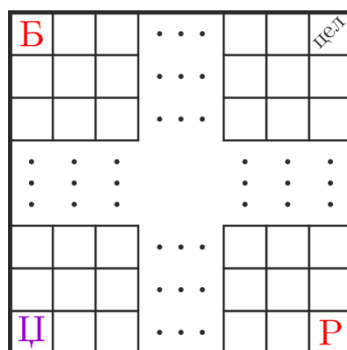


JММО 2025

1. Бетмен, Робин и Џокер се во три ќошиња на квадратна 2025×2025 табла, така што Бетмен и Робин се во две полиња на иста дијагонала (види цртеж). Во секој круг прво Џокер се поместува во соседно поле (поле кое има заедничка страна со полето во кое се наоѓа), без да излезе од таблата, а потоа Бетмен и Робин се поместуваат во соседни на нив полиња. Џокер победува ако успее да стигне во четвртиот ќош, а Бетмен и Робин победуваат ако го фатат Џокер, т.е. ако барем еден од нив се најде во исто поле со Џокер.



Ако во секој чекор, секој гледа каде се наоѓаат другите двајца, кој има победничка стратегија, Џокер или Бетмен и Робин? Одговорот да се образложи!

Забелешка. Бетмен и Робин се договараат пред почетокот на играта!

Решение. Една стратегија за победа на Бетмен и Робин е следнава: Робин, кој е во ист ред со Џокер се движи така што останува во истиот ред, а Бетмен кој е во истата колона останува во истата колона со Џокер. Притоа, ако Џокер не го сменил редот/колоната, Робин/Бетмен се придвижува кон Џокер. На овој начин во секој чекор Џокер ќе биде во ист ред со Робин (лево) и во иста колона со Бетмен (долу), па во никој случај Џокер не може да стигне во ќошот горе десно, т.е. не може да победи.

Ќе докажеме дека оваа стратегија е победничка за Бетмен и Робин.

Го разгледуваме растојанието на Џокер до Бетмен и на Џокер до Робин. На почетокот до секој од двајцата ова растојание е 2024. Јасно, ова растојание не се зголемува. Бидејќи Бетмен и Робин или одат паралелно со Џокер (ако Џокер оди лево или долу) или едниот се приближува за две полиња кон него (Џокер оди десно и Робин оди лево, или пак Џокер оди горе и Бетмен оди долу). Покрај тоа движењето е ограничено со рамката на таблата, па затоа ќе имаме конечен број потези. Притоа во некои чекори растојанието ќе се намалува и по конечен број чекори растојанието или до Бетмен или до Робин ќе биде еднакво на нула. Значи, Бетмен и Робин имаат победничка стратегија.

2. Нека B' е подножјето на висината повлечена од темето B кон страната AC во остроаголниот $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната AB , а точката O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Правата $B'D$ ја сече правата CO во точката E . Докажи дека точките B, C, B', E лежат на една кружница.

Решение. *Прв начин.* Нека C' е подножјето на висината повлечена од темето C кон страната AB .

Од $\angle BC'C = \angle BB'C = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $BCB'C'$ е тетивен. Нека опишаната кружница околу четириаголникот $BCB'C'$ по втор пат ја сече правата CO во точката E' . Тогаш

$$\begin{aligned}\angle BE'O &= \angle BE'C = \angle BC'C \\ &= 90^\circ = \angle BDO.\end{aligned}$$

Оттука следува дека E' лежи на опишаната кружница околу $\triangle BOD$. Затоа

$$\angle E'DB = \angle E'OB = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\angle BAC.$$

Бидејќи $\angle BB'C = 90^\circ$, а D е средина на AB , таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle AB'B$, па затоа $\overline{DB'} = \overline{DA}$. Оттука

$$\angle BDB' = 2\angle BAB' = 2\angle BAC.$$

Според тоа, точките B', D, E се колинеарни, па затоа $E \equiv E'$, т.е. точката E лежи на опишаната кружница околу четириаголникот $BCB'C'$ што и требаше да се докаже.

Втор начин. Бидејќи $\angle BB'C = 90^\circ$ и D е средина на AB , таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle AB'B$, па затоа $\overline{DB'} = \overline{DB}$. Оттука следува

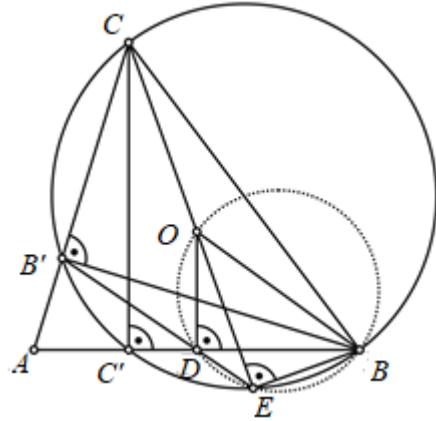
$$\angle EB'B = \angle DB'B = \angle B'BD = \angle B'BA = 90^\circ - \angle BAC.$$

Од друга страна, бидејќи O е центар на опишаната кружница имаме

$$\angle ECB = \angle OCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle BAC.$$

Значи, $\angle EB'B = \angle ECB$, т.е. точките B, C, B', E лежат на една кружница.

Трет начин. Нека аглиите на триаголникот со означени со стандардните



ознаки α, β, γ . Бидејќи $\angle BB'C = 90^\circ$ и D е средина на AB , таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle AB'B$, па затоа $\overline{DB'} = \overline{DA}$. Оттука следува $\angle AB'D = \angle DAB' = \alpha$. Освен тоа,

$$\angle ACO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle COA = 90^\circ - \beta.$$

Оттука следува

$$\angle CEB' = \angle AB'D - \angle ACO = \alpha - 90^\circ + \beta = 90^\circ - \gamma = \angle CBB',$$

т.е. точките B, C, B', E лежат на една кружница.

3. Даки постои бесконечна низа прости броеви $p_i, i=1, 2, \dots$ таква што за секој $i \in \mathbb{N}$ важи $p_{i+1} \in \{2p_i - 1, 2p_i + 1\}$.

Решение. Да претпоставиме дека таква низа постои и нека p_i е првиот член на низата кој е поголем од 3. Можни се два случаја.

Ако $p_i = 3k + 1$, тогаш $p_{i+1} \in \{2p_i - 1, 2p_i + 1\} = \{6k + 1, 6k + 3\}$ и бидејќи $3 \mid 6k + 3 > 3$ добиваме дека $p_{i+1} = 6k + 1$. Ја продолжуваме постапката и добиваме дека $p_{i+t} = 2^t \cdot 3k + 1$ за некој $t \in \mathbb{N}$. Бројот p_i е непарен, па од малата теорема на Ферма следува дека $2^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$. Оттука следува

$$p_{i+(p_i-1)} = 2^{p_i-1} \cdot 3k + 1 \equiv 3k + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Според тоа, бројот $p_{i+(p_i-1)}$ е делив со p_i и бидејќи е поголем од p_i тој не е прост број, што противречи на претпоставката.

Ако $p_i = 3k - 1$, тогаш $p_{i+1} \in \{2p_i - 1, 2p_i + 1\} = \{6k - 3, 6k - 1\}$ и бидејќи $3 \mid 6k - 3 > 3$ добиваме дека $p_{i+1} = 6k - 1$. Ја продолжуваме постапката и добиваме дека $p_{i+t} = 2^t \cdot 3k - 1$ за некој $t \in \mathbb{N}$. Бројот p_i е непарен, па од малата теорема на Ферма следува дека $2^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$. Оттука следува

$$p_{i+(p_i-1)} = 2^{p_i-1} \cdot 3k - 1 \equiv 3k - 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Според тоа, бројот $p_{i+(p_i-1)}$ е делив со p_i и бидејќи е поголем од p_i тој не е прост број, што противречи на претпоставката.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека не постои низа прости броеви со саканото својство.

4. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажи дека

$$\frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z} \geq 1.$$

Решение. *Прв начин.* Ако ги искористиме неравенствата меѓу квадратната и аритметичката и меѓу геометриската и аритметичката средина добиваме:

$$\begin{aligned} 1 + 2\left(\frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z}\right) &= \left(2\frac{x^3}{2+x} + \frac{x^2+1+1}{9}\right) + \left(2\frac{y^3}{2+y} + \frac{y^2+1+1}{9}\right) + \left(2\frac{z^3}{2+z} + \frac{z^2+1+1}{9}\right) \\ &\geq \left(2\frac{x^3}{2+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x+1+1}{3}\right)^2\right) + \left(2\frac{y^3}{2+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y+1+1}{3}\right)^2\right) + \left(2\frac{z^3}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z+1+1}{3}\right)^2\right) \\ &\geq \left(\frac{x^3}{2+x} + \frac{x^3}{2+x} + \frac{(x+2)^2}{27}\right) + \left(\frac{y^3}{2+y} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{(y+2)^2}{27}\right) + \left(\frac{z^3}{2+z} + \frac{z^3}{2+z} + \frac{(z+2)^2}{27}\right) \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{2+x} \cdot \frac{x^3}{2+x} \cdot \frac{(x+2)^2}{27}} + 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{2+y} \cdot \frac{y^3}{2+y} \cdot \frac{(y+2)^2}{27}} + 3\sqrt[3]{\frac{z^3}{2+z} \cdot \frac{z^3}{2+z} \cdot \frac{(z+2)^2}{27}} \\ &= 3\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3}\right) = 3 \end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $27x^3 = (x+2)^2$, $27y^3 = (y+2)^2$, $27z^3 = (z+2)^2$, т.е. ако и само ако $x = y = z = 1$.

Втор начин. Ако ги искористиме неравенствата меѓу квадратната и аритметичката, меѓу геометриската и аритметичката средина и равенството:

$$\frac{a^3}{2+a} = a^2 - 2a + \frac{4a}{2+a} = \frac{5}{9}a^2 - \frac{26}{9}a + \frac{4}{9}a(a+2) + \frac{4a}{2+a}$$

добиваме

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z} &= \frac{5(x^2+y^2+z^2)}{9} - \frac{26(x+y+z)}{9} + \left(\frac{4x(x+2)}{9} + \frac{4x}{2+x}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{4y(y+2)}{9} + \frac{4y}{2+y}\right) + \left(\frac{4z(z+2)}{9} + \frac{4z}{2+z}\right) \\ &\geq \frac{5}{3} - \frac{26(x+y+z)}{9} + 2\sqrt{\frac{4x(x+2)}{9} \cdot \frac{4x}{2+x}} + \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{4y(y+2)}{9} \cdot \frac{4y}{2+y}} + 2\sqrt{\frac{4z(z+2)}{9} \cdot \frac{4z}{2+z}} \\ &= \frac{5}{3} - \frac{2(x+y+z)}{9} \geq \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = 1. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 1$.

Трет начин. Ако ги искористиме неравенството меу аритметичката и

геометриската средина и Енгеловиот принцип на минимум

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

добиваме

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z} &= \frac{x^4}{2x+x^2} + \frac{y^4}{2y+y^2} + \frac{z^4}{2z+z^2} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2x+x^2+2y+y^2+2z+z^2} \\ &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+1+x^2)+(y^2+1+y^2)+(z^2+1+z^2)} = \frac{3^2}{2 \cdot 3+3} = 1. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 1$.

Забелешка. Задачата може да се реши и со користење на неравенството на Холдер и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, но ова решение не го презентираме бидејќи истото не е на ниво на ученици до 15,5 години.

5. Нека M е средина на страната BC од $\triangle ABC$ и точката P , различна од B , е таква што четириаголникот $ABMP$ е тетивен и опишаната кружница на $\triangle BPC$ ја допира правата AB . Ако E е вториот пресек на правата BP и опушаната кружница околу $\triangle ABC$, определи го односот $\overline{BE} : \overline{BP}$.

Решение. *Прв начин.* Нека D е средината на отсечката BP . Тогаш DM е средна линија на $\triangle BPC$, па $\angle DMB = \angle PCB = \angle DBA = \angle PMA$ и $\angle BDM = \angle BPC = 180^\circ - \angle CBA = \angle APM$. Според тоа, $\triangle BDM \sim \triangle APM$.

Значи, $\angle MDP = \angle MBA$, а како $\angle DPM = \angle BAM$, добиваме дека и $\triangle MDP \sim \triangle MBA$. Сега,

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$$

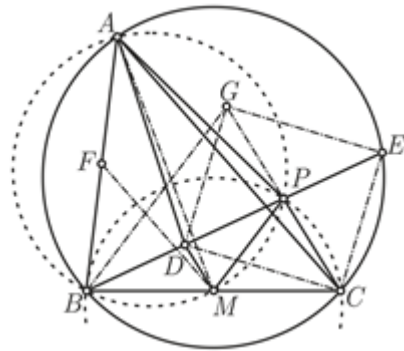
и како $\angle DBA = \angle PMA$, добиваме $\triangle PMA \sim \triangle DBA$.

Следува дека

$$\begin{aligned} \angle PDA &= 180^\circ - \angle ADB \\ &= 180^\circ - \angle APM = \angle CBA, \end{aligned}$$

а знаеме и дека $\angle APD = \angle AMB$ и $\angle AED = \angle ACB$. Конечно, добиваме дека $\triangle ADP \sim \triangle ABM$ и $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, па мора да е $\overline{DP} = \overline{PE}$. Бидејќи

$$D \text{ е средина на } BP, \text{ добиваме } \frac{\overline{BE}}{\overline{BP}} = \frac{3\overline{DP}}{2\overline{DP}} = \frac{3}{2}.$$



Втор начин. Бидејќи AB е тангентата на опишаната кружница околу $\triangle BPC$ заклучуваме дека важи $\angle BPC = 180^\circ - \angle CBA$, па затоа важи $\angle CPE = \angle CBA$. Од тетивниот четириаголник $ABCE$ следуваат равенствата $\angle PEC = \angle BEC = \angle BAC$. Според тоа, $\triangle EPC \sim \triangle ABC$, па затоа $\angle ECP = \angle ACB$ и

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}. \quad (1)$$

Од тетивниот четириаголник $ABMP$ имаме $\angle CMP = \angle BAP$. Освен тоа, $\angle PCM = \angle ECM - \angle ECP = \angle ECM - \angle ACB = \angle ECA = \angle PBA$, при што за последното равенство го користиме тетивниот четириаголник $BCEA$. Оттука следува дека $\triangle ABP \sim \triangle MCP$, па имаме

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{PE}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$. Оттука следува $\frac{\overline{BE}}{\overline{BP}} = \frac{3}{2}$.

Трет начин. Нека D е средината на BP , F е средината на AB и G е таква што P е средина на CG . Бидејќи AB е тангентата на опишаната кружница околу $\triangle BPC$ заклучуваме дека важи $\angle BPC = 180^\circ - \angle CBA$, па затоа важи $\angle GPB = \angle MBA$. Од друга страна MP е средна линија на $\triangle BCG$, па затоа $\angle PBG = \angle BPM = \angle BAM$. Според ова, $\triangle ABM \sim \triangle BPG$. Оттука $\angle PDG = \angle BFM = \angle BAC = \angle BEC$, т.е. $DG \parallel CE$. Значи, четириаголникот $DCEG$ е паралелограм, па затоа $\overline{PE} = \overline{DP} = \overline{BD}$. Конечно, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BP}} = \frac{3\overline{DP}}{2\overline{DP}} = \frac{3}{2}$.

Забелешка. Задачата може да се реши и со инверзија со центар B и радиус $r = \sqrt{\overline{BM} \cdot \overline{BC}}$. Но, ова решение нема да го презентираме бидејќи излегува надвор од знаењата на учениците до 15,5 години.