ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, 24. октобар 1999.
Припремна варијанта, 8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

2 1. а) Папирни троугао је пресавијен по правој, тако да се теме правог угла поклопи са другим теменом. У ком односу дели дијагонале добијеног четвороугла тачка њиховог пресека?

2 б) Папирни троугао површине 1 пресавијен је по правој, тако да се теме правог угла поклопи са другим теменом. Добијени четвороугао је пресечен по дијагонали која полази из трећег темена полазног троугла. Наћи површину најмањег од тако добијених комада папира.

2. Разматрају се тројке целих бројева a, b и c, које задовољавају услов $a+b+c=0$. За сваку такву тројку рачуна се број

$$d=a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}.$$

2 а) Може ли се десити да је $d=2$?
2 б) Може ли се десити да је d прост број?
(Простим се назива цео број већи од 1, који нема делитеља различитих од њега самог и јединице; први прости бројеви су: 2, 3, 5, 7, 11, ...)

4 3. У равни је дато n правих. Свака се сече с тачно 1999 преосталих. Наћи n. (Одредити све могућности.)

4 4. У Италији производе часовнике чије казаљке које показују часове праве један обрт дневно, а казаљке које показују минуте - 24 обрта, при чему су, као и обично, казаљке које показују минуте дуже од казаљки које показују часове (код обичног часовника казаљка која показује часове прави два обрта дневно, а казаљка која показује минуте - 24). Разматрајмо све положаје двеју казаљки и нултог подеока, који се могу срести и на италијанском и на обичном часовнику. Колико таквих положаја постоји у току једног дана? (Нулти подеок означава 24 часа на италијанском часовнику и 12 часова на обичном часовнику.)

4 5. Дате су плочице (правоугаоници изрезани од картона) димензија 2x1. На свакој плочици је нацртана једна дијагонала. Постоје две врсте плочица, с обзиром да се дијагонала може одабрати на два начина, при чему има довољно плочица обе врсте. Могу ли се одабрати 18 плочица и од њих сложити квадрат 6x6, тако да се крајеви дијагонала не поклапају?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, 24.октобар 1999.
Припремна варијанта, 10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
4	1. Тачка пресека бисектриса углова троугла повезана је са теменима и као резултат тога троугао је разложен на 3 мања троугла. Један од мањих троуглова је сличан полазном. Наћи његове углове.
4	2. Доказати да постоји бесконачно много целих позитивних непарних бројева n, за које је број 2^n+n сложен. (Сложеним се назива цео позитиван број који има делиоце различите од њега самог и од јединице.)
4	3. У простору је дато n равни. Свака се сече с тачно 1999 преосталих. Наћи n. (Одредити све могућности.)
4	4. Могу ли се одабрати на бројевној оси 50 одсечака (дозвољено је да се прекривају), тако да буду испуњена два услова: а) дужине одсечака су 1, 2, 3, ... , 50; б) крајеви одсечака су сви цели бројеви од 1 до 100 укључујући и њих.
4	5. Дате су плочице (правоугаоници изрезани од картона) димензија 2x1. На свакој плочици је нацртана једна дијагонала. Постоје две врсте плочица, с обзиром да се дијагонала може одабрати на два начина, при чему има довољно плочица обе врсте. Могу ли се одабрати 36 плочица и од њих сложити квадрат 8x8, тако да се крајеви дијагонала не поклапају?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 31. октобар 1999.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	**1.** Неколико узастопних природних бројева је записано у врсту у таквом поретку, да је сума произвољне тројке узастопних бројева дељива крајњим левим бројем те тројке. Која је максимална количина бројева могла бити записана?
	2. Нека је ABC - оштроугли троугао, C' и A' - произвољне тачке страница AB и BC редом, B' - средиште странице AC.
2	а) Доказати да површина троугла $A'B'C'$ није већа од половине површине троугла ABC.
2	б) Доказати да је површина троугла $A'B'C'$ једнака четвртини површине троугла ABC тада и само тада, када се бар једна од тачака A', C' поклапа са средиштем одговарајуће странице.
5	**3.** 100 тегова од 1, 2, ... , 100 грама размештено је на два таса ваге, тако да је равнотежа. Доказати да је могуће скинути по два тега са сваког таса, тако да се равнотежа не наруши.
3	**4.** а) На сваком од поља крајње горње и крајње доње хоризонтале шаховске табле 8x8 стоји по фигура: доле - беле, горе - црне. У једном потезу је допуштено померити произвољну фигуру на суседно слободно поље по вертикали или хоризонтали. У ком најмањем броју потеза може да се добије то, да се црне фигуре нађу доле, а беле - горе?
4	б) Исто питање за таблу 7x7.
8	**5.** Неуморни Тома и Јеремија праве низ. На почетку у низу је један природан број. Затим они наизменично записују следеће бројеве: Тома добија следећи број додајући претходном његову произвољну цифру, а Јеремија - одузимајући од претходног његову произвољну цифру. Доказати да ће се неки број у том низу појавити не мање од 100 пута.
9	**6.** Унутар правоуглог листа папира изрезано је n правоугаоних рупа са страницама паралелним ивицама листа. На који најмањи број правоугаоних делова може гарантовано да се разреже тај избушени лист? (Показати да се у произвољном случају може разрезати на нађени број делова, а да се на мањи број делова у неким случајевима разрезати не може.)

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 31. октобар 1999.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1. За које је n могуће распоредити целе бројеве од 1 до n
3 по кругу, тако да збир било која два суседна броја буде
дељив бројем који следи за њима у смеру кретања казаљке
на часовнику?

2. На правоугаоном листу папира је означено
2 а) неколико тачака једне праве;
3 б) три тачке.
Допушта се да се лист папира неколико пута пресавије дуж праве, тако да означене тачке не доспеју на линије пресавијања, и да се затим шилом пробуши испресавијани лист наскроз. Доказати да се може постићи да се рупе појаве у свим означеним тачкама и да се не добије ниједна сувишна рупа.

3. Неуморни Тома и Јеремија праве низ. На почетку у низу је
6 један природан број. Затим они наизменично записују следеће бројеве: Тома добија следећи број додајући претходном његову произвољну цифру, а Јеремија - одузимајући од претходног његову произвољну цифру. Доказати да ће се неки број у том низу појавити не мање од 100 пута.

4. Тачке K, L на страницама AC, CB троугла ABC су тачке у којима споља уписани кругови додирују странице. Доказати да права која повезује средишта KL и AB,
3 а) дели обим троугла попола;
3 б) паралелна је бисектриси угла ACB.

5. а) 100 тегова од 1, 2, ... , 100 грама размештено је на
4 два таса ваге, тако да је равнотежа. Доказати да је могуће скинути по два тега са сваког таса, тако да се равнотежа не наруши.
б) Разматрајмо такве n, да се скуп тегова 1, 2, ... , n
4 грама може поделити на два дела једнака по тежини. Да ли је тачно, да се за произвољно такво n, веће од три, могу узети по два тега из сваког дела, тако да се једнакост тежина сачува?

6. На великој шаховској табли је означено $2n$ поља, тако да
8 топ може да се креће по свим означеним пољима, не прескачући неозначена. Доказати да се фигура од означених поља може разрезати на n правоугаоника.

7. Доказати да се код конвексног полиедра са $10n$ страна мо-
8 гу наћи n страна с једнаким бројем страница.

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта. 27. фебруар 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 1. Може ли производ два узастопна природна броја бити једнак производу два суседна природна парна броја?

4 2. У трапезу $ABCD$, чија је површина 1, основице BC и AD се односе као 1:2. Нека је K средиште дијагонале AC. Права DK сече страницу AB у тачки L. Наћи површину четвороугла $BCKL$.

2 3. а) Доказати да се темена $3n$-тостране призме могу обојити са три боје, тако да свако теме буде повезано ивицама са теменима све три боје.

3 б) Доказати, да ако се темена n-тостране призме могу обојити са три боје, тако да свако теме буде повезано ивицама са теменима све три боје, онда је n дељиво са 3.

(Напомена: основе n-тостране призме су подударни n-тоуглови.)

5 4. Могу ли се природни бројеви распоредити у теменима коцке, тако да у сваком пару бројева који су повезани ивицом један од њих буде дељив другим, а да у осталим паровима то не важи?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Припремна варијанта. 27. фебруар 2000.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 1. Конвексан четвороугао је разложен својим дијагоналама на четири троугла. Испоставило се да је сума површина два наспрамна троугла (оних који имају само заједничко теме) једнака суми површина друга два троугла. Доказати да једна од дијагонала полови другу.

4 2. На две наспрамне стране коцкице за игру нацртане су по једна тачка, на друге две наспрамне стране – по две тачке и на треће две наспрамне стране – по три тачке. Од осам таквих коцкица сложена је коцка 2×2×2 и набројан је укупан број тачака на свакој од њених шест страна. Да ли се тако могло добити 6 узастопних бројева?

4 3. Доказати неједнакост:

$$1^k+2^k+\ldots+n^k \le \frac{n^{2k}-(n-1)^k}{n^k-(n-1)^k},$$

за произвољна два природна броја n и k.

4. Да ли постоји бесконачан низ који се састоји од

3 а) реалних бројева,

3 б) целих бројева,

такав да је сума сваких десет узастопних бројева позитивна, а да је сума сваких првих узастопних $10n+1$ бројева негативна?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта. 5. март 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

1. Наћи све реалне корене једначине

3 $$(x+1)^{21}+(x+1)^{20}(x-1)+(x+1)^{19}(x-1)^2+\dots+(x-1)^{21}=0.$$

2. Дужине основица трапеза су цели бројеви. Доказати да се
3 он може разложити на подударне троуглове.

3. Дата је кружница и тачка A унутар ње. Наћи геометријско
6 место темена C свих могућих правоугаоника $ABCD$, где су B и D тачке кружнице.

4. Разбојници Дрпа и Окац деле гомилу од 100 новчића. Дрпа
7 узима са гомиле прегршт новчића, а Окац, гледајући прегршт, одлучује коме ће од њих двојице она припасти. То се наставља док неки од њих не добије 9 прегршти, после чега други купи све преостале новчиће (деоба може да се заврши и тиме што су сви новчићи подељени, пре него што је неко добио 9 прегршти). Дрпа може да узме у прегршт колико год хоће новчића. Који највећи број новчића он може да обезбеди за себе, независно од деловања Окца? (Наведите тај број, покажите како Дрпа може да га обезбеди за себе и докажите да више од тога не може да обезбеди).

5. Који је највећи број коња који се може распоредити на
7 шаховској табли 5×5, тако да сваки од њих туче тачно два друга? (Покажите распоред и докажите да је немогуће распоредити већи број коња тако да услов задатка буде испуњен.)

6. На кружном шаховском турниру сваки учесник игра са сва-
10 ким један пут. За победу се добија један поен, за реми пола поена, а за пораз нула. Зваћемо партију неправилном ако је шахиста који је победио на крају сакупио мање поена од пораженог. Доказати да неправилне партије чине мање од 3/4 укупног броја партија на турниру.

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта. 5. март 2000.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 **1.** Природни бројеви m и n су узајамно прости (немају заједнички делилац различит од јединице). Разломак

$$\frac{m+2000n}{n+2000m}$$

може да се скрати бројем d. Која је највећа могућа вредност d?

5 **2.** Тетиве AC и BD круга са центром у O секу се у тачки K. Нека су M и N центри кружница описаних око троуглова AKB и CKD. Доказати да је $OM=KN$.

5 **3.** У шпилу део карата лежи полеђином на доле. С времена на време Пера узима из шпила штос од једне или неколико узастопних карата, у коме горња и доња карта леже полеђином на доле, преврће цео штос као једну целину и ставља га на исто место у шпилу. Доказати да ће на крају крајева све карте лежати полеђином на горе независно од тога како Пера бира штосове.
(Примедба: ако се "штос" састоји само од једне карте, захтева се само да она лежи полеђином на доле.)

5 **4.** У равни, која је ишпартана мрежом вертикалних и хоризонталних правих на квадратна поља, нацртан је конвексан многоугао, тако да се његова темена налазе у теменима поља и ниједна његова страница није ни вертикална ни хоризонтална. Доказати да је сума дужина вертикалних одсечака мреже унутар многоугла једнака суми дужина хоризонталних одсечака мреже унутар многоугла.

7 **5.** Наћи максимални број N за који постоји N узастопних природних бројева, таквих да је сума цифара првог броја дељива са 1, сума цифара другог броја са 2, сума цифара трећег броја са 3, и т. д., сума цифара N-тог броја дељива са N.

6. На кружном шаховском турниру сваки учесник игра са сваким један пут. За победу се добија један поен, за реми пола поена, а за пораз нула. Зваћемо партију неправилном ако је шахиста који је победио на крају сакупио мање поена од пораженог.

6 а) Доказати да неправилне партије чине мање од 3/4 укупног броја партија на турниру.

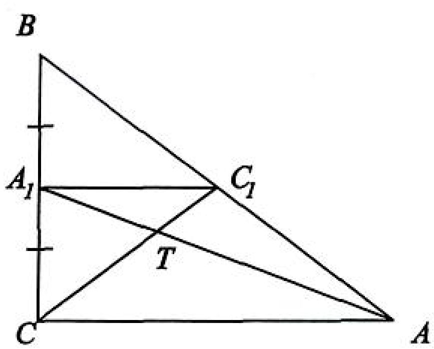
6 б) Доказати да се у тачки а) број 3/4 не може заменити мањим.

Јесење коло, пробна варијанта
8 - 9 разред

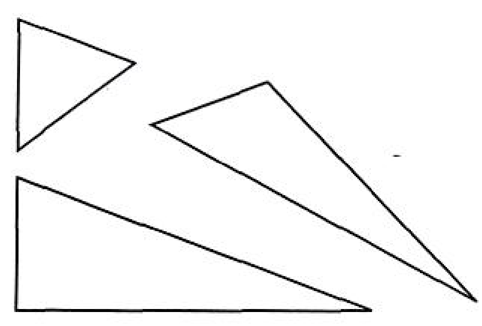
1. *(а) Правоугли троугао од папира пресавијен је по правој тако да се теме правог угла поклопило са другим теменом. У ком односу тачка пресека дели дијагонале добијеног четвороугла?*

   (б) Правоугли троугао од папира површине 1 пресавијен је по правој тако да се теме правог угла поклопило са другим теменом. Добијени четвороугао је разрезан по дијагонали која полази из трећег темена почетног троугла. Наћи површину најмањег парчета папира добијеног описаним поступком.

Решење. (а) Описаним поступком троугао савијамо по средњој линији паралелној одговарајућој катети (слика 1) и на тај начин добијамо правоугли трапез чије се дијагонале поклапају са тежишним линијама почетног троугла. Закључујемо да је тачка пресека дијагонала тежиште, па их она дели у односу 2:1.



Сл. 1



Сл. 2

(б) Описаним резањем добијамо три парчета папира (слика 2), од којих најмању површину има троугао A_1CT. Како је површина троугла ABC једнака $\frac{ab}{2} = 1$, то је тражена површина једнака

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{1}{6}.$$

2. *Нека су a, b и c цели бројеви за које важи $a + b + c = 0$. Свакој таквој тројци придружујемо број*

$$d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}.$$

(а) *Да ли d може бити 2?*

(б) *Да ли d може бити прост број?*

Решење. Покажимо да је d облика $6k$, $k \in Z$.

Из $a + b + c = 0$ следи да су или сва три броја парна или су два непарна, а један паран. Како степеновање целим бројем очувава парност, следи да је d збир или три парна или два непарна и једног парног броја, па је $d = 2l$.

С друге стране, из истог услова следи да a, b и c или дају исти остатак при дељењу са 3 или сва три дају различите остатке. Како степеновање непарним целим бројем очувава остатак при дељењу са 3, следи да је d збир или три броја који дају исти остатак при дељењу са 3 или три броја који дају међусобно различите остатке при дељењу са 3. У оба случаја добијамо да је $d = 3m$.

Коначно, из претходног разматрања следи да је $d = 6k$, па не може бити прост број.

3. *У равни је уочено n правих са особином да се свака сече са тачно 1999 других. Одредити број n и описати све могућности.*

Решење. Разликујемо два случаја:

1. случај. Међу уоченим правама нема паралелних. Тада се свака од уочених n правих сече са преосталих $n - 1$, па како се по услову задатка сече са тачно 1999 других, следи да је $n = 2000$.

2. случај. Међу уоченим правама има паралелних. Тада релација паралелности разбија дати скуп правих на класе. Како свака права сече све које нису у њеној класи, а по услову задатка тачно 1999 других правих, следи да су све класе исте кардиналности. Ако са k означимо број класа, а са m њихову кардиналност, добијамо $n = km$ и $(k - 1)m = 1999$. Како је 1999 прост број, то следи да је $k - 1 = 1999$ или $k - 1 = 1$. Прва једначина даје претходно размотрени случај (нема паралелних правих), а из друге следи $k = 2$ и $m = 1999$, па је $n = 3998$.

4. *У Италији се производе сатови код којих казаљка која показује сате опише један круг за дан и ноћ, а казаљка која показује минуте 24 круга, при чему је казаљка која показује минуте дужа од оне која*

показује сате (код обичних сатова прва опише два, а друга 24 круга за 24 часа). Посматрају се сви положаји две казаљке и нулте поделе који се поклапају и на италијанским и на обичним сатовима. Колико таквих положаја има у току 24 часа?

(Нулта подела одређује 24 часа на италијанским и 12 на обичним сатовима)

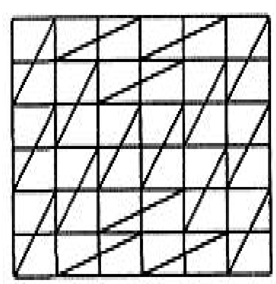
Решење. Поставка овог задатка је мало нејасна, па се проблем може схватити на неколико начина. Јасно је да минутне казаљке морају показивати исти број минута и на обичном и на италијанском сату да би уопште дошло до поклапања. Остаје само да се размотри питање казаљки које показују сате.

Уколико се посматра рад ових сатова у току 24 часа и они показују исто време, сатне казаљке ће се поклопити само једном и то у поноћ.

Уколико се посматрају сви могући положаји самих казаљки, без обзира на време, и међу њима траже парови који се поклапају, онда таквих положаја има 12, односно, 24, у зависности да ли се положај казаљки који се јавља на обичном сату два пута у току 24 часа, а на италијанском само једном, рачуна једном или двапут.

5. *Од картона су изрезане домине 2×1. На свакој од њих је повучена једна дијагонала и на тај начин је добијено две врсте домина, будући да постоје два начина да се повуче дијагонала. Домина сваке врсте има коначно много. Да ли је могуће изабрати 18 домина и сложити од њих квадрат 6×6 тако да се никоје две од повучених дијагонала не додирују?*

Решење. Одговор: Да. Једно од могућих поплочавања је дато на слици 3.

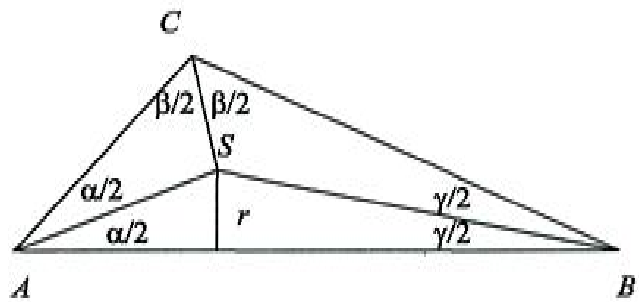


Сл. 3

10 - 11 разред

1. *Троугао је разбијен на 3 мања троугла дужима које спајају центар уписане кружнице са теменима троугла. Ако је један од добијених троуглова сличан полазном, одредити његове углове.*

Решење. Означимо темена троугла са A ,B и C, центар уписане кружнице са S, а одговарајуће углове са α, β и γ (слика 4).



Сл. 4

Нека је, без умањења општости, троугао BCS сличан полазном троуглу ABC. Тада је $\frac{\beta}{2} = \alpha$ и $\frac{\gamma}{2} = \beta$, односно, $\beta = 2\alpha$ и $\gamma = 2\beta = 4\alpha$, па како је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, следи да је $7\alpha = \pi$. Одавде је $\alpha = \frac{\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$ и $\gamma = \frac{4\pi}{7}$.

2. *Доказати да постоји бесконачно много непарних природних бројева n за које је број $2^n + n$ сложен.*

Решење. Нека је $n = 6k + 1$, $k \in N$. Покажимо да је за овако дато n број $2^n + n$ дељив са 3, тј. сложен.

Како 2 даје остатак 2 при дељењу са 3, а степеновање непарним бројем очувава остатак при дељењу са 3, следи да 2^{6k+1} даје остатак 2 при дељењу са 3.

С друге стране, $6k + 1$ даје остатак 1 при дељењу са 3, па је $2^{6k+1} + k + 1$ дељиво са 3. Тиме је доказ завршен.

3. *У простору је уочено n равни са особином да се свака сече са тачно 1999 других. Одредити број n и описати све могућности.*

Решење. Разматрањем као у решењу трећег задатка за 8. и 9. разред добијамо $n = 2000$ или $n = 3998$.

4. *Да ли је могуће изабрати 50 дужи на бројевној оси, које не морају бити дисјунктне, тако да буду испуњена следећа два услова:*

(а) Дужине изабраних дужи су 1, 2, 3,..., 50;

(б) Крајње тачке изабраних дужи су све целобројне тачке од 1 до 100, укључујући и 1 и 100.

Решење. Покажимо да је немогуће изабрати 50 дужи на описани начин.

Претпоставимо супротно, тј. да постоји избор дужи који задовољава услове (а) и (б). Приметимо да из наведена два услова следи да се у свакој целобројној тачки од 1 до 100 налази крајња тачка тачно једне од изабраних дужи. Ако "почетке" изабраних дужи означимо са x_1, $x_2, \ldots$, x_{50}, тада се њихови "крајеви" налазе у тачкама x_1+1, $x_2+2, \ldots$, $x_{50}+50$. Како је свакој од ових тачака придружен тачно један број од 1 до 100, следи да је

$$x_1+x_2+\cdots+x_{50}+x_1+1+x_2+2+\cdots+x_{50}+50=1+2+\cdots+100.$$

Одавде је

$$2(x_1+x_2+\cdots+x_{50})+1+2+\cdots+50=5050,$$

па добијамо

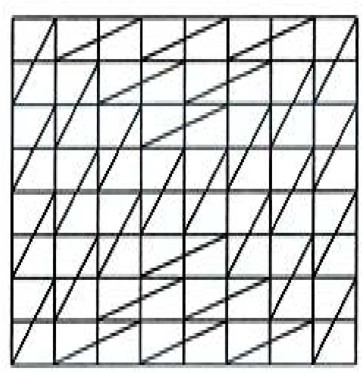
$$2(x_1+x_2+\cdots+x_{50})+1275=5050,$$

$$\text{тј. } 2(x_1+x_2+\cdots+x_{50})=3775.$$

Контрадикција.

5. *Од картона су изрезане домине 2×1. На свакој од њих је повучена једна дијагонала и на тај начин је добијено две врсте домина, будући да постоје два начина да се повуче дијагонала. Домина сваке врсте има коначно много. Да ли је могуће изабрати 32 домине и сложити од њих квадрат 8×8 тако да се никоје две од повучених дијагонала не додирују?*

Решење. Одговор: Да. Једно од могућих поплочавања је дато на слици 5.



Сл. 5

Јесење коло, основна варијанта
8 - 9 разред

1. *Неколико узастопних природних бројева је написано у врсту у таквом поретку да је збир произвољна три узастопна броја у врсти дељив са крајњим левим бројем из те тројке. Ако је написано више од 5 бројева, доказати да је последњи паран.*

Решење. Приметимо, прво, да ако се у врсти напишу узастопно два парна броја, тада и сви написани после њих морају бити парни да би био задовољен услов да је збир свака три узастопна броја из врсте дељив са крајњим левим из те тројке. Друго, у врсти може бити или подједнако парних и непарних бројева или може бити за један више парних или непарних. Треће, паран број се може наћи само испред два броја исте парности.

Претпоставимо, даље, да је последњи број непаран. Тада разликујемо два случаја:

1. случај. Претпоследњи број је паран. Тада је онај који му претходи непаран, па се пре њега у врсти мора наћи непаран. Узимајући у обзир да су написани бројеви узастопни, закључујемо да је пре њега паран, затим непаран, па непаран итд. Међутим, из ове конструкције је јасно да на сваки паран број долазе два непарна, па следи да је написано највише пет бројева.

2. случај. Претпоследњи број је непаран, па му претходи паран. Затим долазе два непарна, па паран итд. Разматрањем као у првом случају, закључујемо да се у врсти налазе свега три броја.

Дакле, ако је написано више од пет бројева, на основу претходног следи да је последњи паран.

2. *Нека је ABC оштроугли троугао, C' и A' произвољне тачке на страницама AB и BC, редом, и B' средиште странице AC.*

(а) Доказати да је површина троугла $A'B'C'$ не већа од половине површине троугла ABC.

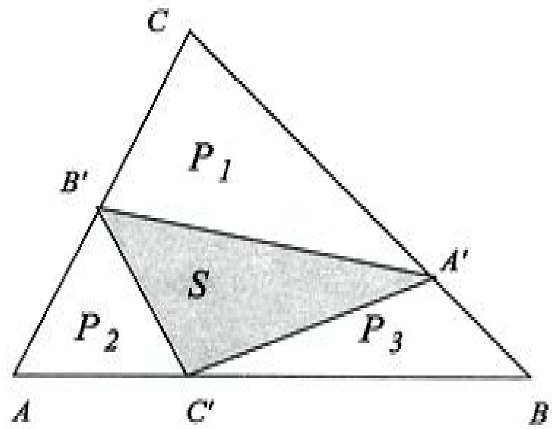
(б) Доказати да је површина троугла $A'B'C'$ једнака четвртини површине троугла ABC ако и само ако се бар једна од тачака A' и C' поклапа са средиштем одговарајуће странице.

Решење. (а) Означимо са P површину троугла ABC, P_1 површину троугла $B'A'C$, P_2 површину троугла $AC'B'$, P_3 површину троугла $C'BA'$ и са S површину троугла $A'B'C'$ (слика 6). Тада је

$$S = P - P_1 - P_2 - P_3.$$

Даље, нека је $A'C = a_1$ и $AC' = c_1$. Тада је $BC' = c - c_1$, $BA' = a - a_1$ и $AB' = CB' = \frac{b}{2}$, где су a, b и c дужине одговарајућих страница троугла

ABC.



Сл. 6

Нека је h_b висина из темена B у троуглу ABC, а h_1 висина из темена A' у троуглу $B'A'C$. Применом Талесове теореме добијамо

$$\frac{h_1}{h_b} = \frac{a_1}{a},$$

одакле је

$$P_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{b}{2} \cdot h_b \cdot \frac{a_1}{2a} = P \cdot \frac{a_1}{2a}.$$

Сличним разматрањем добијамо

$$P_2 = P \cdot \frac{c_1}{2c} \text{ и } P_3 = P \cdot \frac{2(a-a_1)(c-c_1)}{2ac}.$$

Даље је

$$\begin{aligned} S &= \frac{P}{2}\Big(2 - \frac{a_1}{a} - \frac{c_1}{c} - \frac{2(a-a_1)(c-c_1)}{ac}\Big) = \\ &= \frac{P}{2} \cdot \frac{2ac - a_1c - c_1a - 2(a-a_1)(c-c_1)}{ac} = \\ &= \frac{P}{2} \cdot \frac{2ac - a_1c - c_1a - 2ac + 2a_1c - 2ca_1 + 2c_1a_1}{ac} = \\ &= \frac{P}{2} \cdot \frac{a_1c + c_1a - 2a_1c_1}{ac}. \end{aligned}$$

Сада је јасно да је $S \leq \frac{1}{2}$ еквивалентно са $a_1c + c_1a - 2a_1c_1 \leq ac$. Међутим, последња неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{c - 2c_1}{c - c_1} \leq \frac{a}{a_1}.$$

Како је $\frac{c-2c_1}{c-c_1} \leq 1$, а $1 \leq \frac{a}{a_1}$, следи да је она тачна, па је тачна и полазна неједнакост, односно, $S \leq \frac{1}{2}$.

(б) ($\Rightarrow$) Нека је

$$S = \frac{P}{4} = \frac{P}{2} \cdot \frac{a_1c + c_1a - 2a_1c_1}{ac},$$

Тада је

$$a_1c + c_1a - 2a_1c_1 = \frac{ac}{2},$$
$$c_1(a - 2a_1) = \frac{c}{2}(a - 2a_1),$$
$$(c_1 - \frac{c}{2})(a - 2a_1) = 0,$$

одакле следи да је $a_1 = \frac{a}{2}$ или $c_1 = \frac{c}{2}$, па је бар једна од тачака A' и C' средиште одговарајуће странице.

($\Leftarrow$) Нека је, без умањења општости, A' средиште странице BC. Тада је $a_1 = \frac{a}{2}$, па из дела под (а) следи

$$S = \frac{P}{2} \frac{\frac{a}{2} \cdot c + c_1a - ac_1}{ac} = \frac{P}{4}.$$

3. *Сто тегова масе 1 г, 2 г,..., 100 г распоређено је на два таса тако да су теразије у равнотежи. Доказати да је могуће уклонити по два тега са сваког таса тако да теразије остану у равнотежи.*

Решење. Види решење петог задатка за 10. и 11. разред.

4. *(а) На сваком пољу прве и последње врсте шаховске табле 8×8 стоји по фигура: на првој беле, а на последњој црне боје. У једном потезу је дозвољено преместити произвољну фигуру на слободно суседно поље по хоризонтали или вертикали. Колико је најмање потеза потребно да се све црне фигуре преместе на прву, а све беле на последњу врсту?*

   (б) Исто питање за таблу 7×7.

Решење. (а) Одговор: 120.

Означимо поља шаховске табле на уобичајени начин: колоне са a, b,..., h, а врсте са 1, 2,..., 8. Да би бела и црна фигура замениле места, свака мора да направи бар 7 потеза, али мора бити и бар једно обилажење, тј. бар једна од њих мора направити бар 8 потеза. Следи да је број потеза потребан за замену места белих и црних фигура на табли бар $8 \cdot (7+8) = 120$. Покажимо да је то могуће учинити са тачно 120 потеза.

Поделимо таблу на четири дела, тако да сваки део чине по две узастопне колоне, тј. a и b , c и d, e и f , g и h. Покажимо да је за замену белих и црних фигура на једном делу табле, нпр. ab, потребно најмање 30 потеза.

Преместимо белу фигуру са $a1$ на $a6$ помоћу 5 потеза, затим белу фигуру са $b1$ на $b4$ помоћу 3 потеза и црну фигуру са $b8$ на $b5$ помоћу 3 потеза. У следећем потезу, црну фигуру са $b5$ премештамо на $a5$, а црну фигуру са $a8$ на $a7$. Затим бела фигура са $b4$ у 4 потеза иде на $b8$, а црна са $a5$ на $a1$ у 4 потеза. Коначно, црна са $a7$ иде на $b7$, а потом у 6 потеза на $b1$, док бела са $a6$ иде на $a8$ у два потеза.

Дакле, беле и црне фигуре су замениле места помоћу

$$5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 4 + 4 + 1 + 6 + 2 = 30$$

потеза.

(б) Одговор: 92.

Означимо колоне табле са a, b,..., g, а врсте са 1, 2,...., 7. Сличним разматрањем као под (а), закључујемо да је за замену места беле и црне фигуре потребно бар 7+6=13 потеза.

Поделимо таблу на четири дела: a, bc, de и fg. На деловима bc, de и fg аналогним поступањем као у (а) можемо заменити места белим и црним фигурама са укупно $6 \cdot 13 = 78$ потеза. На делу a морамо направити потез више при заобилажењу, тј. укупно 14, па су за целокупну замену потребна 92 потеза.

Напомена. Овај резултат се не може побољшати ни ако се уместо делова a и bc посматра јединствени део abc.

5. *Неуморни Тома и Јеремија конструишу низ на следећи начин: На почетку се налази један природан број. Затим њих двојица наизменично дописују следеће бројеве: Тома последњем написаном броју додаје једну од његових цифара и записује тако добијен број, а Јеремија одузима једну од цифара и записује тако добијен број. Доказати да постоји број који се у том низу понавља бар 100 пута.*

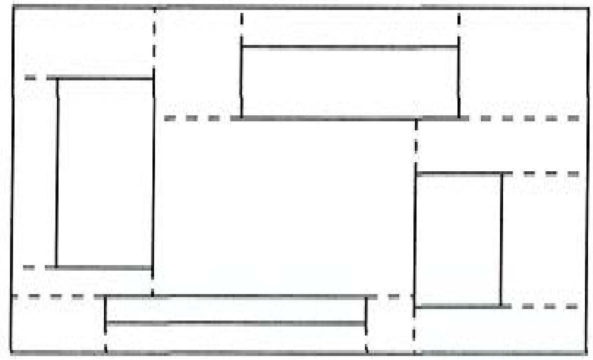
Решење. Види решење трећег задатка за 10. и 11. разред.

6. *Из унутрашњости правоугаоног листа папира је изрезано n правоугаоника чије су странице паралелне са ивицама листа. Одредити најмањи број делова правоугаоног облика на које је могуће разрезати описани лист папира.*

(Показати да се папир увек може разрезати на нађени број делова, а да се у неким случајевима не може разрезати на мањи број делова.)

Решење. Одговор: $3n + 1$. За $n = 4$ одговарајуће резање је дато на слици

7.



Сл. 7

10 - 11 РАЗРЕД

1. *За које n је могуће распоредити бројеве од 1 до n по кружници тако да је збир свака два суседна броја дељив са бројем који следи за њима у смеру кретања казаљке на сату?*

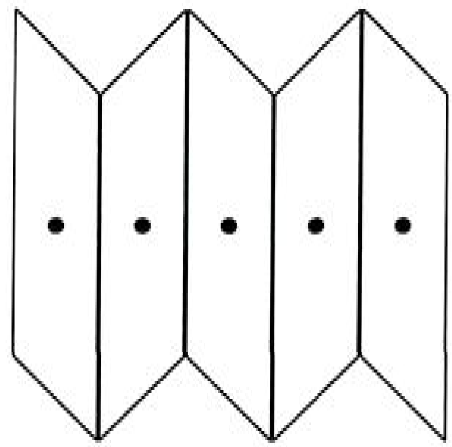
Решење. Нека је то могуће за неки број n. При таквом распоређивању не смеју два парна броја бити суседна. Заиста, ако би $a_1, a_2, \ldots, a_k$ био најдужи низ узастопно написаних парних бројева ($k \geq 2$) а b непарни број записан непосредно испред a_1, морало би бити $a_2|(b + a_1)$, што је немогуће. Слично закључујемо да ни тројка облика a_1, b, a_2 (паран, непаран, паран број) није могућа. Дакле, између свака два парна броја морају бити бар два непарна. То значи да непарних бројева мора бити бар два пута више него парних. Лако је видети да је за $n > 3$ и $n = 2$ то немогуће. Проверавањем закључујемо да су $n = 1$ и $n = 3$ решења.

2. *На правоугаоном листу папира обележено је:*

(а) неколико колинеарних тачака;

(б) три тачке.

Дозвољено је пресавити лист папира неколико пута по правој тако да се обележене тачке не нађу на линији превоја и затим га скроз пробушити са иглом. Доказати да је могуће да се рупе направљене *иглом поклопе са свим обележеним тачкама и да нема других рупа.*

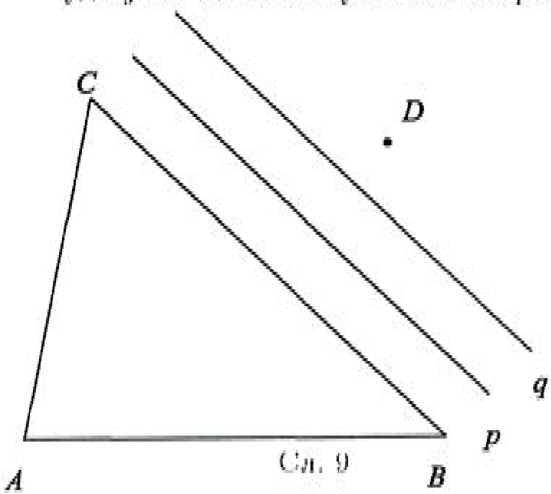


Сл. 8

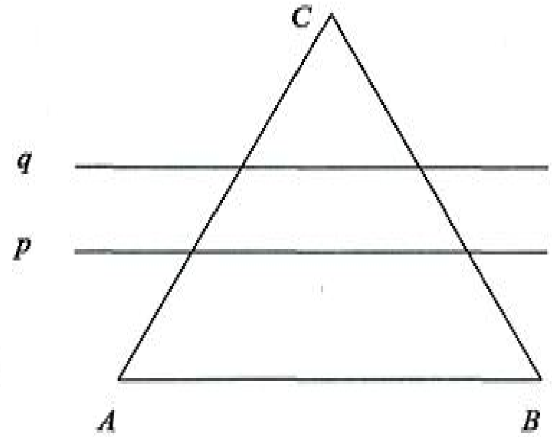
Решење. (а) Обележимо дате тачке са $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тако да A_i буде између A_{i-1} и A_{i+1}, за $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Треба савијати по симетралама дужи A_iA_{i+1}, за $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и то наизменично, на једну па на другу страну (види сл.8). Тако ће се све тачке које треба пробушити "поклопити". Имамо $n-1$ тих симетрала, значи n слојева папира, па ће бити пробушено тачно n тачака, дакле ниједна вишка.

(б) Ако су три дате тачке колинеарне, поступамо као под (а). Иначе, размотримо прво случај када троугао ABC који оне одређују није једнакостраничан, нпр. $AC \neq BC$. Обележимо са s симетралу дужи AB. Ако је тачка D која се добија из C осном симетријом са осом s ван папира, пресавијамо најпре по s, а затим по симетрали дужи AC и бушимо. Међутим, ако је D на папиру, таквим поступком и она би била пробушена. У том случају изаберимо, као на сл. 9, праве p и q паралелне са BC, које обе леже између троугла и тачке D, растојање $d(D,p)$ веће је од растојања $d(D,q)$, и $d(D,p) < d(C,p)$. Сада пресавијамо преко p, па преко q, померајући оба пута тачку D (тј. не дирајући троугао ABC). Коначним бројем оваквих потеза можемо учинити да место на којем се налазила тачка D не буде више на папиру. Притом тачке A, B, C нисмо "удвојили" другим тачкама. Сада можемо применити поступак описан на почетку.
Ако је, даље, троугао ABC једнакостраничан, изаберимо праве p и q паралелне са AB тако да секу преостале странице троугла, и да буде $d(C,p) > d(C,q)$, и $d(A,p) = d(C,p)$, (сл. 10). Када пресавијемо прво по p а затим по q добићемо неједнакостранични троугао, а тачке A, B, C опет неће бити

удвојене. Даље поступамо као горе.



Сл. 9



Сл. 10

3. *Неуморни Тома и Јеремија конструишу низ на следећи начин: На почетку се налази један природан број. Затим њих двојица наизменично дописују следеће бројеве: Тома последњем написаном броју додаје једну од његових цифара и записује тако добијен број, а Јеремија одузима једну од цифара и записује тако добијен број. Доказати да постоји број који се у том низу понавља бар 100 пута.*

Решење. Приметимо за почетак да је разлика свака два узастопна члана између -9 и 9. Доказаћемо да је тај низ ограничен, што ће значити да за свако $n \in N$ постоји број који се у том низу понавља n пута. Да је ограничен са доње стране лако је видети: сви његови чланови су ненегативни. Заиста, ако би у њему било негативних бројева, посматрајмо први међу њима. Он би био добијен од свог претходника (који је, јасно, неки једноцифрен број) одузимањем његове (једине) цифре, дакле био би једнак нули. Контрадикција. Докажимо сада да је тај низ ограничен и одозго. Нека је број написан пред први Јеремијин потез k-цифрен. Тада је једна горња граница низа број $\underbrace{99\ldots9}_{k}$. Заиста, ако би пред неки Јеремијин потез био записан број $\underbrace{99\ldots9}_{k-1}x$, после његовог потеза остао би или број $\underbrace{99\ldots9}_{k-1}0$ или број $\underbrace{99\ldots9}_{k-2}8y$ где је $y = x+1$, па ни после следећег Томиног потеза не би био пређен број $\underbrace{99\ldots9}_{k}$.

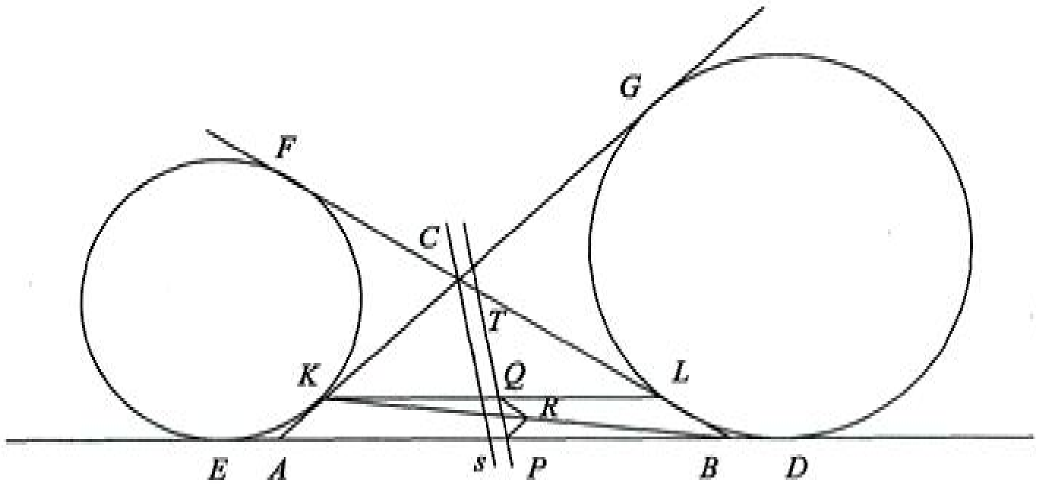
Тиме је доказ завршен.

4. *Нека су K и L тачке на страницама AC и CB троугла ABC у којима уписана кружница додирује те странице. Доказати да права која спаја средишта дужи KL и AB*

   (а) дели троугла ABC на пола;

   (б) паралелна је са симетралом угла ACB.

Решење Маје Тасковић. (б) Нека су, као на сл. 11. E и D, F и L, K и G додирне тачке правих $p(A,B)$, $p(B,C)$, $p(C,A)$ са кружницама приписаним уз странице AC и BC редом. Даље, обележимо са P, Q, R средишта дужи AB, KL, KB.



Сл. 11

Имамо:

$$\begin{aligned} AB + 2BD &= BD + AD = BD + AG = BD + AK + KC + CG = \\ &= AK + BL + LC + CF = AK + BF = \\ &= BE + AE = AB + 2AE \end{aligned}$$

одакле је $BD = AE$, тј. $BL = AK$. Али тада је $PR = QR$, пошто су то средње линије троуглова AKB и BLK, па је троугао PQR једнакокрак. Како је $\angle PRQ = 180^\circ - \angle ACB$, добијамо да је $\angle PQR = \frac{1}{2}\angle ACB$, и пошто је RQ паралелно са BC, следи да је QP паралелно са симетралом угла код C.

(а) Означимо још са S пресек симетрале угла код C са страницом AB а са T пресек праве $p(P,Q)$ са већом од страница AC и BC, рецимо BC. Пошто је $AS + SP = BS - SP$, имамо $SP = \frac{BS-AS}{2}$. Даље, по познатој особини симетрале угла је $AC : BC = AS : BS$, па $SP = BS \cdot \frac{BC-AC}{2BC}$. Одавде добијамо:

$$BC - AC = \frac{SP}{BS} \cdot 2BC = \frac{TC}{BC} \cdot 2BC = \frac{CT}{2},$$

што даје $AP + AC + CT = BP + BT$.

5. *(а) Сто тегова масе 1 г, 2 г,..., 100 г распоређено је на два таса тако да су теразије у равнотежи. Доказати да је могуће уклонити по два тега са сваког таса тако да теразије остану у равнотежи.*

(б) Нека је n такав да је тегове масе 1 г, 2 г,..., n г могуће распоредити на два таса тако да теразије буду у равнотежи. Да ли се за свако такво n $(n > 3)$ може са сваког таса уклонити по два тега тако да теразије остану у равнотежи?

Решење. (а) Нека је при распореду из услова задатка рецимо тег масе 1 г на левом тасу. Нека је k највећи број такав да су сви тегови 1 г, 2 г,...,k г на левом тасу. Тада је тег од $k+1$ грама на десном тасу. Нека је l највећи број такав да су сви тегови од $k+1$ до $k+l$ грама на десном тасу. Ако би било $k+l=100$ то би значило да важи $1+2+\ldots+k=(k+1)+(k+2)+\ldots+100$, тј.

$$\binom{k+1}{2} = 1+2+\ldots+k = \frac{1}{2}(1+2+\ldots+100) = \frac{1}{2}\binom{100}{2}$$

а лако се проверава да то није испуњено ни за једно $k=1,2,\ldots,100$. Дакле, $k+l<100$ па се и тег масе $k+l+1$ грама налази на левом тасу. Ако би било $l>1$ скидајући k и $k+l+1$ са левог и $k+1$ и $k+l$ са десног таса, одржали бисмо равнотежу. Остаје да размотримо случај $l=1$. Нека је m највећи број такав да су тегови маса $k+2, k+3, \ldots, k+m$ сви на левом тасу. Могућност $m>1$ одбацује се аналогно као и $l>1$. Дакле, тег од $k+3$ грама је на десном тасу. Али ту се налазе и сви преостали тегови: ако би тег од $k+s$ грама био на десном, а онај од $k+s+1$ на левом тасу, скидајући k и $k+s+1$ односно $k+1$ и $k+s$ одржали бисмо равнотежу. Дакле, ситуација је оваква:

$$\begin{array}{cc} 1 & k+1 \\ 2 & k+3 \\ \vdots & k+4 \\ k & \vdots \\ k+2 & 100 \end{array}$$

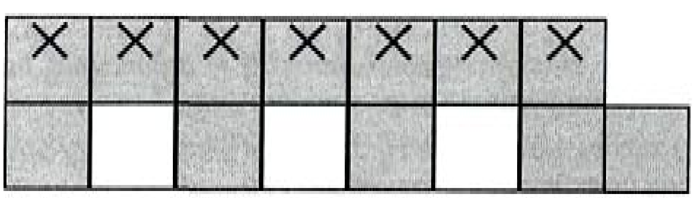
Међутим, ни једначина

$$1+2+\ldots+k+(k+2) = (k+1)+(k+3)+(k+4)+\ldots+100$$

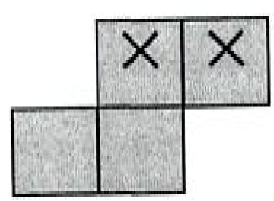
нема решења за $1 \leq k \leq 100$. Доказ је завршен.

(б) Не. На пример за $n=20$ могуће је на леви тас ставити тегове маса $1, 2, \ldots, 14$ грама, а на десни преостале. Тасови су тада у равнотежи, а очигледно су свака два тега са левог лакша од свака два са десног.

6. *На великој шаховској табли означено је $2n$ поља тако да топ може прећи преко свих, не прелазећи преко неозначених поља. Доказати да се фигура коју чине означена поља може разрезати на n правоугаоника.*



Сл. 12



Сл. 13

Решење. Биће довољно да посматрамо само правоугаонике састављене од целих поља. Доказ спроводимо индукцијом по n. За $n = 2$ тврђење је тривијално. Претпоставимо да је тачно за све бројеве мање од n. Уведимо координатни систем чије су осе паралелне ивицама које раздвајају поља табле. Посматрајмо две врсте означених поља које имају највећу, односно најмању ординату, и две колоне које имају највећу, односно најмању апсцису. Посматраћемо три случаја:

(1) У некој од тих врста и колона су означена више од два суседна поља. (сл. 12.) Избацивањем тих поља (рецимо да их има k) остала поља деле се на највише $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ "неповезаних" (тј. таквих да топ не може прећи из једног у други) делова. Ако је у једном броју њих (рецимо l) број поља непаран, из сваког таквог избацимо по једно поље тако да преостала поља буду "повезана". (Доказати да је то увек могуће!) Тако смо избацили $k + l$ (паран број) поља, и притом утрошили $1 + l$ правоугаоника. Пошто је $l \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, важи $2(1 + l) \leq k + l$, па на сваки од преосталих делова можемо применити индукцијску претпоставку, и разрезати их. Наравно, ако имамо мањак правоугаоника, можемо даље сећи онај дужине k.

(2) У некој од тих врста и колона су означена тачно два суседна поља. (сл. 13.) Избацивањем правоугаоника састављеног од та два поља остаје нам "повезана" целина од $2n - 2$ поља коју можемо разрезати на $n - 1$ правоугаоника.

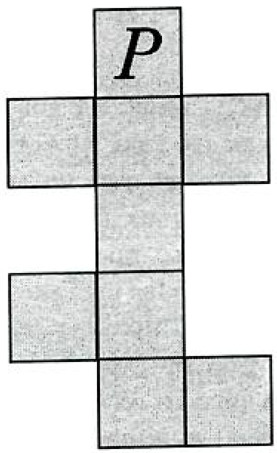
(3) У свакој од тих врста и колона налазе се само (међусобно) несуседна поља. Изаберимо једно од њих, рецимо поље P из врсте са највећом ординатом. Посматрајмо колону у којој је P, и нека се у њој налази тачно m поља до којих се може стићи из P крећући се само надоле (рачунајући и P). Опет разликујемо три случаја:

(а) Ако је $m = 2k + 1$ за неко $k \in N$ (сл. 14.). Избацивањем правоугаоника састављеног из тих m поља преостаје највише k "неповезаних" делова. Ако је међу њима l са непарним бројем поља, из сваког избацимо по једно, тако да остане "повезан". Тако смо елиминисали $2k + 1 + l$ поља користећи $1 + l$ правоугаоника, па пошто је $l < 2k$ (зашто?) имамо $2k + 1 + l \geq 2(1 + l)$ и довољно је применити индукцијску претпоставку на преостале делове.

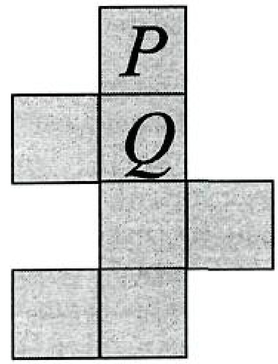
(б) $m = 2k$ и избацивањем P и њему суседног поља (Q) остају највише два "неповезана" дела. (сл. 15.) Поступамо слично као под (а): Ако је број делова (преосталих после избацивања правоугаоника дужине m) са непарним бројем поља l, из сваког избацимо по једно тако да остане "повезан". Елиминисали смо $2k + l$ поља користећи $1 + l$ правоугаоника, па тврђење следи из чињенице да је $l \leq 2k - 2$. Заиста, $l = 2k$ би дало да избацивањем P и Q остају три "неповезана" дела, а $l = 2k - 1$ је немогуће због парности броја означених поља.

(ц) Избацивањем P и Q остају три "неповезана" дела. Ако сваки од њих има паран број поља, на њих можемо применити индукцијску претпоставку. Иначе, два од њих имају непаран број поља. Међутим, тада можемо избацити два правоугаоника, један од три, један од једног поља, тако да преостали

делови буду "повезани" и имају по паран број поља. Ово се оставља читаоцу за вежбу.
Исцрпљени су сви случајеви, и доказ је најзад комплетиран.



Сл. 14



Сл. 15

7. *Доказати да конвексни полиедар са* $10n$ *страна има* n *страна са истим бројем ивица.*