska b_1, b_2, b_3, …, pri čemu svi brojevi koji se nalaze među članovima geometrijske progresije takođe se nalaze i među članovima aritmetičke progresije. Dokažite da je količnik geometrijske progresije (*lj*) ceo broj.

5. (5 poena) Može li se upisati pravilni oktaedar u kocku tako da se temena oktaedra nalaze na ivicama kocke? (Pravilni oktaedar ima 6 temena, iz svakog njegovog temena polaze 4 ivice, a sve njegove strane su jednakostranični trouglovi.)

28. TURNIR GRADOVA
Jesenje kolo.
Osnovna varijanta, 29. oktobar 2006. god.
8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Oko pravilnog 7-ugla opisna je kružnica i u njega je upisana kružnica. Isto je urađeno i sa pravilnim 17 – uglom. Svaki od mnogouglova se posle toga našao u svom kružnom prstenu. Pokazalo se da su površine tih prstenova jednake. Dokažite da su stranice tih mnogouglova jednake.

2. (5 poena) Došavši u novu kompaniju Čičikov je želeo da sazna ko se s kim poznaje. Da bi sve zapamtio, on je crtao kružnicu i svakog člana prikazivao pomoću tetiva (duži), pri čemu se duži onih koji se poznaju seku, a onih koji se ne poznaju ne seku. Čičikov je uveren da takva kolekcija tetiva postoji za ma koju kompaniju. Da li je on u pravu? (Poklapanje krajeva tetiva smatra se njihovim presekom).

3. U kvadratu 3×3 raspoređeni su brojevi: *a, b, c* u prvoj vrsti; *d, e, f* u drugoj; *g, h, i* u trećoj (tim redom).

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Zna se da je kvadrat magičan: zbirovi brojeva u svakoj vrsti, svakoj koloni i na svakoj dijagonali su jednaki. Dokažite da je:

(3 poena) **a)** $2(a+c+g+i)=b+d+f+h+4e$

(3 poena) **b)** $2(a^3+c^3+g^3+i^3)=b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$

4. (6 poena) U oštrougli trougao upisana je kružnica poluprečnika R. Onda su povučene tri tangente te kružnice, koje dele trougao na tri pravougla trougla i šestougao. Obim šestougla iznosi LJ. Odredite zbir prečnika kružnica upisanih u nastale pravougle trouglove.

5. Omotnicom (omotom) ravne slike dimenzija 1×1 zvaćemo pravougaoni list papira površine 2, kojim možemo, ne razrezujući ga, sasvim uviti (zamotati) sliku sa obe strane. Jasno je da su omotnice pravougaonik 2×1 i kvadrat stranice $\sqrt{2}$.

(4 poena) **a)** Dokažite da postoje i druge omotnice.

(3 poena) **b)** Dokažite da ima beskonačno mnogo omotnica.

6. (8 poena) Neka je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, gde je $\frac{a_n}{b_n}$ neskrativ razlomak. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva *n*, za koje je iapunjena nejednakost $b_{n+1}<b_n$.

7. (9 poena) Voditelj kviza ima špil od 52 karte. Gledaoci žele da saznaju u kom poretku su složene karte (ne precizirajući pri tome – da li odozgo nadole ili odozdo nagore). Dopušteno je voditelju postavljati pitanja oblika: “Koliko se karata nalazi između te i te karte?” Jedan od gledalaca je krišom video kojim redom su složene karte. Koliko najmanje pitanja on mora postaviti, da bi ostali gledaoci, prema odgovorima na ta pitanja, mogli saznati redosled karata u špilu” ?

28. TURNIR GRADOVA
Jesenje kolo.
Osnovna varijanta, 29. oktobar 2006. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (5 poena) Došavši u novu kompaniju Čičikov je želeo da sazna ko se s kim poznaje. Da bi sve zapamtio, on je crtao kružnice i svakog člana prikazivao pomoću tetiva (duži), pri čemu se duži onih koji se poznaju seku, a onih koji se ne poznaju ne seku. Čičikov je uveren da takva kolekcija tetiva postoji za ma koju kompaniju. Da li je on u pravu? (Poklapanje krajeva tetiva smatra se njihovim presekom).

2. (6 poena) Na stranicama BC, AC i AB oštrouglog trougla ABC uzete su redom tačke A_1, B_1 i C_1 tako da su poluprave A_1A, B_1B i C_1C bisektrise uglova trougla $A_1B_1C_1$. Dokažite da su duži AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ABC.

3. (6 poena) U broju a = 0,12457… n-ta cifra posle zapete jednaka je cifri levo od zapete u broju $n\sqrt{2}$. Dokažite da je a iracionalan broj.

4. (6 poena) Može li se neka prizma razdeliti na piramide (koje nemaju zajedničkih delova) tako da osnova svake od piramida leži u jednoj od osnova (baza) prizme, a naspramno teme (vrh) pripada drugoj osnovi prizme?

5. (7 poena) Neka je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, gde je $\frac{a_n}{b_n}$ neskrativ razlomak. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n, za koje je ispunjena nejednakost $b_{n+1}<b_n$.

6. Reći ćemo da je špil karata složen pravilno ako se ma koji par uzastopnih karata slaže po boji ili po vrednosti, što je takođe tačno za kartu na vrhu i kartu na dnu špila i na vrhu je “kec”(as) pik. Dokažite da je broj načina da se pravilnio složi špil karata:

(3 poena) **a)** deqiv sa 12! ,
(5 poena) **b)** deqiv sa 13! .

7. Pozitivni brojevi $x_1,\ldots,x_k$ zadovoqavaju nejednakosti

$$x_1^2+\ldots+x_k^2<\frac{x_1+\ldots+x_k}{2} \quad \text{i} \quad x_1+\ldots+x_k<\frac{x_1^3+\ldots+x_k^3}{2}$$

(3 poena) **a)** Dokažite da je $k>50$.
(3 poena) **b)** Nađite primer takvih brojeva za neko *k.*
(3 poena) **v)** Odredite najmanje k za koje je primer moguć.

28. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.

Pripremna varijanta, 25. februar 2007. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Pet duži je nacrtano (ne podižući olovku sa papira) tako da je dobijena petokraka zvezda, podeljena povučenim dužima na pet trouglova i jedan petougao. Pokazalo se da su svih 5 trouglova podudarni. Da li je tada obavezno petougao pravilan (tj. ima jednake sve stranice i sve uglove jednake)?

2. (4 poena) Na tabli su napisana dva 2007-cifrena broja. Zna se da kod svakog možemo precrtati 7 cifara tako da ostanu jednaki brojevi. Dokažite da u polazne brojeve možemo ubaciti (upisati) po 7 cifara, tako da se takođe dobiju jednaki brojevi.

3. (4 poena) Koliko najmanje topova možemo postaviti na šahovsku tablu 8×8 tako da sva bela polja budu napadnuta (tučena) tim topovima? (Napadnutim poljima smatramo sva polja kolone i reda u kojima se nalazi top).

4. (4 poena) Data su tri realna broja različita od nule. Ako ih, u bilo kom poretku, uzmemo za koeficijente kvadratnog trinoma, onda će taj trinom imati realan koren (realnu nulu). Da li je tačno da će svaki od tih trinoma imati pozitivan koren?

5. **a)** (1 poen) Torta ima oblik trougla kod koga je jedan ugao tri puta veći od drugog. Kutija za tortu ima oblik istog takvog trougla, ali simetričnog s njim u odnosu na neku pravu. Kako razrezati tortu na dva dela koji se (bez obrtanja-prevrtanja) mogu smestiti u tu kutiju?

b) (4 poena) Uradite isti zadatak, ali za tortu koja ima oblik tupouglog trougla u kome je tup ugao dva puta veći od jednog od oštrih uglova.

(Tortu i kutiju smatrajte ravnim figurama.)

28. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.
Pripremna varijanta, 25. februar 2007. god.
10–11. razred (stariji uzrast)
(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Polja table 9×9 obojena su crnom i belom bojom kao na šahovskoj tabli Ugaona polja su bela. Koji najmanji broj topova treba postaviti na tu tablu da bi ti topovi tukli sva bela polja. (Kaže se da top tuče neko polje ako se ono nalaze u vrsti i koloni u kojoj se taj top nalazi).

2. (4 poena) Polinom $x^3 + px^2 + qx + r$ ima tri korena u intervalu (0, 2) . Dokažite da važi nejednakost: −2 < *p*+*lj*+*r* < 0

3. (4 poena) Prava dodiruje kružnicu u tački A. Na pravoj je izabrana tačka B, pa je duž AB rotirana za neki ugao oko centra kružnice. Tako je dobijena duž A′B′. Dokažite da prava, koja prolazi kroz tačke dodira A i A′**,** polovi duž BB′.

4. (4 poena) Niz nula i jedinica nastao je na sledeći način: na *k*-tom mestu piše se nula ako je zbir cifara (rednog) broja *k* paran, a inače (ako je zbir cifara broja *k* neparan) piše se jedinica. Dokažite da je taj niz cifara neperiodičan. (Evo početka tog niza: 10101010110101010101001…..)

Niz nazivamo periodičnim, ako postoji prirodan broj *d*, takav da se uvek podudaraju dva člana niza, čiji se indeksi (redni brojevi) razlikuju za *d.*

5. a) (3 poena) Torta ima oblik tupouglog trougla kod kojeg je tup ugao dva puta veći od jednog od oštrih uglova. Kutija za tortu ima oblik istog takvog trougla, ali simetričnog s njim u odnosu na neku pravu. Kako razrezati tortu na dva dela koji se (bez obrtanja-prevrtanja) mogu smestiti u tu kutiju?

b) (3 poena) Uradite isti zadatak za tortu koja ima oblik trougla sa uglovima od 20°, 30° i 130°.

(Tortu i kutiju smatrajte ravnim figurama.)

28. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Osnovna varijanta, 4. mart 2007. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Dat je prirodan broj *N*. Da bismo našli ceo broj, najbliži kvadratnom korenu iz *N*, iskoristićemo sledeći način: među kvadratima prirodnih brojeva nađimo broj a^2, najbliži broju *N*; tada će i *a* biti traženi broj. Da li uvek takav način daje pravilan odgovor?

2. (4 poena) Na stranicama jediničnog kvadrata označene su tačke *K, L, M* i N tako da je *KM* paralelno dvema stranicama kvadrata, a *LN* paralelno sa dve druge stranice kvadrata. Duž *KL* od kvadrata odseca trougao obima 1. Kolika je površina trougla koji od kvadrata odseca duž *MN*?

3. (5 poena) Pera je uzeo dvadeset uzastopnih prirodnih brojeva, zapisao ih je jedan za drugim nekim redom i tako dobio broj M. Vasa je uzeo dvadeset jedan uzastopni prirodan broj, zapisao ih jedan za drugim po nekom redu i tako je dobio broj *M*. Da li se moglo dogoditi da bude *M*=*N* ?

4. (poena) U konveksnom mnogouglu povučeno je nekoliko dijagonala (moguće i takvih da se seku) tako da se ni u kojoj tački unutar mnogougla ne seku tri ili više dijagonala. Pokazalo se da je na kraju mnogougao podeljen na trouglove. Koliki je najveći mogući broj tih trouglova?

5. (7 poena) Pronađite sve rastuće aritmetičke progresije, čiji su članovi prosti brojevi sa svojstvom da je broj članova progresije konačan i veći od razlike progresije.

6. (8 poena) Kod četvorougla *ABCD* stranice *AB, BC* i *CD* su jednake, tačka *M* je središte stranice *AD*. Poznato je da je ugao *BMC* jednak 90^0. Nađite koliki je ugao između dijagonala četvorougla *ABCD.*

7. Kapetan Vrungel u svojoj kabini je promešao špil od 52 karte i rasporedio ih po krugu, ostavivši jedno slobodno mesto. Mornar Fuks s palube, ne odvajajući se od svog kormila i ne znajući početni raspored, imenuje kartu. Ako je ta karta do slobodnog mesta, Vrungel je premešta na to slobodno mesto, ne govoreći Fuksu o tome ništa. U protivnom slučaju ništa se ne dešava. Fuks onda imenuje još jednu kartu, i tako koliko hoće puta, sve dok on ne kaže “stop”.

(5 poena) a) Može li Fuks postići to da se posle “stop” svaka karta nađe tamo gde nije bila na početku?

(5 poena) b) Može li Fuks postići to, da posle “stop” pored slobodnog mesta ne bude as (kec) pik?

28. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Osnovna varijanta, 4. mart 2007. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Na paraboli $y = x^2$ uzete su četiri tačke *A, B, C, D*, tako da se duži *AB* i *CD* seku na ordinatnoj osi. Nađite apscisu tačke *D,* ako su apscise tačaka *A, B* i *C* redom *a, b* i *c*.

2. (5 poena) Konveksna figura *F* ima sledeće svojstvo: ma koji jednakostranični trougao stranice 1 može se paraleln o premestiti tako da se sva njegova temena nađu na obodu (granici) figure *F*. Sledi li iz tog svojstva da je *F* krug?

3. (5 poena) Neka je *f(x)* neki polinom nenultog stepena. Može li se desiti da jednačina *f(x)=a* za ma koju vrednost *a* ima paran broj rešenja?

4. Kapetan Vrungel u svojoj kabini je promešao špil od 52 karte i rasporedio ih po krugu, ostavivši jedno slobodno mesto. Mornar Fuks s palube, ne odvajajući se od svog kormila i ne znajući početni raspored, imenuje kartu. Ako je ta karta do slobodnog mesta, Vrungel je premešta na to slobodno mesto, ne govoreći Fuksu o tome ništa. U protivnom slučaju ništa se ne dešava. Fuks onda imenuje još jednu kartu, i tako koliko hoće puta, sve dok on ne kaže “stop”.

(4 poena) a) Može li Fuks postići to da se posle “stop” svaka karta nađe tamo gde nije bila na početku?

(4 poena) b) Može li Fuks postići to, da posle “stop” pored slobodnog mesta ne bude as (kec) pik?

5. (8 poena) Od pravilnog oktaedra stranice 1 odrezano je 6 uglova - piramidica sa kvadratnom osnovom i bočnom ivicom $\frac{1}{3}$. Dobijen je poliedar čije su strane kvadrati i pravilni šestouglovi. Može li se kopijama takvog poliedra popuniti prostor?

6. (4 poena) Dat je iracionalan broj *a*, takav da je $0<a<\frac{1}{2}$. Prema njemu se određuje novi broj a_1 kao manji od dva broja $2a$ i $1-2a$. Prema ovom broju se onda određuje a_2, i tako dalje.

(4 poena) a) Dokažite da je za neko *n* ispunjena nejednakost $a_n < \frac{3}{16.}$.

(4 poena) b) Može li se dogoditi da bude $a_n > \frac{7}{40}$ za svaki prirodan broj *n*?

7. (8 poena) Stranice trougla *ABC* vide se iz tačke *T* pod uglovima od 120°. Dokažite da se prave simetrične pravama *AT, BT* i *CT* u odnosu na prave *BC, CA* i *AB* (tim redom) seku u jednoj tački.

28-й Международный математический Турнир городов

Решения задач

(написаны Л.Медниковым и А.Шаповаловым)

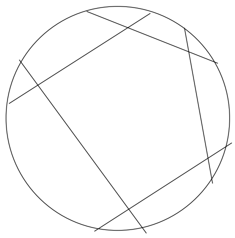
Основной вариант, 8-9 классы.

1. Вокруг правильного 7-угольника описали окружность и вписали в него окружность. То же проделали с правильным 17-угольником. В результате каждый из многоугольников оказался расположенным в своем круговом кольце. Оказалось, что площади этих колец одинаковы. Докажите, что стороны многоугольников одинаковы.

Решение. Пусть $2a$ – длина стороны правильного многоугольника, r и R – радиусы вписанной и описанной окружности соответственно. Вписанная окружность касается стороны в ее середине, поэтому проведенный туда радиус перпендикулярен стороне. По теореме Пифагора $a^2+r^2=R^2$. Поэтому площадь кольца между этими окружностями равна $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$, откуда и следует утверждение задачи.

2. Попав в новую компанию, Чичиков узнавал, кто с кем знаком. А чтобы запомнить это, он рисовал окружность и изображал каждого члена компании хордой, причем хорды знакомых между собой пересекались, а незнакомых – нет. Чичиков уверен, что такой набор хорд есть для любой компании. Прав ли он? (Совпадение концов хорд считается пересечением).

Решение. Чичиков не прав, вот контрпример. Пусть есть хозяин, три его сына и три гостя. Гости попарно незнакомы, хозяин с ними всеми знаком, а три сына знакомы с тремя разными парами гостей. Хорды гостей пересекают хорду хозяина в трех различных точках. Одна точка – средняя, две – крайние, соотвественно назовем средними и крайними и хорды гостей, и самих гостей. Ясно, что крайние хорды лежат по разные стороны от средней. Хорда сына, знакомого лишь с крайними гостями должна пересечь крайние хорды, но не пересечь среднюю. Противоречие.



Замечание. Есть контрпример и на 6 человек, но его несколько сложнее обосновать. Пусть граф знакомств – пятиугольная пирамида. Хорды, соответствующие вершинам основания пирамиды, должны образовать 5-угольник с “хвостиками” (см. рис.), а хорда, соответствующая вершине, не может пересечь все пять его “сторон”.

Идея неконструктивного решения для знатоков. “Легко” видеть, что все “схемы Чичикова” на n человек можно реализовать на сторонах и диагоналях правильного $2n$-угольника. Число таких схем Чичикова (с указанием номеров) равно $(2n)!\cdot 2^{-n}$. При этом разным схемам может соответствовать один и тот же граф знакомств. Но число всевозможных графов знакомств (с нумерацией вершин) равно $2^{n(n-1)/2}$. При n = 14 второе число больше:

$$20! = 2\cdot(3\cdot5)\cdot4\cdot(6\cdot10)\cdot(7\cdot9)\cdot8\cdot(11\cdot21)\cdot(12\cdot20)\cdot(13\cdot19)\cdot(14\cdot18)\cdot(15\cdot17)\cdot16\cdot22\cdot\ldots\cdot28 <$$
$$< 2\cdot4^3\cdot8^5\cdot16^{11}\cdot32^9 = 2\cdot2^6\cdot2^{15}\cdot2^{44}\cdot2^{35} = 2^{101} = 2^{91}\cdot2^{14}.$$

Следовательно, существует граф знакомств, который не может быть реализован схемой Чичикова.

3. В квадрате 3×3 расставлены числа (см. рис.). Известно, что квадрат магический: сумма чисел в каждом столбце, в каждой строке и на каждой диагонали одна и та же. Докажите, что

a	b	c
d	e	f
g	h	i

а) [3] $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

б) [3] $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

Первое решение. **а**) Прибавим к обеим частям $b + d + f + h$ получим очевидное равенство $(a + b + c) + (a + d + g) + (c + f + i) + (g + h + i) = 2(b + e + h) + 2(d + e + f)$.

б) 1) Пусть S – сумма чисел в каждой строке. Тогда $a + i = c + g = b + h = d + f = S - e$. Подставив в равенство из п. а), получим $4(S - e) = 2(S - e) + 4e$, откуда $2S = 6e$,
то есть $S = 3e$.

2) Докажем сначала равенство $2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2$.

Для этого запишем его в виде

$$(a + c)^2 + (c + i)^2 + (a + g)^2 + (g + i)^2 - 2(ac + ci + ag + gi) =$$
$$= (h + e)^2 + (d + e)^2 + (f + e)^2 + (b + e)^2 - 2e(b + d + f + h).$$

Суммы квадратов в левой и правой частях равны, поскольку $a + c = S - b = h + e$, и т.д.

Кроме того, $ac + ci + ag + gi = (a + i)(c + g) = (S - e)^2 = 2e(S - e) = e(b + d + f + h)$.

3) Заметим, что равенство п. б) остается верным при увеличении всех чисел таблицы на одно и то же число. Действительно,

$$2((a + t)^3 + (c + t)^3 + (g + t)^3 + (i + t)^3) =$$
$$= 2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) + 6t(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) + 6t^2(a + c + g + i) + 8t^3 =$$
$$= b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 + 3t(b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2) + 3t^2(b + d + f + h + 4e) + 8t^3 =$$
$$= (b + t)^2 + (d + t)^2 +(f + t)^2 + (h + t)^2 + 4(e + t)^2.$$

Поэтому достаточно доказать равенство для случая, когда $e = 0$. Но в этом случае равенство очевидно, поскольку $a + i = c + g = a + c = g + i = b + h = d + f = 2e = 0$, и обе части равенства равны нулю.

Второе решение. Сложив 4 суммы: по средней строке. среднему столбцу и диагоналям, мы получим сумму всех чисел таблицы плюс утроенное число в центральной клетке: $4S = 3S + 3e$, то есть $S = 3e$.

Поскольку $b + h = S - e = 2e$, обозначим $b = e - 2u$, $h = e + 2u$.

Поскольку $a + c = S - b = 2e + 2u$, обозначим $a = e + u + v$, $c = e + u - v$.

Последовательно находим

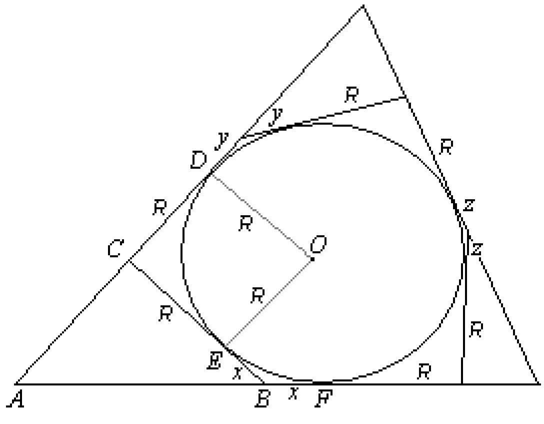
$$i = S - (a + e) = e - u - v,\ g = S - (c + e) = e - u + v,\ d = S - (a + g) = e - 2v,\ f = e + 2v.$$

Теперь равенство из п. а) очевидно. Для проверки равенства п. б) мы будем многократно использовать очевидное соотношение $(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2$. Имеем:

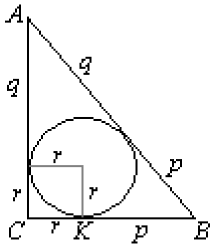
$$2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = 2((e + u + v)^3 + (e + u - v)^3 + (e - u + v)^3 + (e - u - v)^3) =$$
$$= 4((e + u)^3+ (e - u)^3) + 12((e + u) + (e - u))v^2 = 8e^3 + 24e(u^2 + v^2),$$
$$b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 = (e + 2u)^3 + (e - 2u)^3 + (e + 2v)^3 + (e - 2v)^3 + 4e^3 =$$
$$= 2e^3 + 6e(2u)^2 + 2e^3 + 6e(2v)^2 + 4e^3 = 8e^3 + 24e(u^2 + v^2)$$

4. В остроугольный треугольник вписана окружность радиуса R. К окружности проведены три касательные, разбивающие треугольник на три прямоугольных треугольника и шестиугольник. Периметр шестиугольника равен Q. Найдите сумму диаметров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники.

Решение. Точки касания вписанной окружности со сторонами шестиугольника и его вершины разбивают его периметр на 12 отрезков (см. например рис.). Отрезки, выходящие из вершин прямых углов шестиугольника (на каких бы сторонах треугольника эти вершины не лежали) равны R (например, проведя радиусы OD и OE в точки касания, получим квадрат $CDOE$, значит, $CD=CE=R$). Отрезки касательных, проведенных из трех остальных вершин шестиугольника обозначим x, y, z (см. рис.). Тогда периметр шестиугольника $Q = 6R + 2x + 2y + 2z$.



Как известно, диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме катетов минус гипотенуза (см, например, рис. справа). Для треугольника *ABC* получаем



$AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x$, поскольку касательные *AD* и *AF* равны. Аналогично, два других диаметра равны $2y$ и $2z$, откуда их сумма $2x+2y+2z = Q - 6R$.

Идея 2-го решения (для знатоков). Пусть вписанная окружность треугольника *ABC* касается стороны *BC* в точке *K*. Как известно, $CK = BE = x$ (*E* – точка касания вневписанной окружности). С другой стороны, *CK* равен радиусу вписанной окружности. Поэтому диаметр ее равен $2x$.

5. Оберткой плоской картины размером 1×1 назовем прямоугольный лист бумаги площади 2, которым можно, не разрезая его, полностью обернуть картину с обеих сторон. Ясно, что прямоугольник 2×1 и квадрат со стороной $\sqrt{2}$ – обертки.

а) Докажите, что есть и другие обертки.

б) Докажите, что оберток бесконечно много.

Решение. Покажем, что прямоугольник $\sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ – обертка. Наложим его на квадрат так, чтобы две вершины квадрата оказались на длинных сторонах, а третья – в середине короткой (см. рис.1). Процесс обертывания изображен на рис. 2 и 3.

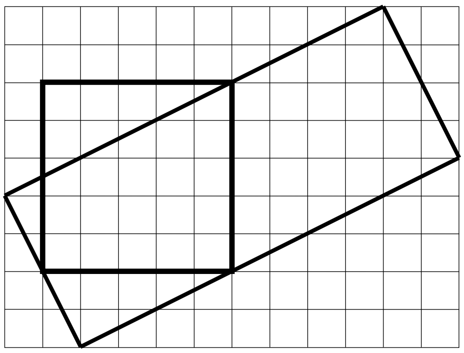


Рис. 1

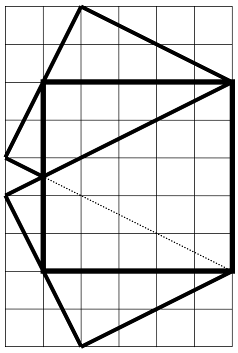


Рис. 2

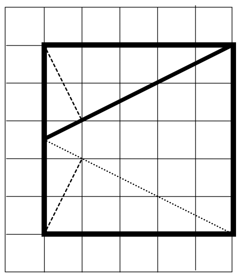


Рис. 3

б) Разделим вертикальные стороны квадрата на n частей. На рис 4 показана обертка квадрата параллелограммом, меньшая сторона которого равна $\dfrac{2}{n}$ (изображен случай $n = 5$). На рис. 5 показано как превратить параллелограмм в прямоугольник (при этом выступаюшие за горизонтальные стороны квадрата прямоугольные треугольники распадаются на 2 части). На рисунке 6 показано (для n=3) как их надо загибать.

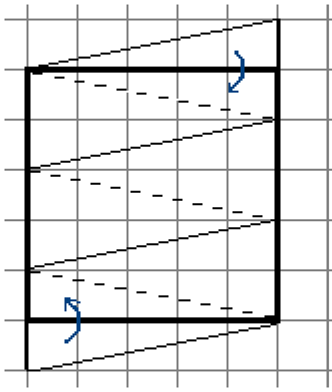


Рис. 4

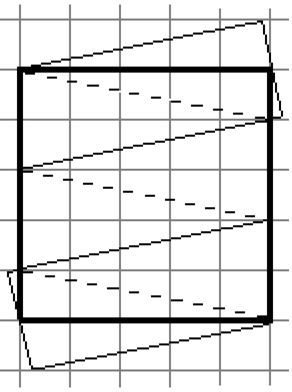


Рис. 5

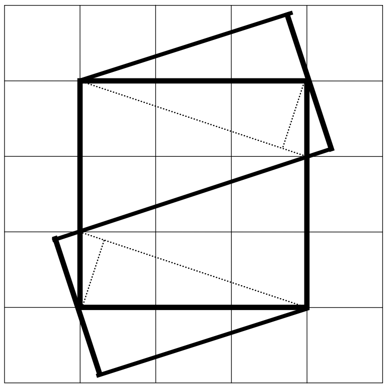


Рис. 6

Замечание. При $n = 1$ получается обертка квадратом $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, при $n = 2$ – прямоугольником $\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$ (рис 3), при $n = 3$ – прямоугольником $\sqrt{10} \times \frac{2}{\sqrt{10}}$ (рис. 6).

6. Пусть $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, где $\frac{a_n}{b_n}$ – несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, при которых выполнено неравенство $b_{n+1} < b_n$.

Решение 1. Пусть $n = p(p-1) - 1$, где p – нечетное простое число.

Заметим, что b_{n+1} не делится на p. Действительно, в соответствующей сумме только знаменатели дробей $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{2p}$, …, $\frac{1}{(p-1)p}$ делятся на p, но их можно сгруппировать попарно так, чтобы знаменатель суммы на p не делился:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)p} = \frac{1}{p-1}, \quad \frac{1}{2p} + \frac{1}{(p-2)p} = \frac{1}{2(p-2)}, \ldots$$

В то же время $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}$.

Пусть числитель и знаменатель последней дроби удалось сократить на d:

$$a_{n+1}(p-1)p \equiv b_{n+1} \pmod{d}, \quad b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}.$$

Тогда $a_{n+1}(p-1)^2p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}$. Числа d и p взаимно просты (иначе b_{n+1} кратно p). Числа d и a_{n+1} тоже взаимно просты (иначе b_{n+1} делится на их общий делитель, то есть a_{n+1} и b_{n+1} не взаимно просты). Поэтому $(p-1)^2$ делится на d. Следовательно, $d \le (p-1)^2$.

Значит, $b_n \ge \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{p-1} > b_{n+1}$, и утверждение задачи следует из бесконечности множества простых чисел.

Решение 2. *(А.Трепалин)* Докажем, что подходят n вида $2{\cdot}3^k - 1$.

Рассмотрим дроби со знаменателями $b_{2\cdot3^k-1}$ и $b_{2\cdot3^k}$.

Имеем $a_{2\cdot3^k-1}/b_{2\cdot3^k-1}=1+1/2+\ldots+1/3^k+\ldots+1/2\cdot3^k-1=p/(q\cdot3^u)+1/3^k=(3^{k-u}p+q)/3^kq$

(где числа p и q взаимно просты друг с другом и с числом 3; $u<k$),

$a_{2\cdot3^k}/b_{2\cdot3^k}=1+\ldots+1/3^k+\ldots+1/2\cdot3^k= p/(q\cdot3^u)+1/3^k+1/2\cdot3^k =(2\cdot3^{k-1-u}p+q)/2\cdot3^{k-1}q$

Имеем $b_{2\cdot3^k-1}>b_{2\cdot3^k}$ (первая дробь несократима, а вторая сократима не более чем на 2).

7. У ведущего есть колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (при этом не уточняя – сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида “Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?”. Один из зрителей подсмотрел, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопро-сов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

Ответ. За 34 вопроса.

Решение. Первый вопрос зритель задает про две крайние карты. Ответ 50 покажет всем, что они в самом деле крайние. Назовем любую из них 1-й (сверху или снизу – нам не важно), тогда другая – 52-я. Теперь уже надо дать возможность все остальные номера карт определить однозначно. Назовем 2-ю карту дыркой, и вторым вопросом спросим про две карты рядом с дыркой (то есть 1-ю и 3-ю). Ответ 1 задает положение 3-й карты однозначно. Далее будем продолжать задавать вопросы парами: в нечетных вопросах называем две самые крайние карты из еще не упомянутых (одна из них была дыркой, другая – недыркой), назначаем новой дыркой ранее неупомянутую карту рядом с недыркой, и следующим четным вопросом спрашиваем про две карты рядом с дыркой. Так, в первой паре вопросов он называет 1-ю, 52-ю и 3-ю карты, во второй – 2-ю, 51-ю и 49-ю карты, в третьей паре – 4-ю, 50-ю и 6-ю карты и т.д. Как видим, дырки по очереди возникают то ближе к началу, то ближе к концу. В отличие от первой тройки для каждой следующей тройки карт после ответов на очередную пару вопросов теоретически есть два возможных расположения: основное (то, что на самом деле) и побочное (крайние карты меняются местами, средняя передвигается соответственно). Так, из ответов на 3-й и 4-й вопросы следует, что вторая тройка карт – это 2, 51 и 49 либо 2, 51 и 4. Эта неопределенность исчезнет, однако, после ответа на следующий (в примере – на 5-й) вопрос. Суть в том, что максимальное число карт между ранее не упомянутыми крайними картами в побочном варианте меньше, чем в основном (см. рис, где карты одной тройки обозначены одинаковой буквой, неопределенная – тройка С):

Основной abaC_C……………………………………bCba
Побочный abaC………………………………..........CbCba

Так задаем 33 вопроса. Последний 34-й вопрос зададим про крайнюю и карту рядом с ней (25-ю и 26-ю) (см. рис, предпоследняя и последняя тройка обозначены буквами p и Q соответственно):

abacdcefeghgijiklkmnmopoQQ_pQpnonlmljkjhihfgfdedbcba

Тогда положение последней тройки и единственной оставшейся карты определится однозначно.

Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Разобьем изначально все карты на 52 группы по одной карте. При вопросе про две карты из разных групп объединяем эти группы в одну. Каждый вопрос уменьшает число групп максимум на одну. Если задано не более 33 вопросов, то останется не менее 52–33=19 групп. Среди них групп из 3 карт – не более 17. Значит, либо найдутся две группы по одной карте, либо группа из ровно двух карт. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым, порядок не восстанавливается однозначно.

Основной вариант, 10-11 классы

1. См. задачу **2** для 8-9 классов.

2. На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что лучи A_1A, B_1B и C_1C являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.

Решение. Проведем биссектрисы внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть биссектрисы внешних углов B_1 и C_1 пересекаются в точке A_2, и т.д. Через точку A_2 проходит также биссектриса угла A_1 (поскольку точка A_2 равноудалена от прямых A_1B_1,

B_1C_1 и A_1C_1), т.е прямая A_1A. Значит, в треугольнике $A_2B_2C_2$ прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами. Докажем, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC совпадают.

Пусть это не так, например, точка A_2 находится вне треугольника ABC. Тогда луч A_2B_2 пере-секает сторону AB треугольника ABB_1 (в точке C_1) и не пересекает сторону AB_1 (их разделяет пря-мая A_2A_1). Следовательно, он пересекает сторону BB_1, то есть точка B_2 находится внутри отрезка BB_1, а значит, внутри треугольника ABC. Аналогично C_2 находится внутри треугольника ABC. Но отрезок B_2C_2 пересекает сторону BC в точке A_1. Противоречие.

Аналогично к противоречию ведет предположение о том, что A_2 находится внутри треугольника ABC.

3. В числе $a = 0{,}12457...$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что a – иррациональное число.

Решение. Пусть это не так: 0,12457... – периодическая десятичная дробь с длиной периода m (и неким предпериодом). Тогда цифры, соответствующим членам нашей последовательности с номерами m, $10m$, $100m$, …, $10^k m$,…, начиная с некоторого момента совпадают. В то же время – это последовательные цифры десятичного разложения иррационального числа $m\sqrt{2}$ (то есть непериодической дроби). Противоречие.

4. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а противоположная вершина – на другом основании призмы?

Первое решение. Нельзя. Рассмотрим центральное сечение призмы. Каждая разрешенная пирамида пересекает его по многоугольнику, площадь которого в 4 раза меньше площади ее основания. Сумма площадей оснований таких пирамид должна быть равна двум основаниям призмы. Но тогда сумма площадей пересечений с центральным сечением равна половине основания призмы. Значит, даже центральное сечение не заполняется целиком.

Второе решение. Сумма объемов пирамид, вершины которых находятся на верхнем осно-вании призмы, не превосходит одной трети объема призмы. То же верно для пирамид с вершиной на нижнем основании. таким образом, сумма объемов пирамид меньше объема призмы.

5. См. задачу 6 для 8-9 классов.

6. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на 12!;

б) делится на 13!.

Решение. Очевидно, правильному расположению карт в колоде соответствует кольцевой обход ладьей (которая может прыгать через клетки!) доски 4×13 (горизонтали соответствуют мастям, а вертикали – достоинствам), начинающийся и кончающийся в клетке, соответствующей тузу пик (будем считать, что это левый нижний угол). Такой обход удобно закодировать, занумеровав клетки от 1 до 52, где 1 стоит в левом нижнем углу, а любая пара соседних номеров (включая 1 и 52) стоит в одной строке или в одном столбце.

а) Совершив любую из $(12! - 1)$ нетривиальных перестановок 12 правых вертикалей, мы из данного обхода получим новый (другая нумерация!). Таким образом, все обходы разбиваются на группы по 12! обходов.

б) Достаточно доказать, что это число делится на 13. Свернем доску в цилиндр, склеив вертикальные стороны. Любой из 12 возможных поворотов цилиндра переводит данный обход в другой, начинающийся уже не с “туза пик”. Но поскольку он проходит через эту клетку, то его можно рассматривать как “правильный обход” (соответствующую нумерацию можно получить, сдвинув все номера на одно и то же число по модулю 52 так, чтобы в левом нижнем углу оказалась 1). Ниже мы покажем, что этот обход отличается от первоначального. Таким образом, все обходы разбиваются на группы по 13 обходов.

Восстановим пропущенный момент. Пусть при повороте некоторый обход переходит в себя. Рассмотрим любой горизонтальный ход (он должен быть). Повторив поворот 13 раз, видим, что из каждой клетки этой горизонтали мы выходили по горизонтали, то есть сменить эту масть нельзя. Противоречие.

7. Положительные числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + \ldots + x_k}{2}, \quad x_1 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Построить пример таких чисел для какого-нибудь k.

в) [Найти минимальное k, для которого пример возможен.

Решения пунктов а) и б)

а) По условию $4\left(x_1^2 + \ldots + x_k^2\right) < 2(x_1 + \ldots + x_k) < x_1^3 + \ldots + x_k^3$. Таким образом, хотя бы для одного числа (пусть для x_1) выполнено неравенство $4x_1^2 < x_1^3$, то есть $x_1 > 4$.

Отсюда $(2x_2^2 - x_2) + \ldots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2\cdot4^2 = -28$.

Поскольку минимум функции $2x^2 - x$ равен $-\frac{1}{8}$, то $k - 1 > 8\cdot28 > 50$.

б) Возьмем $k = 2501$, $x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2501} = 0{,}1$. Тогда $x_1^2 + \ldots + x_{2501}^2 = 100 + 25 = 125$, $x_1 + \ldots + x_{2501} = 10 + 250 = 260$, $x_1^3 + \ldots + x_k^3 > 1000$, и все неравенства выполнены.

Задача. Положительные числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}, \quad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

Найдите минимальное k, при котором это возможно.

Ответ. 516.

Решение. 1. Пусть для некоторого k такие числа $x_1, \ldots, x_k$ существуют. Докажем, что тогда существует и набор вида $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = a < \frac{1}{4}$, $x_k = b > \sqrt{2}$, также удовлетворяющий условию.

Перепишем наши неравенства в виде

$$\sum_{i=1}^{k}(4x_i - 1)^2 < k, \quad \sum_{i=1}^{k}(2x_i - x_i^3) < 0.$$

Пусть $q_i = (4x_i - 1)^2$. Тогда $x_i = \frac{-\sqrt{q_i}+1}{4}$, если $x_i \le \frac{1}{4}$; в противном случае $x_i = \frac{\sqrt{q_i}+1}{4}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \ldots, x_d \le \frac{1}{4}$, $x_{d+1}, \ldots, x_k > \frac{1}{4}$. Тогда $2x_i - x_i^3 = \frac{1}{64}(31 - 3q_i \mp (29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}))$, и наши неравенства запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{k} q_i < k, \quad \sum_{i=1}^{d}(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) + \sum_{i=d+1}^{k}(31 - 3q_i + 29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}) < 0. \qquad (1)$$

Функция $f_2(x) = 31 - 3x + 29x^{1/2} - 3x^{3/2}$, очевидно, выпукла вверх на области определения (каждое слагаемое выпукло вверх). Поэтому, если $d \le n - 2$ (то есть, во второй сумме в последнем неравенстве хотя бы два слагаемых), то q_{d+1} и q_{d+2} можно заменить на $q'_{d+1} = 0$, $q'_{d+2} = q_{d+1} + q_{d+2}$ (соответственно изменив x_i), тем самым уменьшив левую часть второго неравенства в (1) и не изменив сумму q_i. При этом $x'_d = \frac{1}{4}$, то есть для нового набора значение d увеличилось на 1. Так можно продолжать, пока мы не получим $d \ge k - 1$. Заметим, что случай $d = k$ невозможен, так как в этом случае $2x_i - x_i^3 > 0$ при всех i. Значит, в новом наборе $d = k - 1$, и он по-прежнему удовлетворяет неравенствам (1).

Теперь, положив $\overline{q} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} q_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{d}(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) \ge d(31 - 3\overline{q} - 29\overline{q}^{1/2} + 3\overline{q}^{3/2})$$

согласно неравенству Йенсена, так как функция $f_1(x) = 31 - 3x - 29x^{1/2} + 3x^{3/2}$ выпукла вниз на области определения. Таким образом, если все числа $q_1, \ldots, q_d$ заменить на $\overline{q}$, то неравенства (1) будут выполнены (т. к. их сумма не изменится). Мы получили требуемый набор с $k-1$ одинаковым числом $a = x_1 = \cdots = x_{k-1}$ и одним числом $b = x_k$. При этом, очевидно, $a \le \frac{1}{4}$; поскольку $2b - b^3 < 0$, то получаем $b > \sqrt{2}$.

2. Таким образом, осталось выяснить, при каком минимальном k существуют такие $a \le \frac{1}{4}$, $b > \sqrt{2}$, что (здесь $d = k - 1$)

$$da^2 + b^2 < \frac{da + b}{2}, \quad da + b < \frac{da^3 + b^3}{2}.$$

Перепишем эти неравенства в виде

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} < d < \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3}. \qquad (2)$$

Из (2) и вышесказанного следуют условия

$$\frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b} > \frac{2a - a^3}{a - 2a^2}, \quad a \in [0, \tfrac{1}{4}], \quad b > \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Оценим, какое минимальное значение может принимать выражение

$$\frac{2b^2-b}{a-2a^2} \tag{4}$$

при условиях (3). Согласно (2), это и будет оценкой снизу для d.

Положим

$$g(x)=\frac{x^3-2x}{2x^2-x}=\frac{x^2-2}{2x-1}=\frac{1}{4}\left(2x+1-\frac{7}{2x-1}\right).$$

Из последнего представления видно, что $g(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty,\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},+\infty)$.

Первое неравенство в (3) имеет вид $g(a)<g(b)$. Будем уменьшать b, пока не достигнем значения, при котором $g(b)=g(a)$. Так как $g(\sqrt{2})=0<g(a)$, то новое значение будет больше $\sqrt{2}$. При этом, очевидно, (4) уменьшится. Таким образом, мы можем считать, что

$$\frac{b^2-2}{2b-1}=\frac{2-a^2}{1-2a}=t.$$

Теперь a и b — два различных корня квадратного уравнения $x^2-2=t(2x-1)$, поэтому

$$a+b=2t \quad\Rightarrow\quad b=2t-a=2\frac{2-a^2}{1-2a}-a=\frac{4-a}{1-2a}.$$

Теперь выражение (4) принимает вид

$$h(a)=\frac{b(2b-1)}{a(1-2a)}=\frac{7(4-a)}{a(1-2a)^3}.$$

Чтобы найти его минимум на отрезке $a\in[0,\frac{1}{4}]$, найдем нули производной:

$$h'(a)=-\frac{7}{a(1-2a)^3}-\frac{7(4-a)}{a^2(1-2a)^3}+\frac{42(4-a)}{a(1-2a)^4}=\frac{14(-3a^2+16a-2)}{a^2(1-2a)^4}.$$

На отрезке $[0,\frac{1}{4}]$ получаем $a_0=\frac{8-\sqrt{58}}{3}$, причем это — точка минимума. Подставив ее в наше выражение, получаем

$$d>h(a_0)=514,\ldots.$$

Таким образом, $d\geq 515$, а $k\geq 516$.

3. Осталось построить пример для $d=515$. Его легко получить из следующих соображений.

Положим $a=a_0$, $b=\frac{4-a}{1-2a}$. Тогда

$$\frac{2b^2-b}{a-2a^2}=\frac{b^3-2b}{2a-a^3}=514,\ldots. \tag{5}$$

Начнем увеличивать значение b, оставляя a неизменным. Тогда величина $g(b)=\frac{b^3-2b}{2b^2-b}$, как мы выяснили, увеличивается; поэтому правое выражение становится больше, чем левое. Значит, настанет момент, когда правая часть (5) будет больше 515, а левая — по-прежнему меньше 515. Эти a и b будут удовлетворять (3), а значит, являться искомыми.

Можно предъявить и более простой пример. Возьмем $a=\frac{1}{8}$ (это число, довольно близкое к a_0). Соответствующее значение $b=\frac{4-a}{1-2a}=\frac{31}{6}$, при этом

$$\frac{b^3-2b}{2a-a^3}=\frac{b(2b-1)}{a(1-2a)}=\frac{13888}{27}=514\frac{10}{27}.$$

Увеличивая значение b, как и выше, получаем требуемый пример. Например, подходит значение $b=5{,}169$.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур, тренировочный вариант, младшие

1. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \le y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат меньшего числа), а затем заменяет числа на доске числами x и y-x, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на петиной бумажке? [4 балла]

Ответ. Сумма равна xy.

Решение 1. На каждом шаге Петя уменьшает произведение чисел на доске на число, которое он пишет на бумажке: $x(y–x)=xy–x^2$. Поскольку в конце произведение на доске будет равно 0, то сумма на бумажке равна исходному произведению xy.

Решение 2. Нарисуем на плоскости прямоугольник со сторонами x и y. На первом шаге отрежем от этого прямоугольника квадрат со стороной x и запишем его площадь на бумажку, затем отрежем квадрат от оставшегося прямоугольника и т.д. Когда этот процесс закончится, мы фактически разрежем исходный прямоугольник на квадраты, площади которых будут записаны на бумажку. Их сумма равна площади исходного многоугольника, то есть равна xy.

2. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ "да" или "нет" (например: "верно ли, что этот человек – хитрец?").

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? [1 балл]

b) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он. [3 балла]

Решение. а) Спросим каждого «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «Да» вруна и «Нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. По нему мы узнаем ответившего: это либо врун, либо правдивый. Задав ему вопрос про одного из двух других «Верно ли, что он хитрец», мы все узнаем.

Замечания. 1. В начале можно задавать любой вопрос, ответ на который вам известен (например, «Верно ли, что сегодня четверг»).

2. Можно обойтись и 3 вопросами, если они будут достаточно изощренными, что-то вроде: «Ответишь ли он “да”, если я спрошу...».

b) Обозначим участников: врун В, правдивый П, и хитрецы ХВ и ХП. Пусть хитрецы договорятся отвечать так, как будто ХВ врун, ХП – правдивый, В – хитрец, притворяющийся вруном, а П – хитрец, притворяющийся правдивым. Поставив их лицом друг против друга, так что ХП как бы служит отражением П, а ХВ служит отражением В, видим, что невозможно отличить, кто стоит «перед зеркалом», а кто «за зеркалом» – ответы полностью «зеркальны».

3. а) Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1. Докажите, что удастся зачеркнуть одно число, так чтобы произведение оставшихся можно было представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел. [2 балла]

b) Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1, одно из которых равно 2006. Оказалось, что есть только одно такое число среди написанных, что произведение оставшихся представляется в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Докажите, что это число – 2006. [2 балла]

Решение.

Натуральные числа, представимые в виде разности квадратов натуральных чисел, назовем *хорошими*, а не представимые – *плохими*.

Лемма. Число n хорошее $\Leftrightarrow$ n – нечетное число, большее 1, или n кратно 4 и больше 4.

Доказательство леммы.. Пусть n – хорошее, то есть $n=(a^2–b^2)=(a–b)(a+b)$, где a и b – различные натуральные числа. Сомножители в правой части – одинаковой четности (их сумма четна). Они различны (иначе b=0). Если они нечетны, то и n – нечетно и больше 1·1. Если они четны, то n кратно 4 и больше 2·2.

Наоборот, для каждого из этих случаев мы можем разложить n в произведение двух подходящих множителей и найти a и b, решив систему уравнений:

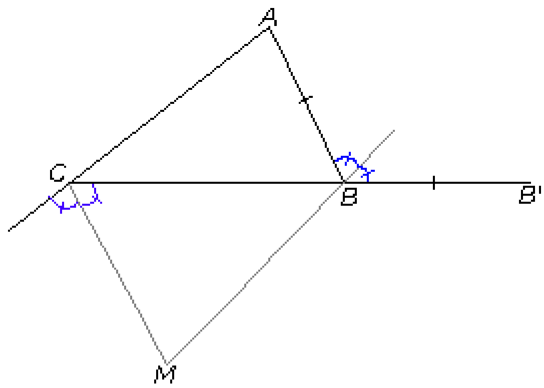
$n=2k+1 \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2k+1 \end{cases} \Rightarrow a=k+1, b=k$

$n=4m\ (m>1) \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=2m \end{cases} \Rightarrow a=m+1, b=m-1$. Лемма доказана.

а) Всегда можно вычеркнуть одно число так, чтобы четных чисел не осталось совсем (произведение будет нечетным) или осталось как минимум два четных числа (произведение будет кратно 4, но больше 4). Действительно, если среди чисел ровно одно четное, зачеркнем его. Если есть ровно два четных – зачеркнем любое кроме этих двух. В остальных случаях можно зачеркнуть любое.

b) Число 2006 – четное. Если есть еще четное число n, то, как показано в а), любое число кроме n и 2006 можно зачеркнуть. Это противоречит условию. Значит, других четных нет. Тогда число 2006 вычеркнуть можно (произведение оставшихся нечетно и больше 1), а никакое другое число вычеркнуть нельзя (поскольку 2006 четно, но не кратно 4 то таким же окажется и произведение оставшихся).

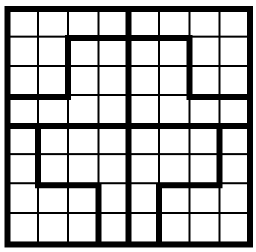
4. На продолжении стороны *BC* треугольника *ABC* за вершину *B* отложен отрезок *BB'*, равный стороне *AB*. Биссектрисы внешних углов при вершинах *B* и *C* пересекаются в точке *M*. Докажите, что точки *A, B', M* и *C* лежат на одной окружности. [4 балла]



Решение. Точка *M* равноудалена от прямых *AC* и *BC* (как лежащая на биссектрисе угла *C*), и от прямых *AB* и *BC* (как лежащая на биссектрисе угла *B*). Поэтому *M* равноудалена от сторон угла *BAC*, и, значит, *AM* – биссектриса этого угла, то есть $\angle BAM=\angle CAM$. Так как *ABB'* – равнобедренный треугольник, то *MB* – серединный перпендикуляр к *AB'*, поэтому $\angle BAM=\angle BB'M$. Тем самым, $\angle CB'M=\angle BB'M=\angle BAM=\angle CAM$. Отрезок *CM* виден из точек *A* и *B'* под равными углами, значит, точки *A, B', M* и *C* лежат на одной окружности.

5. На какое наибольшее число равных невыпуклых многоугольников можно разрезать квадрат так, чтобы все стороны многоугольников были параллельны сторонам квадрата и никакие два из этих многоугольников не получались друг из друга параллельным переносом? (Параллельный перенос – это сдвиг без поворота). [4 балла]

Ответ. На 8 многоугольников.



Решение. Пример разрезания на с 8 многоугольников – см. рис. Покажем, что больше быть не может. Данный многоугольник можно не более, чем 8 способами разместить на плоскости (с точностью до параллельного переноса) с соблюдением условия. Действительно, рассмотрим три его последовательные вершины *A, B* и *C* (их положением многоугольник определяется однозначно). Можно считать, что точка *B* фиксирована. Сторону *BA* можно выпустить из нее 4 способами (в 4 направлениях, параллельным сторонам квадрата), после чего сторону *BC* – двумя способами.

Двадцать восьмой турнир городов

(осенний тур, 10–11 классы, тренировочный вариант)

Решения задач

1. Ответ: xyz.

Решение 1. Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, то есть xyz.

Решение 2. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x, y, z. На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когда отрежем все. Значит на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, то есть xyz.

2. Лемма 1: центры четырех окружностей, вписанных в рассматриваемые треугольники, лежат на вписанной в четырехугольник окружности и являются серединами дуг, стягиваемых соответствующими хордами.

Доказательство: Пусть D — общая вершина сторон четырехугольника, касающихся вписанной окружности в точках K и L. Пусть M — середина дуги KL, лежащей внутри треугольника DKL. Углы MKL и MKD равны, так как опираются на равные дуги, откуда KM — биссектриса угла DKL. Аналогично LM — биссектриса угла DLK. Следовательно, M — точка пересечения биссектрис и центр вписанной в треугольник DKL окружности, ч. т. д.

Обозначим точки касания четырехугольника с вписанной окружностью как A_1, A_2, A_3, A_4 а середины дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 как B_1, B_2, B_3, B_4. Исходя из леммы 1 требуется доказать, что отрезки B_1B_3 и B_2B_4 перпендикулярны. Действительно, пусть они пересекаются в точке N. Тогда угол B_1NB_2 равен полусумме дуг B_1B_2 и B_3B_4, что равно одной четверти суммы дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1, то есть равно $360/4 = 90$ градусов, что и требовалось доказать.

3. Заметим, что среди чисел от 1 до 2006^2 все возможные остатки при делении на 4 (0, 1, 2 и 3) встречаются по 1003^2 раза. Допустим, искомые два числа не найдутся. Разобьем таблицу на 1003^2 квадрата 2×2. Любые два числа в одном квадрате имеют общую сторону или вершину. Поэтому в один квадрат не может попасть более одного числа, дающего при делении на 4 остаток 0, а также более одного числа дающего остаток 2. Но так как чисел каждого из этих видов ровно 1003^2, то в каждый квадрат попадет ровно одно число, дающее остаток 0 и ровно одно число, дающее остаток 2. В оставшихся двух клетках какого-либо квадрата не могут стоять числа, дающие остатки 1 и 3. Следовательно, количество чисел каждого из этих видов четно. Противоречие. Значит, искомые два числа найдутся, ч.т.д.

4. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии (то есть $b_{n+1} = q^n b_1$ при всех натуральных n). Если $q = 1$, то задача решена. Иначе $(b_{n+2} - b_{n+1})/(b_2 - b_1) = q^n$, откуда q — рациональное (ясно, если взять $n = 1$) и кроме того $(b_2 - b_1) \cdot q^n$ — целое число при любом натуральном n. Записывая q в виде несократимой дроби $q = s/t$, получаем, что $(b_2 - b_1)s^n/t^n$ — целое число, и значит $b_2 - b_1$ делится на t^n при любом n. Это возможно только если $t = 1$ или $t = -1$, то есть когда q — целое.

5. Ответ: да, можно.

Решение: Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб с длиной ребра 1. Отметим на ребрах AB, AD, AA_1, C_1C, C_1B_1, C_1D_1 точки M_1, M_2, ..., M_6 соответственно так, чтобы $AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = 3/4$. Тогда длины отрезков M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_4 равны $\sqrt{(3/4)^2 + (3/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$, а длины отрезков M_1M_4, M_1M_5, M_2M_4, M_2M_6, M_3M_5, M_3M_6 равны $\sqrt{(1/4)^2 + 1^2 + (1/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$. Так как длины всех двенадцати отрезков равны, то все треугольники $M_1M_2M_3$, $M_4M_5M_6$, $M_1M_4M_5$, $M_2M_4M_6$, $M_3M_5M_6$, $M_4M_1M_2$, $M_5M_1M_3$, $M_6M_2M_3$ равносторонние и точки M_1, M_2,..., M_6 являются вершинами октаэдра.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2006**[1]

1. Two positive integers are written on the blackboard. Mary records in her notebook the square of the smaller number and replaces the larger number on the blackboard by the difference of the two numbers. With the new pair of numbers, she repeats the process, and continues until one of the numbers on the blackboard becomes zero. What will be the sum of the numbers in Mary's notebook at that point?

2. A Knight always tells the truth. A Knave always lies. A Normal may either lie or tell the truth. You are allowed to ask questions that can be answered with "yes" or "no", such as "Is this person a Normal?"

   (a) There are three people in front of you. One is a Knight, another one is a Knave, and the third one is a Normal. They all know the identities of one another. How can you too learn the identity of each?

   (b) There are four people in front of you. One is a Knight, another one is a Knave, and the other two are Normals. They all know the identities of one another. Prove that the Normals may agree in advance to answer your questions in such a way that you will not be able to learn the identity of any of the four people.

3. (a) Prove that from 2007 given positive integers, one of them can be chosen so the product of the remaining numbers is expressible in the form $a^2 - b^2$ for some positive integers a and b.

   (b) One of 2007 given positive integers is 2006. Prove that if there is a unique number among them such that the product of the remaining numbers is expressible in the form $a^2 - b^2$ for some positive integers a and b, then this unique number is 2006.

4. Given triangle ABC, BC is extended beyond B to the point D such that $BD = BA$. The bisectors of the exterior angles at vertices B and C intersect at the point M. Prove that quadrilateral $ADMC$ is cyclic.

5. A square is dissected into n congruent non-convex polygons whose sides are parallel to the sides of the square, and no two of these polygons are parallel translates of each other. What is the maximum value of n?

Note: The problems are worth 4, 1+3, 2+2, 4 and 4 points respectively.

oreore

[1] Courtesy of Professor Andy Liu.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS.
Solutions

Junior O-Level Paper **Fall 2006**[1]

1. We claim that the sum of the numbers in Mary's notebook is equal to the product of the two numbers originally on the blackboard. We use induction on the number n of steps for Mary to reduce one of the numbers to 0. For $n = 1$, the two numbers on the blackboard must be equal to each other. In recording the square of the smaller number, Mary is in fact recording the product of the two numbers. Suppose the claim holds for some $n \geq 1$. Let the original numbers be x and y with $x < y$. Then Mary records x^2 in her notebook and replaces y by $y-x$. By the induction hypothesis, the sum of the remaining numbers in her notebook is equal to $x(y-x)$, so that the sum of all the numbers in her notebook is equal to $x^2+x(y-x) = xy$.

2. (a) Ask each of the three people: "Are you a Normal?" Since the Knight and the Knave will give opposite answers, the three answers consist of a matching pair and an odd one out. If the odd answer is "Yes", the replier is the Knight, and if the odd answer is "No", the replier is the Knave. From this person, we can learn the identity of all three people.

   (b) The first Normal will act as though he is a Knight while the second Normal will act as though he is a Knave. Then we cannot tell the difference between the first Normal and the Knight, nor between the second Normal and the Knave.

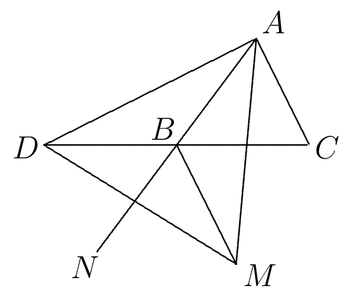
3. Suppose a number is expressible in the form $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. If a and b are of the same parity, then the product is divisible by 4. If they are of opposite parity, then the product is odd. Conversely, a number of the form $4n$ may be expressed as $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ while a number of the form $2n + 1$ may be expressed as $(n + 1)^2 - n^2$. Hence a number is not expressible in the form $a^2 - b^2$ if and only if it is of the form $4n + 2$. The only way in which a product takes the form $4n + 2$ is when exactly one of the factors is of that form, and the others are odd.

   (a) Suppose an even number of the 2007 numbers is of the form $4n+2$. Then there exists at least one number not of this form, and we choose this number. Suppose an odd number of the 2007 numbers is of the form $4n + 2$. Then we choose any of these. Among the remaining 2006 numbers, there will not be exactly one number of the form $4n+2$. Hence their product is expressible in the form $a^2 - b^2$.

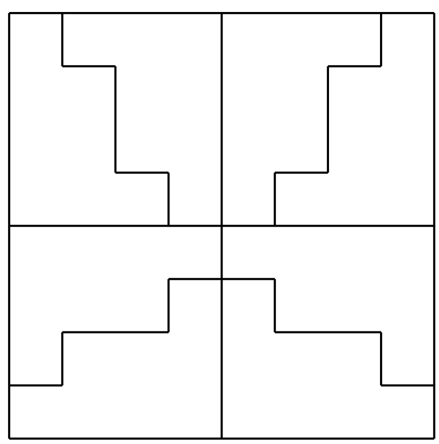
   (b) If there is a number of the form $4n + 2$ other than 2006, then any of the other 2005 numbers may be chosen so that the product of the remaining 2006 numbers will not be of the form $4n + 2$. Hence the choice will not be unique. It follows that 2006 is the only number of the form $4n + 2$, and it must be the chosen number.

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

4. Note that $\angle NBD = \angle ABC$ and $\angle NBM = \angle CBM$. Hence $\angle DBM = \angle ABM$. Since we also have $BD = BA$ and $BM = BM$, triangles DBM and ABM are congruent, so that $\angle MDC = \angle MAN$. Now M is an excentre of triangle ABC. Hence $\angle MAN = \angle MAC$. From $\angle MDC = \angle MAC$, we can conclude that A, C, M and D are concyclic.



5. The maximum value of n is at most 8 because such a polygon can only have 8 possible orientations. We may use each of them once as otherwise we would have two copies which are parallel translates of each other. The maximum value is in fact 8 as it is attained by the polygon in the diagram below.



International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2006**[1]

1. Three positive integers x and y are written on the blackboard. Mary records in her notebook the product of any two of them and reduces the third number on the blackboard by 1. With the new trio of numbers, she repeats the process, and continues until one of the numbers on the blackboard becomes zero. What will be the sum of the numbers in Mary's notebook at that point?

2. The incircle of the quadrilateral $ABCD$ touches AB, BC, CD and DA at E, F, G and H respectively. Prove that the line joining the incentres of triangles HAE and FCG is perpendicular to the line joining the incentres of triangles EBF and GDH.

3. Each of the numbers 1, 2, 3, $\ldots$, 2006^2 is placed at random into a cell of a 2006×2006 board. Prove that there exist two cells which share a common side or a common vertex such that the sum of the numbers in them is divisible by 4.

4. Every term of an infinite geometric progression is also a term of a given infinite arithmetic progression. Prove that the common ratio of the geometric progression is an integer.

5. Can a regular octahedron be inscribed in a cube in such a way that all vertices of the octahedron are on cube's edges?

Note: The problems are worth 4, 4, 4, 4 and 5 points respectively.

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

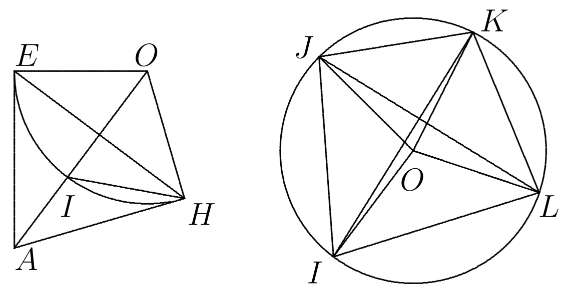
International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS.
Solutions

Senior O-Level Paper **Fall 2006**[1]

1. We claim that the sum of the numbers in Mary's notebook is equal to the product of the three numbers originally on the blackboard. We use induction on the number n of steps for Mary to reduce one of the numbers to 0. For $n = 1$, one of the three numbers on the blackboard must be equal to 1 and is reduced to 0. In recording the product of the other two numbers, Mary is in fact recording the product of all three numbers. Suppose the claim holds for some $n \geq 1$. Let the original numbers be x, y and z. By symmetry, we may assume that Mary records xy in her notebook and replaces z by $z - 1$. By the induction hypothesis, the sum of the remaining numbers in her notebook is equal to $xy(z - 1)$, so that the sum of all the numbers in her notebook is equal to $xy + xy(z - 1) = xyz$.

2. Let O be the incentre of $ABCD$. Let AO intersect the incircle of $ABCD$ at I. Let $\angle AOH = \angle AOE = 2\alpha$. Since $\angle AHO = 90° = \angle AEO$, A, E, O and H are concyclic, so that $\angle AHE = \angle AOE = 2\alpha$. We have $\angle OAH = 180° - \angle AOH - \angle AHO = 90° - 2\alpha$ and since $OH = OI$, $\angle OIH = \frac{1}{2}(180° - \angle IOH) = 90° - \alpha$. It follows that $\angle AHI = \angle OIH - \angle OAH = \alpha = \frac{1}{2}\angle AHO$. Hence I is the incentre of triangle HAE. Similarly, the respective incentres J, K and L of triangles EBF, FCG and GDH all lie on the incircle of $ABCD$. Let $\angle BOE = \angle BOF = 2\beta$, $\angle COF = \angle COG = 2\gamma$ and $\angle DOG = \angle DOH = 2\delta$. Then $\angle IOJ + \angle KOL = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Now $\angle ILJ + \angle KIL = \frac{1}{2}(\angle IOJ + \angle KOL) = 90°$. Hence IK and JL are perpendicular to each other.

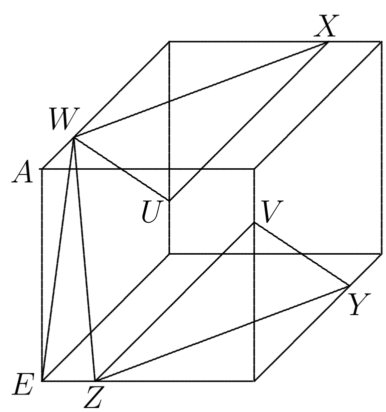


3. We can replace each number by the remainder obtained when it is divided by 4. Thus we have 1003^2 copies of each of 0, 1, 2 and 3. Divide the board into 1003^2 2×2 subboards. Each subboard may contain at most one 0 and at most one 2. Since we have exactly as many copies of each number as we have subboards, there is exactly one 0 and exactly one 2 in each subboard. The remaining two cells in each subboard must both contain copies of 1 or both contain copies of 3. However, this is impossible as we have an odd number of copies of each of 1 and 3.

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

4. Let the first term and the common difference of the arithmetic progression be a and $d > 0$ respectively. Let the first term and the common ratio of the geometric progression be b and $r > 1$ respectively. Then $b = a + id$, $br = a + jd$ and $br^2 = a + kd$ for some integers i, j and k such that $0 \leq i < j < k$. It follows that $b(r-1) = (j-i)d$ and $br(r-1) = (k-j)d$, so that $r = \frac{k-j}{j-i}$ is a rational number. Let $t = \frac{a}{d}$. From $a + jd = br = r(a + id)$, we have $t + j = rt + ri$. Hence $t = \frac{j-ri}{r-1}$ is also rational. Divide all the terms of both progressions by d. Then the arithmetic progression has first term t and common difference 1 while the geometric progression has first term $\frac{b}{d}$ and common ratio r. Let $t = \frac{p}{q}$ where p and q are relatively prime positive integers. Then all terms in the arithmetic progression are of the form $\frac{p+kq}{q}$ for some non-negative integer k. If r is not an integer, then when n is a sufficiently large positive integer, the expression of $\frac{b}{d}r^n$ as a fraction in the simplest terms will have a denominator greater than q. This contradicts the hypothesis that every term of the geometric progressoin is a term of the arithmetic progression.

5. The task is possible. Let the side length of the cube be 4. In the diagram below, each of U, V, W, X, Y and Z is at a distance 1 from the nearest vertex of the cube. Clearly, UWX and VYZ are equilateral triangles with side length $3\sqrt{2}$. Note that $\angle EAW = 90° = \angle WEZ$. Hence $WZ = \sqrt{EZ^2 + EA^2 + WA^2} = 3\sqrt{2}$ also. By symmetry, WV, XV, XY, UY and UZ all have the same length. It follows that $UVWXYZ$ is indeed a regular octahedron.



Juniors
(Grades up to 10)

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

A-Level Paper **Fall 2006.**[1]

1 **[3]** Two regular polygons, a 7-gon and a 17-gon are given. For each of them two circles are drawn, an inscribed circle and a circumscribed circle. It happened that rings containing the polygons have equal areas. Prove that sides of the polygons are equal.

2 **[5]** When Ann meets new people, she tries to find out who is acquainted with who. In order to memorize it she draws a circle in which each person is depicted by a chord; moreover, chords corresponding to acquainted persons intersect (possibly at the ends), while the chords corresponding to non-acquainted persons do not. Ann believes that such set of chords exists for any company. Is her judgement correct?

3 A 3×3 square is filled with numbers: a, b, c, d, e, f, g, h, i in the following way:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Given that the square is magic (sums of the numbers in each row, column and each of two diagonals are the same), show that

a) **[3]** $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

b) **[3]** $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

4 **[6]** A circle of radius R is inscribed into an acute triangle. Three tangents to the circle split the triangle into three right angle triangles and a hexagon that has perimeter Q. Find the sum of diameters of circles inscribed into the three right triangles.

5 Consider a square painting of size 1×1. A rectangular sheet of paper of area 2 is called its "envelope" if one can wrap the painting with it without cutting the paper. (For instance, a 2×1 rectangle and a square with side $\sqrt{2}$ are envelopes.)

a) **[4]** Show that there exist other envelopes.

b) **[3]** Show that there exist infinitely many envelopes.

6 **[8]** Let $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n = a_n/b_n$, where a_n and b_n are relatively prime. Show that there exist infinitely many positive integers n, such that $b_{n+1} < b_n$.

7 **[9]** A Magician has a deck of 52 cards. Spectators want to know the order of cards in the deck (without specifying face-up or face-down). They are allowed to ask the questions "How many cards are there between such-and-such card and such-and-such card?" One of the spectators knows the card order. Find the minimal number of questions he needs to ask to be sure that the other spectators can learn the card order.

[1]Your total score is based on the three problems for which you earn the most points. Points for each problem are shown in brackets [ ].

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Solutions[1] **A-level, Juniors** **Fall, 2006**

1. Let $2a$ be the length of a side of a regular polygon, while r and R be the radii of its inscribed and circumscribed circles. Since the radius of the inscribed circle is perpendicular to the side of the polygon and touches it at its midpoint, then $a^2 + r^2 = R^2$. Therefore, the area of the ring between the circles is equal to $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$. This implies the statement of the problem.

2. Counterexample. Consider a company: a host with three sons and three guests. The guests do not know each other, the host knows all the guests, while each son knows only two guests. No two sons know the same pair of the guests. It is clear, that the guests chords intersect the host chord in three distinct points; one point is between two others. So, the guest chord through this point separates two other guest chords. Therefore, the chord of the son who knows only two latter guests must intersect the guest chord in between. Contradiction.

3. a) Let S be a magic sum. Then
$$(a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i) = 4S = 2(b+e+h)+2(d+e+f). \quad (1)$$
Subtracting $(b+d+f+h)$ from both sides, we get $2(a+c+g+i){=}b+d+f+h+4e$.

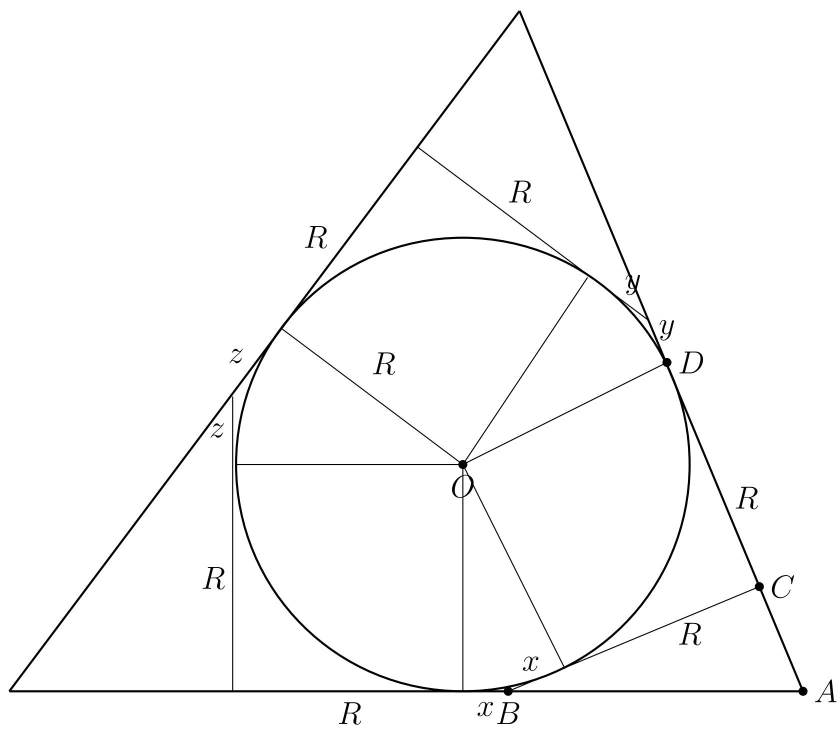
   b) Let us notice that $a+i = c+g = b+h = d+f = S-e$. Combining with (1) we get $4(S-e) = 2(S-e)+4e$; therefore, $S = 3e$. Next, let us prove
$$2(a^2+c^2+g^2+i^2) = b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2. \quad (2)$$
We have $a+c = S-b = h+e$, $c+i = S-f = d+e$, $g+i = S-h = b+e$, $a+g = S-d = f+e$. In addition, we have
$$ac+ci+ag+gi = (a+i)(c+g) = (S-e)^2 = 2e(S-e) = e(b+d+f+h).$$
Therefore,
$$\begin{aligned}&2(a^2+c^2+g^2+i^2) =\\ &(a+c)^2+(c+i)^2+(a+g)^2+(g+i)^2-2(ac+ci+ag+gi) =\\ &(h+e)^2+(d+e)^2+(f+e)^2+(b+e)^2-2e(b+d+f+h) =\\ &b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2.\end{aligned}$$
To finish the proof let us notice that the statement of b) holds if we increase each entry of the table by the same value. Really,
$$\begin{aligned}&2((a+t)^3+(c+t)^3+(g+t)^3+(i+t)^3) =\\ &\quad 2((a^3+c^3+g^3+i^3)+3t(a^2+c^2+g^2+i^2)+3t^2(a+c+g+i)+4t^3) =\\ &b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3+3t(b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2)+3t^2(b+d+f+h+4e)+8t^3 =\\ &\qquad (b+t)^3+(d+t)^3+(f+t)^3+(h+t)^3+4(e+t)^3.\end{aligned}$$
Therefore, it is enough to consider the case $e = 0$. However, in this case the statement is obvious, since $a+i = c+g = b+h = d+f = 2e = 0$.

[1] by L. Mednikov, A. Shapovalov

4. Let us notice that the hexagon constructed is split into six quadrilaterals by points of tangency of its inscribed circle. It is easy to see that three of them are squares with side R.

   Then, perimeter of the hexagon is $Q = 6R + 2x + 2y + 2z$ where x, y, and z are defined by a picture below. We use as well known fact that diameter of a circle inscribed into right angle triangle is equal to sum of of its legs minus hypothenuse. Let r_1 be radius of a circle inscribed into right angle triangle ABC.

   Then $2r_1 = AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x$. In similar way, we find that $2y$ and $2z$ are the diameters of the two other circles. Then the sum in question equals $2x + 2y + 2z = Q - 6R$.



5. Look at next page

6 Let us consider $n = p(p-1) - 1$, where p is an odd prime number. Notice, that b_{n+1} is not divisible by p. Really, in the corresponding sum of fractions only denominators of the fractions $\frac{1}{p}, \frac{1}{2p}, \ldots, \frac{1}{(p-1)p}$ are divisible by p.

   However, by regrouping the fractions

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)p} = \frac{1}{(p-1)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-2)p} = \frac{1}{2(p-2)}$$

   etc., we see that no factor of b_{n+1} is divisible by p.

   We have

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{(a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1})}{b_{n+1}(p-1)p}.$$

   Assuming that this fraction is reducible by factor d we get: $a_{n+1}(p-1)p = b_{n+1} \mod d$, and $b_{n+1}(p-1)p = 0 \mod d$.

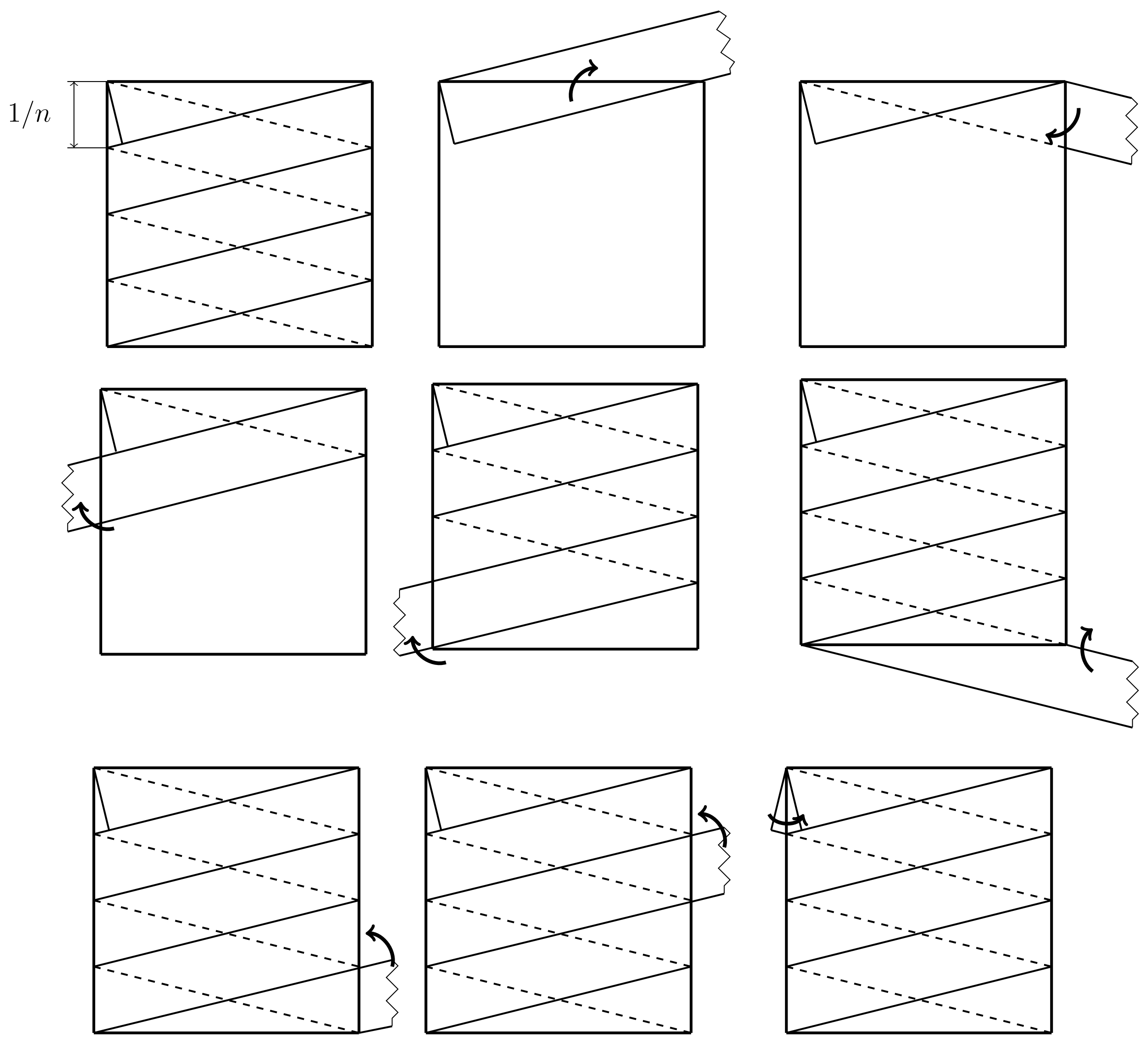
Then, $a_{n+1}(p-1)^2p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \pmod d$. Note, that $\gcd(d,p)=1$ (otherwise, b_{n+1} is divisible by p) and $(d, a_{n+1})=1$ (otherwise, b_{n+1} is divisible by their common divisor which implies that a_{n+1} and b_{n+1} share a common factor). Thus, $(p-1)^2$ is divisible by d. Therefore, $d \le (p-1)^2$.

Then,

$$b_n \ge \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{(p-1)} > b_{n+1}.$$

Statement of the problem follows from the latter estimate and the fact that number of primes is infinite.

5 b) Consider a set of rectangles with sides $1/\sqrt{n^2+1}$ and $2\sqrt{n^2+1}$. See the picture below to learn how to wrap a square with these rectangles.



7 Answer: 34.

Solution. In his first question, spectator (S) calls the top and bottom cards. The answer "50" reveals two outmost cards. Let us number either of them by 1 and the other by 52, defining the order of the deck. Then, S calls the pair $(1, 3)$. The answer "1" reveals the card numbered 3 (S intentionally skips card 2, which we refer to as the "space"). He continues to ask questions in pairs. In odd questions he calls two farthest unmentioned cards (one of them is "space", we refer to the other as the "antispace"), reassigns unmentioned card adjacent to "antispace" as new "space" and in his next (even) question he calls two cards adjacent to "space".

Thus, in the second pair of the questions, S calls the pairs $(2, 51)$ (two farthest unmentioned cards) and $(51, 49)$ (two cards adjacent to "space"). Next pair of questions is $(50, 4), (4, 6)$, then $(5, 48), (48, 46)$ and so on. After the first pair of questions, the audience is aware that the situation is the following (revealed cards are boxed):

$\boxed{1}\quad 2\quad \boxed{3}\quad 4\quad 5\quad 6\quad \dots\quad 48\quad 49\quad 50\quad 51\quad \boxed{52}$

Notice that while the first pair of questions reveals all three of mentioned cards, the second pair of questions would leave two possible arrangements. We refer to the actual arrangement of cards as the "main case" and to the other possible arrangement of cards as the "auxiliary case".

So, after the second pair of questions, the situation is one of the following (cards that have been mentioned but not yet revealed are underlined):

$\boxed{1}\quad \underline{2}\quad \boxed{3}\quad 4\quad 5\quad 6\quad \dots\quad 48\quad \underline{49}\quad 50\quad \underline{51}\quad \boxed{52}$ (main case)

$\boxed{1}\quad \underline{2}\quad \boxed{3}\quad \underline{4}\quad 5\quad 6\quad \dots\quad 48\quad 49\quad 50\quad \underline{51}\quad \boxed{52}$ (auxiliary case)

To distinguish the main and auxiliary cases, we observe that the distance between the two farthest unmentioned cards is different (it is lower in the auxiliary case). The answer on next question would eliminate the auxiliary case.

Really, the fifth question names cards $(50, 4)$. The answer "45" leaves the main case; otherwise, the answer would be "44".

Thus, after 5 questions (in total) we come to the following situation:

$\boxed{1}\quad \boxed{2}\quad \boxed{3}\quad \underline{4}\quad 5\quad 6\quad \dots\quad 48\quad \boxed{49}\quad \underline{50}\quad \boxed{51}\quad \boxed{52}$

One may check that after 33 questions we get:

$\boxed{1}\quad \dots\quad \boxed{24}\quad \underline{25}\quad 26\quad 27\quad \boxed{28}\quad \underline{29}\quad \boxed{30}\quad \dots\quad \boxed{52}$

In his last question S calls $(25, 26)$. The answer 0 eliminates an auxiliary case, and (27) card is revealed as the last card left.

Now let us show that 33 (or less) questions are not enough. Let us assume that originally all the cards are split into 52 groups; one card in each group. In case of a question when named cards belong to different groups, we combine these groups into one. So, each question decreases the number of groups maximum by one. Therefore, after 33 questions the number of groups left is no less than $52 - 33 = 19$. Among them the number of groups consisting of at least 3 cards is no more than 17. Thus, there are either two groups consisting of one card or there is a group consisting of exactly 2 cards. In either case if these two cards trade places, while the rest of the cards remain untouched, then the answers will be the same. This means that the order of cards can not be restored uniquely.

Seniors
(Grades 11 and 12)

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

A-Level Paper **Fall 2006.**[2]

1 [4] When Ann meets new people, she tries to find out who is acquainted with who. In order to memorize it she draws a circle in which each person is depicted by a chord; moreover, chords corresponding to acquainted persons intersect (possibly at the ends), while the chords corresponding to non-acquainted persons do not. Ann believes that such set of chords exists for any company. Is her judgement correct?

2 [6] Suppose ABC is an acute triangle. Points A_1, B_1 and C_1 are chosen on sides BC, AC and AB respectively so that the rays A_1A, B_1B and C_1C are bisectors of triangle $A_1B_1C_1$. Prove that AA_1, BB_1 and CC_1 are altitudes of triangle ABC.

3 [6] The n-th digit of number $a = 0.12457\ldots$ equals the first digit of the integer part of the number $n\sqrt{2}$. Prove that a is irrational number.

4 [6] Is it possible to split a prism into disjoint set of pyramids so that each pyramid has its base on one base of the prism, while its vertex on another base of the prism ?

5 [7] Let $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n = a_n/b_n$, where a_n and b_n are relatively prime. Show that there exist infinitely many positive integers n, such that $b_{n+1} < b_n$.

6 Let us say that a deck of 52 cards is arranged in a “regular” way if the ace of spades is on the very top of the deck and any two adjacent cards are either of the same value or of the same suit (top and bottom cards regarded adjacent as well). Prove that the number of ways to arrange a deck in regular way is

a) [**3**] divisible by 12!

b) [**5**] divisible by 13!

7 Positive numbers $x_1, \ldots, x_k$ satisfy the following inequalities:

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2} \quad \text{and} \quad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

a) [**3**] Show that $k > 50$;

b) [**3**] Give an example of such numbers for some value of k;

c) [**3**] Find minimum k, for which such an example exists.

---

[2]Your total score is based on the three problems for which you earn the most points. Points for each problem are shown in brackets [ ].

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Solutions[1] A-level, Seniors **Fall, 2006**

1. Counterexample. Consider a company: a host, his three sons and three guests. The guests do not know each other, the host knows all the guests, while each son knows only two guests. No two sons know the same pair of the guests. It is clear, that guests chords intersect the host chord in three distinct points; one point is between the others two. Further, this two guest chords lie on the different sides of the guest chord in between. Then the chord of the son who knows only these two guests must intersect the middle chord. Contradiction.

2. Consider triangle $A_1B_1C_1$. Let A_2 be intersection point of bisectors of exterior angles B_1 and C_1, while B_2 and C_2 be intersections of bisectors of exterior angles A_1 and C_1, and A_1 and B_1 respectively. Notice, that A_2 is equidistant from side B_1C_1, extension of side A_1B_1 and extension of side A_1C_1. Therefore, A_2 belongs to bisector A_1A; moreover, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 are altitudes of triangle $A_2B_2C_2$. Let us prove that triangle $A_2B_2C_2$ and triangleABC coincide. Assume that A_2 is outside of triangle ABC. Note, that ray A_2B_2 intersects side AB of triangle ABB_1 at C_1 and does not intersect side AB_1 since sides AB and AB_1 are separated by A_2A_1. Therefore, B_2 is inside of triangle ABC. In the same way C_2 is inside of triangle ABC. However, segment B_2C_2 must intersect side BC at point A_1. Contradiction.

3. Let us assume that a is rational. Then a is periodic decimal fraction with period k. Then starting from some place the digits occupying the positions $k,\ 10k, \dots, 10^m k, \dots$ coincide. On the other hand, these are consecutive digits of representation $\sqrt{k}$. However, an irrational number cannot be represented by periodical fraction. Therefore, a is irrational.

4. Answer: no.

   The total sum of volumes of the pyramids with bases on the bottom base of the prism does not exceed one third of the prism volume. The same is true for the pyramids with bases on the top base of the prism. Therefore, the total sum of volumes of all the pyramids is less than the volume of the prism. Contradiction.

5. Let us consider $n = p(p-1) - 1$, where p is an odd prime number. Notice, that b_{n+1} is not divisible by p. Really, in the corresponding sum only denominators of the fractions $\frac{1}{p}, \frac{1}{2p}, \dots, \frac{1}{(p-1)p}$ are divisible by p.

   However, by regrouping the fractions in the following way:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)p} = \frac{1}{(p-1)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-2)p} = \frac{1}{2(p-2)}$$

   etc., we see that no factor of b_{n+1} is divisible by p.

   We have

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{(a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1})}{b_{n+1}(p-1)p}.$$

[1]by L. Mednikov, A. Shapovalov

Assuming that this fraction is reducible by factor d we get: $a_{n+1}(p-1)p = b_{n+1}(\text{mod } d)$, and $b_{n+1}(p-1)p = 0(\text{mod } d)$.

Then, $a_{n+1}(p-1)^2p^2{=}b_{n+1}(p-1)p \pmod d$. Note, that $\gcd(d,p) = 1$ (otherwise, b_{n+1} is divisible by p) and $(d, a_{n+1}) = 1$ (otherwise, b_{n+1} is divisible by their common divisor which implies that a_{n+1} and b_{n+1} share a common factor). Thus, $(p-1)^2$ is divisible by d. Therefore, $d \le (p-1)^2$.

Then,

$$b_n \ge \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{(p-1)} > b_{n+1}.$$

Statement of the problem follows from the latter estimate and the fact that number of primes is infinite.

6. Consider a 4×13 board, where the rows correspond to the suits while the columns correspond to the values. A rook starts from left-bottom corner corresponding to Ace of Spade, visits each square of the board ones, and returns to the original square. (A rook can move either horizontally or vertically; it can jump through squares). It is clear that there is one-to-one correspondence between the number of the arrangements of a deck in a regular way and the number of rook circuits on this board. Let us code the circuits by placing the numbers from 1 to 52 in squares that rook visits on its way. For any circuit, the path starts and ends in square number 1; moreover, any two consecutive numbers are placed either at the same row or at the same column.

   a) Consider a circuit. Assume, that the first column is fixed. Notice, that if any two other columns trade places then we get a new circuit (different numeration of the table). Then by permuting 12 columns we get 12! of circuits that belong to the same group. Therefore, the number of circuits is a factor of 12!

   b) Let us prove that the number of circuits is also a factor of 13. Let us fold the board into a cylinder by joining its vertical sides. Any of 12 possible rotations of the cylinder transforms a given circuit to a new one that starts from square with the number different of 1. However, since the path still passes through the square with number 1, we may consider it as a regular circuit. Really, the corresponding numeration can be obtained by shifting all the numbers by the same value (modulo 52), so we get 1 at the left-bottom corner. Let us prove that new circuit is different from the original one. Assume that under some rotation a circuit transforms into itself. Let us consider any horizontal move (there must be one). Note, that 13 is a prime number. Thus, if we repeat this rotation 13 times then we would come to original point and each square of the horizontal would be visited; moreover, the only possible exit from any square of this horizontal is a horizontal one. This implies, that it is not possible to change a suit. Contradiction.

7. a) An inequality

$$4(x_1^2 + \cdots + x_k^2) < 2(x_1 + \cdots + x_k) < (x_1^3 + \cdots + x_k^3)$$

   implies that for at least one value (let it be x_1) we have $4x_1^2 < x_1^3$. Therefore, $x_1 > 4$. Then $(2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2 \cdot 4^2 = -28$. Since the minimum of $2x^2 - x$ is $-1/8$, then $k - 1 > 8 \cdot 28 > 50$.

b) Consider, for example, $k = 2501, x_1 = 10, x_2 = x_3 = \cdots = x_{2501} = 0.1$. Then

$$\begin{aligned}
x_1^2 + \cdots + x_{2501}^2 &= 100 + 25 = 125,\\
x_1 + \cdots + x_{2501} &= 10 + 250 = 260,\\
x_1^3 + \cdots + x_{2501}^3 &> 1000.
\end{aligned}$$

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper[1] **Spring 2007.**

1. The sides of a convex pentagon are extended on both sides to form five triangles. If these triangles are congruent to one another, does it follow that the pentagon is regular?

2. Two 2007-digit numbers are given. It is possible to delete 7 digits from each of them to obtain the same 2000-digit number. Prove that it is also possible to insert 7 digits into the given numbers so as to obtain the same 2014-digit number.

3. What is the least number of rooks that can be placed on a standard 8×8 chessboard so that all the white squares are attacked? (A rook also attacks the square it is on, in addition to every other square in the same row or column.)

4. Three nonzero real numbers are given. If they are written in any order as coefficients of a quadratic trinomial, then each of these trinomials has a real root. Does it follow that each of these trinomials has a positive root?

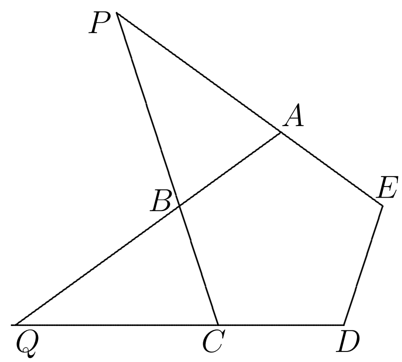
5. A triangular pie has the same shape as its box, except that they are mirror images of each other. We wish to cut the pie in two pieces which can fit together in the box without turning either piece over. How can this be done if
   (a) one angle of the triangle is three times as big as another;
   (b) one angle of the triangle is obtuse and is twice as big as one of the acute angles?

Note: The problems are worth 4, 4, 4, 4 and 1+4 points respectively.

[1] Courtesy of Professor Andy Liu

Solution to Junior O-Level Spring 2007

1. Let $ABCDE$ be the pentagon and PAB and QBC be two of the triangles formed. Let $\angle PAB = \alpha$, $\angle ABP = \beta$ and $\angle BPA = \gamma$. Then $\angle QBC = \beta$ also. Since the two triangles are congruent to each other, $\angle CQB = \alpha$ or γ. It cannot be α as otherwise AE and CD would be parallel, and their extensions will not meet each other to form one of the five triangles. Hence we must have $\angle CQB = \gamma$, and it follows that all five angles away from the pentagon are equal to γ. This means that the angles of the pentagon are equal to $180°-\alpha$ and $180°-\beta$ alternately. Since five is an odd number, this means that $\alpha = \beta$, and the pentagon is equiangular. It is also equilateral as its sides are the sides of the triangles facing the angles equal to γ. Hence the pentagon must be regular.

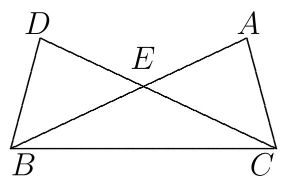


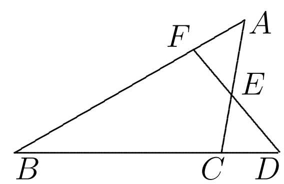
2. To the 2000-digit number, add back the 7 digits deleted from the two 2007-digit numbers. Digits inserted between the same two digits of the 2000-digit number can be arranged in any order. This yields a 2014-digit number. It is obtainable from either 2007-digit number by inserting the 7 digits from the other 2007-digit number.

3. A rook on a black square attacks exactly 8 white squares. A rook on a white square attacks exactly 7 white squares. Since there are 32 white squares overall, we need at least 4 rooks. Labelling the ranks a to h and the files 1 to 8 and using the convention that a1 is a black square, we can show that 4 is indeed the minimum by placing a rook on each of a7, c5, e3 and g1.

4. Since the three numbers a, b and c are all non-zero, 0 is not a root of any of the six trinomials under consideration. Suppose that $ax^2 + bx + c$ has two negative roots $-r$ and $-s$, where r and s are positive numbers. Then $ax^2 + bx + c = a(x + r)(x + s)$, so that $b = a(r + s)$ and $c = ars$ both have the same sign as a. Hence we may assume that they are all positive. Since one of the roots is real, both are real, so that we have $b^2 \geq 4ac$. Similarly, $c^2 \geq 4ab$ and $a^2 \geq 4bc$. Multiplication yields $(abc)^2 \geq (8abc)^2$, which is a contradiction. It follows that each of the six trinomials has a positive root.

5. (a) Let the pie be represented by triangle ABC in which $\angle ABC = \theta$ and $\angle BCA = 3\theta$. Let D be the image of A under the reflection about the perpendicular bisector of BC. (See the diagram below to the left.) Let AB and DC intersect at E. Then triangle DBC represents the box. Now $\angle BCD = \angle ABC = \theta$ so that $\angle DCA = \angle BCA - \angle BCD = 2\theta$. On the other hand, $\angle AEC = \angle ABC + \angle BCD = 2\theta$ also. Hence triangle AEC is isosceles, as is triangle DEB which is congruent to it by reflection. Hence if we cut the pie along CE, we can fit the two pieces inside the box.





(b) Let the pie be represented by triangle ABC in which $\angle CAB = \theta$ and $\angle BCA = 2\theta$. Let D and F be the respective images of A and C under the reflection about the bisector of $\angle ABC$. (See the diagram above to the right.) Let AC and DF intersect at E. Then triangle DBF represents the box. Now $\angle BDF = \angle CAB = \theta$. It follows that

$$\angle DEC = \angle BCA - \angle BDF = \theta = \angle BDF.$$

Hence triangle CDE is isosceles, as is triangle FAE which is congruent to it by reflection. It follows that if we cut the pie along EF, we can fit the two pieces inside the box.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper[1] **Spring 2007.**

1. A 9×9 chessboard with the standard checkered pattern has white squares at its four corners. What is the least number of rooks that can be placed on this board so that all the white squares are attacked? (A rook also attacks the square it is on, in addition to every other square in the same row or column.)

2. The polynomial $x^3 + px^2 + qx + r$ has three roots in the interval (0,2). Prove that $-2 < p + q + r < 0$.

3. B is a point on the line which is tangent to a circle at the point A. The line segment AB is rotated about the centre of the circle through some angle to the line segment $A'B'$. Prove that the line AA' passes through the midpoint of BB'.

4. A binary sequence is constructed as follows. If the sum of the digits of the positive integer k is even, the k-th term of the sequence is 0. Otherwise, it is 1. Prove that this sequence is not periodic.

5. A triangular pie has the same shape as its box, except that they are mirror images of each other. We wish to cut the pie in two pieces which can fit together in the box without turning either piece over. How can this be done if

   (a) one angle of the triangle is obtuse and is twice as big as one of the acute angles;

   (b) the angles of the triangle are $20°$, $30°$ and $130°$?

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 4 and 3+3 points respectively.

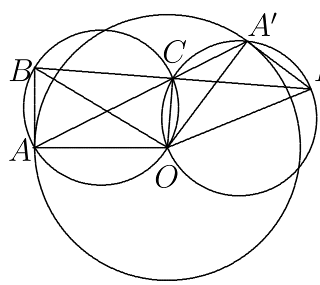
[1] Courtesy of Professor Andy Liu

Solution to Senior O-Level Spring 2007

1. A rook on a black square attacks exactly 9 white squares. A rook on a white square attacks either 7 or 9 white squares. Since there are 41 white squares overall, we need at least 5 rooks. Labelling the ranks a to i and the files 1 to 9, we can show that 5 is indeed the minimum by placing a rook on each of a8, c6, e4, g2 and i2.

2. Let the roots be a, b and c. Then $x^3+px^2+qx+r=(x-a)(x-b)(x-c)$. Putting in $x=1$, we have $1+p+q+r=(1-a)(1-b)(1-c)$. We are given that each of a, b and c lies strictly between 0 and 2. Hence each of $1-a$, $1-b$ and $1-c$ lies strictly between -1 and 1, and it follows that so does their product. Hence $p+q+r=(1-a)(1-b)(1-c)-1$ lies strictly btween -2 and 0.

3. Let O be the centre of the circle and C be the midpoint of BB'. Then OC is perpendicular to BB'. Since $\angle OAB = \angle OCB = 90° = \angle OCB' = \angle OA'B'$, both $OABC$ and $OCA'B'$ are cyclic quadrilaterals. Hence $\angle ACB = \angle AOB = \angle A'OB' = \angle A'CB'$. Since B, B' and C are collinear, so are A, A' and C. In other words, the line AA' passes through the midpoint C of BB'.

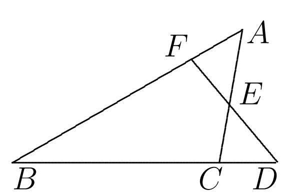


4. We define a sequence S as follows. If the sum of the digits of the non-negative integer k is even, the k-th term of S is 0. Otherwise, it is 1. It is the same sequence except for the inclusion of a 0-th term, and S is periodic if and only if so is the original sequence. Now each block of 10 consecutive terms of S is (0101010101) or (1010101010). We can contract the former to 0 and the latter to 1 and call the new sequence S'. Note that if the sum of the digits of the positive integer $10k$ is even, the k-th term of S' is 0. Otherwise, it is 1. Suppose S is periodic with period p. Because of the contraction, S' is periodic with period $\frac{p}{10}$. This is a contradiction since S' is identical to S. Hence S cannot be periodic.

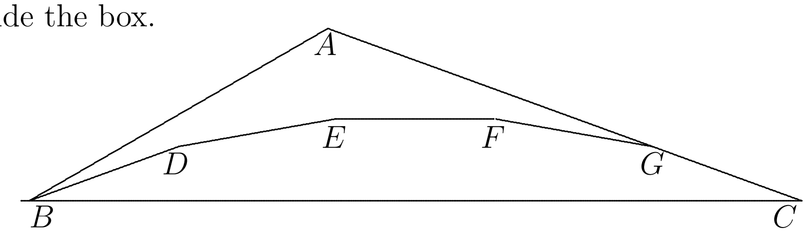
5. (a) Let the pie be represented by triangle ABC in which $\angle CAB = \theta$ and $\angle BCA = 2\theta$. Let D and F be the respective images of A and C under the reflection about the bisector of $\angle ABC$. (See the diagram below to the left.) Let AC and DF intersect at E. Then triangle DBF represents the box. Now $\angle BDF = \angle CAB = \theta$. It follows that

$$\angle DEC = \angle BCA - \angle BDF = \theta = \angle BDF.$$

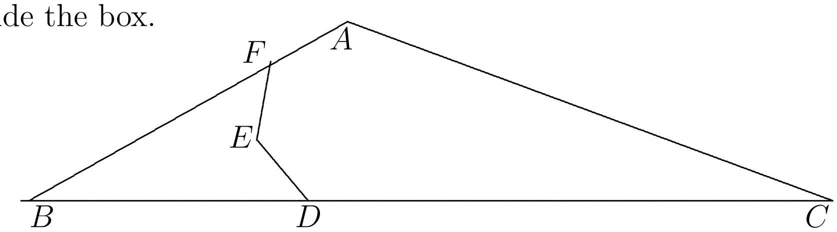
Hence triangle CDE is isosceles, as is triangle FAE which is congruent to it by reflection. It follows that if we cut the pie along EF, we can fit the two pieces inside the box.



(b) **First Solution:**
Let $BDEFGC$ be a hexagon with $\angle BDE = \angle DEF = \angle EFG = \angle FGC = 170°$, $\angle DBC = \angle BCG = 20°$ and $BD = DE = EF = FG = GC$. Extend GC to A so that $\angle ABC = 30°$. Then the hexagon $ABDEFG$, though non-convex, has a bilateral symmetry just as the convex hexagon $BDEFGC$ does. Thus it may be moved so that its four equal sides coincide with DE, EF, FG and GC respectively, forming with $BDEFGC$ a triangular box which is the mirror-image of the pie ABC. (See the diagram below.) If we cut the pie along the polygonal line $B - D - E - F - G$, we can fit the two pieces inside the box.



Second Solution by Olga Ivrii:
Let $ACDEF$ be a pentagon with $\angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = 130°$, $AC = DC$ and $DE = EF = FA$. Extend AF and CD to meet at B. Then the quadrilateral $BDEF$, though non-convex, has a bilateral symmetry just as the convex pentagon $ACDEF$ does. Thus it may be moved so that its two short sides coincide with EF and FA respectively, forming with $ACDEF$ a triangular box which is the mirror-image of the pie ABC. (See the diagram below.) If we cut the pie along the polygonal line $D - E - F$, we can fit the two pieces inside the box.



International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper[1] **Spring 2007.**

1. Let n be a positive integer. In order to find the integer closest to $\sqrt{n}$, Mary finds a^2, the closest perfect square to n. She thinks that a is then the number she is looking for. Is she always correct?

2. K, L, M and N are points on sides AB, BC, CD and DA, respectively, of the unit square $ABCD$ such that KM is parallel to BC and LN is parallel to AB. The perimeter of triangle KLB is equal to 1. What is the area of triangle MND?

3. Anna's number is obtained by writing down 20 consecutive positive integers, one after another in arbitrary order. Bob's number is obtained in the same way, but with 21 consecutive positive integers. Can they obtain the same number?

4. Several diagonals (possibly intersecting each other) are drawn in a convex n-gon in such a way that no three diagonals intersect in one point. If the n-gon is cut into triangles, what is the maximum possible number of these triangles?

5. Find all (finite) increasing arithmetic progressions, consisting only of prime numbers, such that the number of terms is larger than the common difference.

6. In the quadrilateral $ABCD$, $AB = BC = CD$ and $\angle BMC = 90°$, where M is the midpoint of AD. Determine the acute angle between the lines AC and BD.

7. Nancy shuffles a deck of 52 cards and spreads the cards out in a circle face up, leaving one spot empty. Andy, who is in another room and does not see the cards, names a card. If this card is adjacent to the empty spot, Nancy moves the card to the empty spot, without telling Andy; otherwise nothing happens. Then Andy names another card and so on, as many times as he likes, until he says "stop."

   (a) Can Andy guarantee that after he says "stop," no card is in its initial spot?

   (b) Can Andy guarantee that after he says "stop," the Queen of Spades is not adjacent to the empty spot?

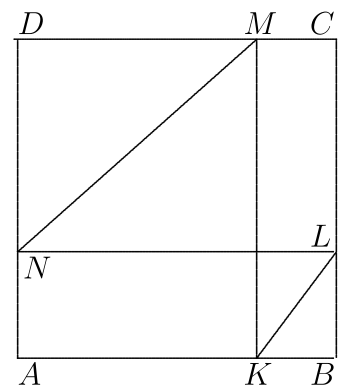
Note: The problems are worth 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 5+5 points respectively.

[1] Courtesy of Professor Andy Liu

Solution to Junior A-Level Spring 2007

1. If $n = a^2$, clearly a is the right choice for $/sqrtn$. Suppose $a^2 < n < (a+1)^2$. Then Mary would choose a or $a+1$ according to whether $a^2 < n \le a^2+a$ or $a^2+a+1 \le n < a^2+2n+1$. In the former case, we have $a^2 < n < a^2+a+\frac{1}{2}$ so that $a < \sqrt{n} < a+\frac{1}{2}$. In the latter case, we have $a+\frac{1}{2} < \sqrt{n} < a+1$. So Mary is always correct.

2. Let $AK = x$ and $AN = y$. From $1-(1-x)-y = 1-KB-LB = KL = \sqrt{(1-x)^2+y^2}$, we have $x^2-2xy+y^2 = 1-2x+x^2+y^2$, which simplifies to $2x(1-y) = 1$. Hence the area of triangle DMN is equal to $\frac{1}{2}DM \cdot DN = \frac{1}{2}x(1-y) = \frac{1}{4}$.



3. Anna's number can be 4567891011121314151617181920212223, obtained by writing down the 20 integers from 4 to 23 inclusive, in their natural order. Bob can obtain the same number by writing down the 21 integers from 2 to 22 inclusive, in their natural order except that 2 and 3 are moved from the front to the back.

4. There are four kinds of triangles inside the n-gon. They have respectively 3, 2, 1 and 0 vertices which are vertices of the n-gon. We claim that only the first two kinds can exist. Suppose ABC is a triangle of the third kind, with A a vertex of the n-gon. Then B and C are the points of intersection of a diagonal not passing through A with two diagonals passing through A. However, the region separated from ABC by BC cannot be a triangle, since no other lines pass through B or C. This contradiction shows that a triangle of the third kind cannot exist. Similarly, we can show that neither can a triangle of the fourth kind. Triangles of the first kind stand on their own while triangles of the second kind come in groups of four, forming a convex quadrilateral. If we have two adjacent triangles of the first kind, we can add a diagonal and get four triangles of the second kind instead. If we have two triangles of the first kind separated by quadrilaterals, we can have one triangle trade places with the intervening quadrilaterals one at a time, until the two triangles are adjacent. This way, we are left with at most one triangle of the first kind if n is odd, and no triangles of the first kind if n is even. In summary, for $n = 2k$, we have $4k-4$ triangles. For $n = 2k+1$, we have $4k-3$ triangles.

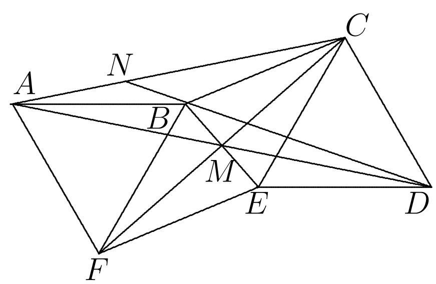
5. Let d be the common difference. Suppose there is a prime p less than d which does not divide d. Then every p-term of the progression is divisible by p. Since every term is a prime, the term divisible by p must be p itself, and it is therefore the first term of the progression. However, the $(p+1)$-st term will be a composite number which is divisible by p. Hence the maximum number of terms is $p < d$. It follows that in order for the number of terms to exceed d, we must have either $d = 1$ or d being the product of consecutive primes starting from 2.

For $d = 1$, every other term is divisible by 2. Hence the only such progression is $\{2, 3\}$. For $d = 2$, every third term is divisible by 3. Hence the only such progression is $\{3, 5, 7\}$. For $d = 2 \times 3$, the prime 5 will cause problem. For $d = 2 \times 3 \times 5$, the prime 7 will cause problem. In general, let p_i denotes the i-th prime. We claim that if $d = p_1 p_2 \cdots p_n$ for $n \geq 3$, then $d > p_{n+1}$. Define $m = p_2 p_3 \cdots p_n - 2$. Since $n \geq 3$, $m > 1$ and m has a prime divisor q. We cannot have $q = p_i$ for any $2 \leq i \leq n$, nor can we have $q = p_1 = 2$ since m is odd. Hence $q \geq p_{n+1}$ and it will cause problem. In summary, there are only two such progressions, namely, $\{2, 3\}$ and $\{3, 5, 7\}$.

6. Extend BM to E and CM to F so that $BM = ME$ and $CM = MF$. Then $ABCDEF$ is an equilateral hexagon. Since $\angle BMC = 90°$, $BCEF$ is a kite so that $BC = CE = EF = FB$. It follows that FAB and CDE are both equilateral triangles. Let AC intersect BD at N. In the diagram below, we have

$$\begin{aligned}
\angle CND &= \angle CBD - \angle BCA \\
&= \frac{1}{2}(180° - \angle BCD) - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) \\
&= \frac{1}{2}(120° - \angle BCE) - \frac{1}{2}(180° - (360° - \angle FBC - \angle ABF)) \\
&= \frac{1}{2}(120° + 180° - 60° - (\angle BCE + \angle FBC)) \\
&= 30°
\end{aligned}$$

since $\angle BCE + \angle FBC = 180°$. Note that the diagram may be different if $ABCD$ is convex, but the argument is essentially the same.



7. (a) The answer is yes. Andy can call the cards out in order starting with the Ace of Spades, two of Spades down to the King of Spades, followed by the Hearts, the Diamonds and the Clubs. We refer to this as one cycle. In each cycle, each card can move at most once since it is called exactly once, and at least one card must move. Andy then makes another 51 cycles of calls. We claim that all moves are in the same direction, either all clockwise or all counter-clockwise. This is clear within each cycle. Consider the card X which is the last to move in a cycle, and let Y be the other card adjacent to the empty spot. Since Y does not move after X in this cycle, it must have been called before X. So in the next cycle, Y will be called before X, and follows X in the same direction. This justifies our claim. To go once around and return to its initial spot, a card must have moved 53 times, and this is not possible since Andy makes only 52 cycles of calls. If it is to be in its initial spot, it must not have moved at all. However, this is also impossible as otherwise at most 1 move could have been made, but in 52 cycles, at least 52 moves have been made. Therefore, after 52 cycles of calls, every card is in a spot different from its initial one.

(b) The answer is no. Construct a graph where each of the vertices represents one of the 52! permutations of the cards, with the first and the last adjacent to the empty spot. Two vertices are joined by an edge if and only if a call by Andy changes the two permutations to each other. Label the edge with the card called by Andy. In this graph, each vertex has degree 2, and the graph is a union of disjoint cycles. Consider the cycle containing the vertex representing the initial permutation. For each vertex, let a person starts there. Whenever Andy makes a call, the person moves along an edge labelled with that card to an adjacent vertex if possible, and stays put otherwise. We call a vertex safe if and only if in the permutation it represents, the Queen of Spades is not adjacent to the empty spot. By shifting each card clockwise into the empty spot in turns, we will arrive at permutations represented by safe vertices as well as permutations represented by unsafe vertices. Note that after each call, there is still one person on each vertex. Thus no matter what sequence of calls Andy may employ, he cannot get everyone to a safe vertex. It follows that there is an initial permutation for which Andy's sequence will leave the Queen of Spades adjacent to the empty spot.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper[1] **Spring 2007.**

1. A, B, C and D are points on the parabola $y = x^2$ such that AB and CD intersect on the y-axis. Determine the x-coordinate of D in terms of the x-coordinates of A, B and C, which are a, b and c respectively.

2. A convex figure F is such that any equilateral triangle with side 1 has a parallel translation that takes all its vertices to the boundary of F. Is F necessarily a circle?

3. Let $f(x)$ be a polynomial of nonzero degree. Can it happen that for any real number a, an even number of real numbers satisfy the equation $f(x) = a$?

4. Nancy shuffles a deck of 52 cards and spreads the cards out in a circle face up, leaving one spot empty. Andy, who is in another room and does not see the cards, names a card. If this card is adjacent to the empty spot, Nancy moves the card to the empty spot, without telling Andy; otherwise nothing happens. Then Andy names another card and so on, as many times as he likes, until he says "stop."
   (a) Can Andy guarantee that after he says "stop," no card is in its initial spot?
   (b) Can Andy guarantee that after he says "stop," the Queen of Spades is not adjacent to the empty spot?

5. From a regular octahedron with edge 1, cut off a pyramid about each vertex. The base of each pyramid is a square with edge $\frac{1}{3}$. Can copies of the polyhedron so obtained, whose faces are either regular hexagons or squares, be used to tile space?

6. Let a_0 be an irrational number such that $0 < a_0 < \frac{1}{2}$. Define $a_n = \min\{2a_{n-1}, 1 - 2a_{n-1}\}$ for $n \geq 1$.
   (a) Prove that $a_n < \frac{3}{16}$ for some n.
   (b) Can it happen that $a_n > \frac{7}{40}$ for all n?

7. T is a point on the plane of triangle ABC such that $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Prove that the lines symmetric to AT, BT and CT with respect to BC, CA and AB, respectively, are concurrent.

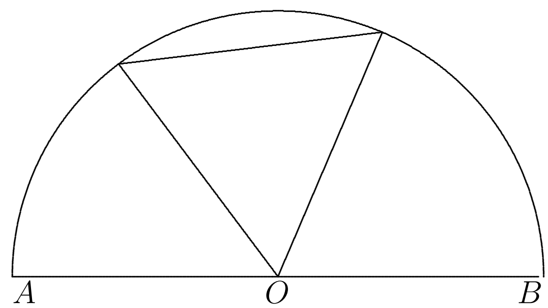
Note: The problems are worth 3, 5, 5, 4+4, 8, 4+4 and 8 points respectively.

[1]Courtesy of Professor Andy Liu

Solution to Senior A-Level Spring 2007

1. Let $(t,0)$ be the point of intersection of AB and CD. Then the equation of the line AB is given by $\frac{y}{x-t} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$. That A lies on this line means that $\frac{a^2}{a-t} = a+b$. We have $a^2 = a^2+ab-t(a+b)$ so that $t = \frac{ab}{a+b}$. Similarly, $t = \frac{cd}{c+d}$. Eliminating t, we have $abc+abd = d(ac+bc)$ so that $d = \frac{abc}{ac+bc-ab}$.

2. **Solution by Olga Ivrii.**
No, the convex figure does not have to be a circle. Let AB be a horizontal segment of length 2. Draw a semicircle with diameter AB above AB. For any equilateral triangle of side 1, place its lowest vertex at the midpoint O of AB. If there are two choices, place either one at O. The other two vertices of the equilateral triangle always lie on the semicircle. Hence the convex figure bounded by AB and the semicircle has the desired property.

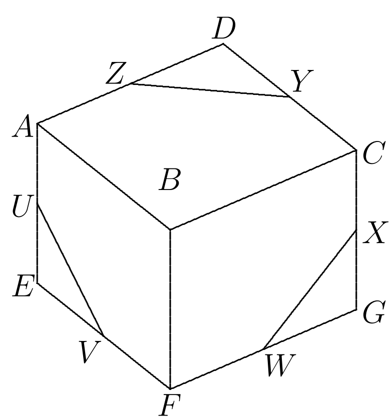


3. The graph of $f(x)$ is continuous and may have a number of turning points, that is, points at which the graph changes from increasing to decreasing or vice versa. Let these points be $(x_i, f(x_i))$ for $1 \le i \le n$. By symmetry, we may assume that the leading coefficient of $f(x)$ is positive. Suppose the degree of $f(x)$ is odd. Then $f(x)$ tends to ∞ as x tends to ∞ and to $-\infty$ as x tends to $-\infty$. Let a be a real number such that $a > f(x_i)$ for $1 \le i \le n$. Then the equation $f(x) = a$ is satisfied by exactly one real number x. Suppose the degree of $f(x)$ is even. Then $f(x)$ tends to ∞ as x tends to $\pm\infty$. It follows that n is odd, so that there is a real number a for which $a = f(x_i)$ for an odd number of i, $1 \le i \le n$. Then the equation $f(x) = a$ is satisfied by an even number of real numbers x where $x \ne x_i$ for $1 \le i \le n$, as well as by an odd number of x_i. Hence the equation is satisfied by an odd number of real numbers.

4. (a) The answer is yes. Andy can call the cards out in order starting with the Ace of Spades, two of Spades down to the King of Spades, followed by the Hearts, the Diamonds and the Clubs. We refer to this as one cycle. In each cycle, each card can move at most once since it is called exactly once, and at least one card must move. Andy then makes another 51 cycles of calls. We claim that all moves are in the same direction, either all clockwise or all counter-clockwise. This is clear within each cycle. Consider the card X which is the last to move in a cycle, and let Y be the other card adjacent to the empty spot. Since Y does not move after X in this cycle, it must have been called before X. So in the next cycle, Y will be called before X, and follows X in the same direction. This justifies our claim. To go once around and return to its initial spot, a card must have moved 53 times, and this is not possible since Andy makes only 52 cycles of calls. If it is to be in its initial spot, it must not have moved at all. However, this is also impossible as otherwise at most 1 move could have been made, but in 52 cycles, at least 52 moves have been made. Therefore, after 52 cycles of calls, every card is in a spot different from its initial one.

(b) The answer is no. Construct a graph where each of the vertices represents one of the 52! permutations of the cards, with the first and the last adjacent to the empty spot. Two vertices are joined by an edge if and only if a call by Andy changes the two permutations to each other. Label the edge with the card called by Andy. In this graph, each vertex has degree 2, and the graph is a union of disjoint cycles. Consider the cycle containing the vertex representing the initial permutation. For each vertex, let a person starts there. Whenever Andy makes a call, the person moves along an edge labelled with that card to an adjacent vertex if possible, and stays put otherwise. We call a vertex safe if and only if in the permutation it represents, the Queen of Spades is not adjacent to the empty spot. By shifting each card clockwise into the empty spot in turns, we will arrive at permutations represented by safe vertices as well as permutations represented by unsafe vertices. Note that after each call, there is still one person on each vertex. Thus no matter what sequence of calls Andy may employ, he cannot get everyone to a safe vertex. It follows that there is an initial permutation for which Andy's sequence will leave the Queen of Spades adjacent to the empty spot.

5. The answer is yes. Let $ABCD-EFGH$ be a cube, with U, V, W, X, Y and Z the respective midpoints of AE, EF, FG, GC, CD and DA, as shown in the diagram below. Now UV, VW and YZ are all parallel to AC. Since UX, VY and WZ are concurrent at the centre of the cube, $UVWXYZ$ is a planar hexagon, and a regular one by symmetry. This planar section cuts the cube into two congruent halves. Each half contains a vertex where three mutually perpendicular faces meet. We call it the primary vertex. (In the diagram, one of them is B and the other one is the hidden vertex H.) If we glue eight copies of this half-cube together so that their primary vertices coincide, we obtain a copy of the solid in question, the one with six square and eight regular hexagonal faces. Divide space into cubes by the planes $x = k$, $y = k$ and $z = k$, where k runs through all integers. Dissect each cube into halves so that the primary vertices have either all odd co-ordinates or all even co-ordinates. If we glue eight copies of the half-cube around each primary vertex, we have a partition of space into copies of the solid in question.



6. **Official Solution.**

(a) We consider five cases.
Case 1. $0 < a_0 < \frac{3}{16}$.
Here, we already have $a_0 < \frac{3}{16}$.
Case 2. $\frac{3}{16} < a_0 < \frac{1}{5}$.
Let $a_0 = \frac{1}{5} - \epsilon$ where $0 < \epsilon < \frac{1}{80}$. Then $a_1 = \frac{2}{5} - 2\epsilon$, $a_2 = \frac{1}{5} + 4\epsilon$, $a_3 = \frac{2}{5} + 8\epsilon$ and $a_4 = \frac{1}{5} - 16\epsilon$. Suppose $\frac{3}{16} < a_{4k}$ for all k. then $a_{4k} = \frac{1}{5} - 16^k\epsilon$. This is a contradiction since ϵ is a fixed positive number.

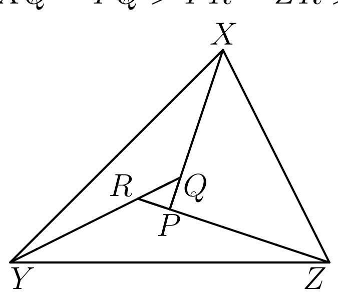
Case 3. $\frac{1}{5} < a_0 < \frac{1}{4}$.
Let $a_0 = \frac{1}{4} - \epsilon$ where $0 < \epsilon < \frac{1}{20}$. Then $a_1 = \frac{1}{2} - 2\epsilon$ and $a_2 = 4\epsilon < \frac{1}{5}$. Hence either Case 1 or Case 2 applies with a_2 playing the role of a_0.
Case 4. $\frac{1}{4} < a_0 < \frac{1}{3}$.
Let $a_0 = \frac{1}{3} - \epsilon$ where $0 < \epsilon < \frac{1}{12}$. Then $a_1 = \frac{1}{3} + 2\epsilon$ and $a_2 = \frac{1}{3} - 4\epsilon$. Suppose $\frac{1}{4} < a_{2k}$ for all k. then $a_{2k} = \frac{1}{4} - 4^k\epsilon$. This is a contradiction since ϵ is a fixed positive number.
Case 5. $\frac{1}{3} < a_0 < \frac{1}{2}$.
Here, we have $a_1 < \frac{1}{3}$. Hence one of Case 1, Case 2, Case 3 and Case 4 applies, with a_1 playing the role of a_0.

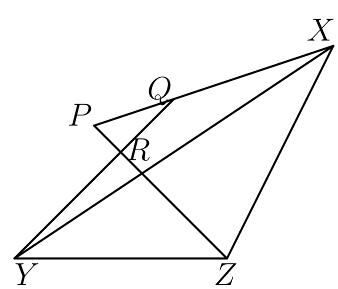
(b) It is possible. Call a number ϵ good if $\frac{\epsilon}{3}$ is obtained from $\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{23}} + \cdots + \frac{1}{2^{8k+7}} + \cdots$ by omitting some terms in a non-periodic manner. Since the sum of the infinite geometric series is $\frac{1}{2^7}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^8}}\right) = \frac{2}{255}$, ϵ is an irrational number satisfying $0 < \epsilon < \frac{2}{85}$. Now let $a_0 = \frac{1}{5} - \delta$ for some good number δ. We consider two cases.
Case 1. The term $\frac{1}{2^7}$ is absent from $\frac{\delta}{3}$.
Let $\epsilon = 2^8\delta$. Then ϵ is also a good number. We have $a_0 = \frac{1}{5} - \frac{\epsilon}{2^8}$, $a_1 = \frac{2}{5} - \frac{\epsilon}{2^7}$, $a_2 = \frac{1}{5} + \frac{\epsilon}{2^6}$, $a_3 = \frac{2}{5} + \frac{\epsilon}{2^5}$, $a_4 = \frac{1}{5} - \frac{\epsilon}{2^4}$, $a_5 = \frac{2}{5} - \frac{\epsilon}{2^3}$, $a_6 = \frac{1}{5} + \frac{\epsilon}{2^2}$, $a_7 = \frac{1}{5} + \frac{\epsilon}{2}$ and $a_8 = \frac{1}{5} - \epsilon$.
Case 2. The term $\frac{1}{2^7}$ is present in $\frac{\delta}{3}$.
Let $\epsilon = 2^8(\delta - \frac{3}{2^7})$. Then ϵ is also a good number. We have $a_0 = \frac{113}{640} - \frac{\epsilon}{2^8}$, $a_1 = \frac{113}{320} - \frac{\epsilon}{2^7}$, $a_2 = \frac{47}{160} + \frac{\epsilon}{2^6}$, $a_3 = \frac{33}{80} - \frac{\epsilon}{2^5}$, $a_4 = \frac{7}{40} + \frac{\epsilon}{2^4}$, $a_5 = \frac{7}{20} + \frac{\epsilon}{2^3}$, $a_6 = \frac{3}{10} - \frac{\epsilon}{2^2}$, $a_7 = \frac{2}{5} + \frac{\epsilon}{2}$ and $a_8 = \frac{1}{5} - \epsilon$.
Note that in both cases, $a_n > \frac{7}{40}$ for $0 \le n \le 7$. Moreover, a_8 has the same form as a_0, so that either Case 1 or Case 2 applies with a_8 playing the role of a_0. It follows that $a_n > \frac{7}{40}$ for all n.

7. **Solution by Yan Li and Andy Liu.**
We first establish a preliminary result.

Lemma.
XP, YQ and ZR are pairwise intersecting rays such that $\angle QYZ = \angle RZY$, $\angle RZX = \angle PXZ$ and $\angle PXY = \angle QYX$. Then XP, YQ and ZR are concurrent.

Proof:
Suppose that, to the contrary, they intersect at three points. Consider first the case where all three rays are directed towards the opposite sides of the triangle, as shown in the diagram below on the left. Then QYZ, PZX and RXY are isosceles triangles. We have a contradiction since $XP > XQ = YQ > YR = ZR > ZP = XP$.





Consider now the case where only one ray is directed towards the opposite side of the triangle, as shown in the diagram above on the right. Then RYZ, PZX and QXY are isosceles triangles. We have a contradiction since

$$QR = YQ - YR = XQ - ZR = (XP - PQ) - (ZP - PR) = PR - PQ.$$

We now tackle the given problem. Since the rays TA, TB and TC make angles of $120°$ with one another, the point T is inside the triangle. Let the extensions of AT, BT and CT intersect the opposite sides at P, Q and R respectively. Let X, Y and Z be the images of T under reflections across BC, CA and AB respectively. Then $AZ = AT = AY$. Hence $\angle AYZ = \angle AZY$. Also, $\angle AYQ = \angle ATQ = 60° = \angle ATR = \angle AZR$. Hence

$$\angle QYZ = \angle QYA - \angle ZYA = \angle RZA - \angle YZA = \angle RZY.$$

Similarly, $\angle RZX = \angle PXZ$ and $\angle PXY = \angle QYX$. By the Lemma, XP, YQ and ZR are concurrent.