Шестой Турнир, 1984-1985

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, подготовительный вариант, 18 ноября 1984 г.

7-8 кл.

Задача 1.(6)
Биссектрисы BD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O.
Докажите, что если OD=OE, то либо треугольник равнобедренный, либо его угол при вершине A равен 60^{o}.
Фольклор

Задача 2.(6)
Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b, всего 9 кварталов).
Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата - тоже улицы).
Московский фольклор

Задача 3.(4)
Решить в целых числах уравнение $2^n+7=x^2$.
Фольклор

Задача 4.(8)
В прямоугольник вписан четырёхугольник (по вершине на каждой стороне).
Докажите, что его периметр не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.
В. Произволов

Задача 5.(6)
Доказать, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.
Фольклор

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, основной вариант, 18 ноября 1984 г.

7-8 кл.

Задача 1.(6)
Биссектрисы BD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O.
Докажите, что если OD=OE, то либо треугольник равнобедренный, либо его угол при вершине A равен 60^o.
Фольклор

Задача 2.(6)
Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b, всего 9 кварталов).
Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата - тоже улицы).
Московский фольклор

Задача 3.(6)
На плоскости лежит конечное множество точек M, такое что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками, так что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырёхугольника ABCD. В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену и т. д.
Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?
В. Колосов

Задача 4.(12)
На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала.
За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?
Из канадского фольклора

Задача 5.(12)
На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.).
Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
В. Ильичев

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, подготовительный вариант, 18 ноября 1984 г.

9-10 кл.

Задача 1.(5)
В выпуклом шестиугольнике ABCDEF AB параллельна CF, CD параллельна BE и EF параллельна AD.
Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.
Фольклор

Задача 2.(5)
Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата - тоже улицы).
Московский фольклор

Задача 3.(5)
В треугольнике ABC угол B равен углу C, и каждый из них равен 40°, BD - биссектриса.
Докажите, что BD+DA=BC.
Фольклор

Задача 4.(5)
Доказать, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.
Фольклор

Задача 5.(12)
На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
В. Ильичев

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, основной вариант, 18 ноября 1984 г.

9-10 кл.

Задача 1.(5)
В выпуклом шестиугольнике ABCDEF: AB параллельна CF, CD параллельна BE и EF параллельна AD.
Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.
Фольклор

Задача 2.(10)
Набор чисел $A_1, A_2, ..., A_{100}$ получен некоторой перестановкой из чисел 1, 2, ..., 100. Образуют сто чисел:
$B_1=A_1$, $B_2=A_1+A_2$, $B_3=A_1+A_2+A_3$, ..., $B_{100}=A_1+A_2+A_3+...+A_{100}$.
Докажите, что среди остатков от деления на 100 чисел $B_1, B_2, ..., B_{100}$ найдутся 11 различных.
Л. Курляндчик

Задача 3.(10)
В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число +1 (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали.
Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?
Фольклор

Задача 4.(10)
На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?
Из канадского фольклора

Задача 5.(10)
В квадрате 7*7 клеток размещено 16 плиток размером 1*3 клетки и одна плитка 1*1.
Докажите, что плитка 1*1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.
Фольклор

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, подготовительный вариант, 14 апреля 1985 г.

7-8 кл.

Задача 1.(3)
Медиана, биссектриса и высота треугольника пересекаются в точке O. Отрезок биссектрисы от вершины до точки O равен отрезку высоты от вершины до точки O.
Докажите, что треугольник равносторонний.
Фольклор

Задача 2.(5)
Имеется 68 монет, причём известно, что любые две монеты различаются по весу. За 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самую тяжелую и самую лёгкую монеты.
С. Фомин

Задача 3.(5)
Найти все решения системы уравнений:
$(x+y)^3=z$; $(y+z)^3=x$; $(z+x)^3=y$.
По мотивам A. Aho, J. Hopfcrot, J. Ullman

Задача 4.(5)
На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу).
Докажите, что через 1985 секунд они не могут вернуться в исходное положение.
Ленинградская математическая олимпиада, 1985

Задача 5.(5)
Каждый член последовательности, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему числу его суммы цифр. Первым членом последовательности является единица.
Может ли в последовательности встретиться число 123456?
Д. Фомин

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, основной вариант, 14 апреля 1985 г.

7-8 кл.

Задача 1.(5)
a, b, c - длины сторон треугольника, Г - величина угла против стороны c. Доказать, что c не меньше, чем (a+b)*sin(Г/2).
Фольклор

Задача 2.(3+5)
Целой частью числа A называется наибольшее целое число, не превышающее A; обозначение: [A]. Дробной частью A называется A-[A]; обозначение: {A}.
а)(3) Привести пример такого положительного A, что {A}+{1/A}=1.
б)(5) Может ли такое A быть рациональным числом?
И. Варге, Румыния

Задача 3.(8)
В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу.
Доказать, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.
Фольклор

Задача 4.(4)
Квадрат разбит на пять прямоугольников так, что четыре угла квадрата являются углами четырёх прямоугольников, площади которых равны между собой, а пятый прямоугольник не имеет общих точек со сторонами квадрата
Докажите, что этот пятый прямоугольник есть квадрат.

```
 ----------
|       |  |
|       |  |
|-------|  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |-------|
|  |       |
|  |       |
 ----------
```

В. Произволов

Задача 5.(6+16)
В таблицу 10*10 нужно записать в каком-то порядке цифры 0, 1, 2, 3, ..., 9 так, что каждая цифра встречалась бы 10 раз.
а)(6) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречалось не более четырёх различных цифр?
б)(16) Докажите, что найдётся строка или столбец, в которой (в котором) встречается не меньше четырёх различных чисел.
Л. Д. Курляндчик

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, подготовительный вариант, 14 апреля 1985 г.

9-10 кл.

Задача 1.(4)
В четырёхугольнике ABCD: AB=BC=1, $\angle B=100^{o}$, $\angle D=130^{o}$. Найти (длину отрезка - *Ред.*) BD.
Фольклор

Задача 2.(6)
Из чисел 1, 2, 3, ..., 1985 выбрать наибольшее количество чисел так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была простым числом. (простые числа - 2, 3, 5, 7, 11; единица простым числом не является.)
Фольклор

Задача 3.(6)
Даны три действительных числа: a, b и c. Известно,
что $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$.
Докажите, что $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.
Фольклор

Задача 4.(4)
На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу).
Докажите, что через 1985 секунд они не могут вернуться в исходное положение.
Ленинградская математическая олимпиада, 1985

Задача 5.(4)
Квадрат разбит на пять прямоугольников так, что четыре угла квадрата являются углами четырёх прямоугольников, площади которых равны между собой, а пятый прямоугольник не имеет общих точек со сторонами квадрата
Докажите, что этот пятый прямоугольник есть квадрат.

```
 ----------
|       |  |
|       |  |
|-------|  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |-------|
|  |       |
|  |       |
 ----------
```

В. Произволов

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, основной вариант, 14 апреля 1985 г.

9-10 кл.

Задача 1.(6)
Доказать, что площадь проекции единичного куба на плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную к этой плоскости.
Фольклор

Задача 2.(4+4)
Радиус OM круга равномерно вращается, поворачиваясь в секунду на угол $360^o/N$ (N - натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимал положение OM_0, через секунду - OM_1, ещё через две секунды после этого (то-есть через три секунды после начала) - OM_2, ещё через три секунды после этого - OM_3, и т.д., ещё через N-1 секунд после OM_{N-2} - OM_{N-1}.
При каких N эти положения радиуса делят круг на N равных секторов?
а)(4) Верно ли, что к числу таких N относятся все степени двойки?
б)(4) Относятся ли к числу таких N какие-либо числа, не являющиеся степенями двойки?
В. Произволов

Задача 3.(6)
В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу.
Доказать, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.
Фольклор

Задача 4.(8)
Выпуклой фигурой F нельзя накрыть полукруг радиуса R.
Может ли случиться, что двумя фигурами, равными F, можно накрыть круг радиуса R? А если взять невыпуклую фигуру F?
Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек отрезок, соединяющий эти точки, целиком входит в фигуру.
Н. Васильев, А. Самосват

Задача 5.(12+12)
а)(12) Квадрат разбит на прямоугольники. "Цепочкой" называется такое подмножество K множества этих прямоугольников, что существует сторона квадрата A, целиком закрытая проекциями прямоугольников из K, но при этом ни в какую точку A не проектируются внутренние точки двух прямоугольников из K (мы относим к прямоугольнику и его стороны). Доказать, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.
б)(12) Аналогичная задача для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки нужно заменить сторону на ребро).