

Републички натпревар 2024

I година

1. Во една фабрика, во текот на еден месец, се произведуваат три модели на бироа: А, В и С, за кои се потребни само две сировини: дрво и челик. Притоа, на месечно ниво:

- Фабриката мора да произведе најмалку 300 бироа од модел А, најмалку 200 бироа од модел В и најмалку 400 бироа од модел С, но во однос 3:2:5, соодветно.

- Времето потребно за производство на едно биро од моделот С е два пати поголемо од времето за производство на биро од моделот В, но и три пати поголемо од времето за производство на биро од модел А. Фабриката има време да произведе најмногу 1400 бироа од моделот С.

- За производство на едно биро од модел А потребни се 12 kg дрво и 2 kg челик, за биро од модел В потребни се 17 kg дрво и 2 kg челик и за биро од модел С потребни се 20 kg дрво и 4 kg челик. Фабриката располага со 17000 kg дрво и 6000 kg челик.

- Приходот од едно биро од моделот А, В и С е 1400, 2100 и 2000 денари соодветно.

Целта на фабриката е да произведе бироа од трите модели така да оствари најголем приход при зададените услови. По колку бироа треба да произведе од секој модел? Колкав е вкупниот приход?

Решение. Нека бројот на произведени единици од моделот А, В и С на месечно ниво, соодветно е x, y, z .

Од условот $x : y : z = 3 : 2 : 5$, следува $x = 3k, y = 2k, z = 5k$. Од $z = 5k$ добиваме $k = \frac{1}{5}z, x = \frac{3}{5}z, y = \frac{2}{5}z$. Заради условот за најмал број произведени бироа од секој тип треба да важат следните неравенства $x \geq 300, y \geq 200, z \geq 400$. Ако во последните равенства замениме за x и y , добиваме $\frac{3}{5}z \geq 300, \frac{2}{5}z \geq 200, z \geq 400$, од каде следува $z \geq 500$.

Нека t е времето потребно за производство на единица од моделот С, тогаш $\frac{t}{2}$ е времето потребно за производство на единица од моделот В и $\frac{t}{3}$ е времето потребно за производство на единица од моделот А. Тогаш, бидејќи целата работна сила може да произведува 1400 единици од моделот С на месечно ниво, за вкупното време потрошено за производство следува дека $\frac{t}{3}x + \frac{t}{2}y + tz \leq 1400t$. Оттука, $2x + 3y + 6z \leq 8400$, односно $\frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y + 6z \leq 8400$, па затоа $z \leq 1000$.

Достапни се 17000 килограми дрво, а моделите А, В и С бараат 12, 17 и 20 килограми соодветно, т.е. $12x + 17y + 20z \leq 17000$. Ако замениме за x и y , добиваме $12 \cdot \frac{3}{5}x + 17 \cdot \frac{2}{5}y + 20z \leq 17000$, односно $z \leq 500$.

Од $z \geq 500$, $z \leq 1000$ и $z \leq 500$ следува $z = 500$, па треба да провериме дали за ова производство ќе има доволно железо. Имаме 6000 kg железо, а за моделите А, В и С треба по 2, 2 и 4 kg соодветно, т.е. $2x + 2y + 4z \leq 6000$, од каде добиваме $2 \cdot \frac{3}{5}z + 2 \cdot \frac{2}{5}z + 4z \leq 6000$, т.е. $z \leq 1000$

Конечно, $z = 500$, па затоа $x = \frac{3}{5} \cdot 500 = 300$, $y = \frac{2}{5} \cdot 500 = 200$ и вкупниот приход ќе биде $1400 \cdot 300 + 2100 \cdot 200 + 2000 \cdot 500 = 1840000$.

2. Определи ги сите природни броеви n и сите прости броеви p, q такви што $p < q$ и $n^2 - pq^2 = 2025$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$pq^2 = (n - 45)(n + 45).$$

Бидејќи $n - 45 > n + 45$ и $q > p$, каде p, q се прости броеви, можни се следниве случаи:

- $n - 45 = 1, n + 45 = pq^2$ и оттука $n = 46, pq^2 = 91 = 7 \cdot 13$. Јасно, последната равенка нема решение во множеството прости броеви.
- $n - 45 = q, n + 45 = pq$. Ако ги одземеме равенките наоѓаме $q(p - 1) = 90$. Прости делители на 90 се 2, 3 и 5, па затоа $q \in \{2, 3, 5\}$ и $p \in \{46, 31, 19\}$, што не е можно, бидејќи треба да е $p < q$.
- $n - 45 = p, n + 45 = q^2$. Ако ги одземеме равенките наоѓаме $q^2 - p = 90$. Од $p < q$ следува $90 = q^2 - p > p^2 - p = p(p - 1)$, од каде следува $p \leq 10$. Значи, $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ и тогаш $q^2 \in \{92, 93, 95, 97\}$, што не е можно за ниту еден прост број q .

Конечно, од претходните разгледувања следува не постојат природни броеви n и прости броеви p, q такви што $p < q$ и $n^2 - pq^2 = 2025$.

3. Нека a, b, c, d се реални броеви такви што

$$abcd = 1 \text{ и } a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Докажи дека барем два од броевите ab, ac, ad, bc, bd, cd се еднакви.

Решение. Од $abcd = 1$ следува дека броевите a, b, c, d се различни од нула. Заради $d = \frac{1}{abc}$ второто равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$\begin{aligned}
 a+b+c+d &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\
 a+b+c+\frac{1}{abc} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc, \\
 a^2bc+ab^2c+abc^2+1 &= ab+bc+ca+a^2b^2c^2, \\
 a^2b^2c^2-a^2bc-ab^2c+ab-abc^2+ac+bc-1 &= 0, \\
 a^2bc(bc-1)-ab(bc-1)-ac(bc-1)+bc-1 &= 0, \\
 (bc-1)(a^2bc-ab-ac+1) &= 0, \\
 (bc-1)(ab(ac-1)-ac-1) &= 0, \\
 (bc-1)(ac-1)(ab-1) &= 0.
 \end{aligned}$$

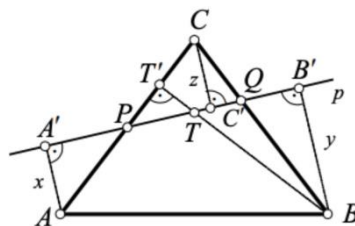
Од последното равенство следува $ab-1=0$, $ac-1=0$, $bc-1=0$. Segа,

- ако $ab=1$, тогаш од $abcd=1$ следува $cd=1$,
- ако $ac=1$, тогаш од $abcd=1$ следува $bd=1$,
- ако $bc=1$, тогаш од $abcd=1$ следува $ad=1$,

т.е. во секој случај барем два од броевите ab, ac, ad, bc, bd, cd се еднакви.

4. Низ тежиштето на рамностран триаголник минува произволна права p . Докажи дека збирот на квадратите на растојанијата од темињата на триаголникот до таа права е половина од квадратот на страната на рамностраниот триаголник.

Решение. Нека P и Q се пресечните точки на правата p со страните на триаголникот ABC , (види цртеж). Нека триаголникот има страна со должина a . Растојанијата од темињата A, B и C на триаголникот до правата p се означени со x, y и z , соодветно, а подножјата на спустените нормали од темињата кон правата p се точките A', B' и C' соодветно. Триаголникот ABC е рамностран, па висината BT' е истовремено и тежишна линија и минува низ тежиштето T , па T' е средина на страната AC . Тогаш $\triangle TPT' \sim \triangle APA'$ (имаат по еден прав агол и $\angle TPT' = \angle APA'$ како накрсни агли). Од оваа сличност следува $\frac{x}{TT'} = \frac{AP}{TP}$, т.е. $x = \frac{AP}{TP} \cdot TT'$. На потполно идентичен начин се добива дека $y = \frac{TB}{TP} \cdot PT'$ и $z = \frac{CP}{TP} \cdot TT'$. Понатаму, ако означиме $BT' = h$, тогаш $BT = \frac{2}{3}h$ и $TT' = \frac{1}{3}h$, па затоа $x = \frac{AP}{TP} \cdot \frac{1}{3}h$, $y = \frac{PT'}{TP} \cdot \frac{2}{3}h$ и $z = \frac{CP}{TP} \cdot \frac{1}{3}h$. Според тоа,



$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{1}{9}h^2 \frac{AP^2 + 4PT'^2 + CP^2}{TP^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3a^2}{4} \frac{AP^2 + 4(\frac{a}{2} - AP)^2 + (a - AP)^2}{PT'^2 + TT'^2} = \frac{a^2}{12} \frac{6AP^2 - 6aAP + 2a^2}{(\frac{a}{2} - AP)^2 + (\frac{1}{3}h)^2} \\
 &= \frac{a^2}{6} \frac{3AP^2 - 3aAP + a^2}{\frac{a^2}{4} - aAP + AP^2 + \frac{1}{9}\frac{3a^2}{4}} = \frac{a^2}{6} \frac{3AP^2 - 3aAP + a^2}{\frac{a^2}{3} - aAP + AP^2} = \frac{a^2}{6} \frac{3AP^2 - 3aAP + a^2}{\frac{1}{3}(a^2 - 3aAP + 3AP^2)} = \frac{a^2}{2},
 \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

II година

1. Реши ја неравенката $\frac{x^2-x-2}{|x+1|} < b$, каде b е реален параметар.

Решение. Јасно, $x \neq -1$. Од $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ следува дека дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{(x-2)(x+1)}{|x+1|} < b$. Разгледуваме два случаја: $x > -1$ и $x < -1$.

Ако $x > -1$, тогаш $|x+1| = x+1$, па во овој случај неравенката е еквивалентна со неравенката $x-2 < b$, т.е. $x < b+2$. Сега, ако $b+2 \leq -1$, т.е. $b \leq -3$, тогаш неравенката нема решение. Ако $b > -3$, тогаш решение на неравенката е интервалот $(-1, b+2)$.

Ако $x < -1$, тогаш $|x+1| = -(x+1)$, па во овој случај неравенката е еквивалентна со неравенката $x-2 > -b$, т.е. $x > 2-b$. Сега, ако $2-b \geq -1$, т.е. $b \leq 3$, тогаш неравенката нема решение. Ако $b > 3$, тогаш решение на неравенката е интервалот $(2-b, -1)$.

Конечно, ако $b \leq -3$ неравенката нема решение, ако $-3 < b \leq 3$ тогаш решение е интервалот $(-1, b+2)$ и ако $b > 3$ тогаш решение е $(2-b, -1) \cup (-1, b+2)$.

2. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x+12} + \frac{1}{x+14} = 0.$$

Решение. Јасно, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-14, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0\}$. Воведуваме смена $y = x+7$ и ја добиваме равенката

$$\frac{1}{y-7} + \frac{1}{y-5} - \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+3} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{y+7} = 0,$$

која е еквивалентна со неравенката

$$\frac{2y}{y^2-49} + \frac{2y}{y^2-25} - \frac{2y}{y^2-9} - \frac{2y}{y^2-1} = 0.$$

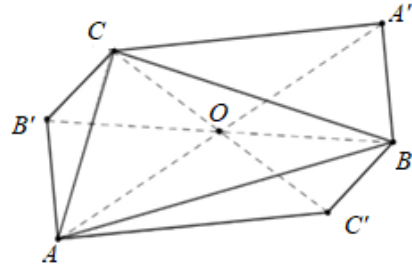
Од последната равенка следува $y = 0$ или $\frac{1}{y^2-49} + \frac{1}{y^2-25} - \frac{1}{y^2-9} - \frac{1}{y^2-1} = 0$. Втората

равенка е еквивалентна со $\frac{1}{y^2-49} - \frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{y^2-9} - \frac{1}{y^2-25}$, од каде по сведувањето на заеднички содржател и средувањето на добиената равенка ја добиваме еквивалентната биквадратна равенка $y^4 - 38y^2 + 181 = 0$. Според тоа, $y^2 = 19 \pm 6\sqrt{5}$, од каде добиваме $y = \pm\sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$.

Значи, решенија на почетната равенка се $x = -7$, $x = -7 \pm \sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$.

3. Даден е триаголник ABC . Нека O е произволна точка од внатрешноста на триаголникот и нека точките A', B', C' се симетрични на точките A, B, C во однос на точката O , соодветно. Докажи дека вака конструираниите шестаголници $AC'BA'SB'$ имаат константна плоштина која не зависи од изборот на точката O .

Решение. Од централната симетрија следува $\triangle AC'O \cong \triangle A'CO$, $\triangle C'BO \cong \triangle CB'O$ и $\triangle BA'O \cong \triangle B'AO$. Понатаму, триаголниците $AC'O$ и AOC , триаголниците $CB'O$ и COB , како и триаголниците $BA'O$ и BOA имаат по една еднаква страна и еднакви висини кон тие страни, па затоа имаат еднакви плоштини.



Оттука за плоштината на шестаголникот $AC'BA'SB'$ добиваме

$$\begin{aligned} P &= P_{AC'O} + P_{C'BO} + P_{BA'O} + P_{A'CO} + P_{CB'O} + P_{B'AO} \\ &= P_{AC'O} + P_{CB'O} + P_{BA'O} + P_{AC'O} + P_{CB'O} + P_{BA'O} \\ &= 2(P_{AC'O} + P_{CB'O} + P_{BA'O}) = 2(P_{AOC} + P_{COB} + P_{BOA}) \\ &= 2P_{ABC}. \end{aligned}$$

Значи, плоштината на добиениот шестаголник е двапати поголема од плоштината на триаголникот ABC , т.е. таа не зависи од изборот на точката O .

4. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab), \\ b(c^2 + a) = a(a + bc), \\ c(a^2 + b) = b(b + ca). \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Ако $a = 0$, тогаш од првата равенка следува $c^2 = 0$, т.е. $c = 0$. Сега, од третата равенка следува $b^2 = 0$, т.е. $b = 0$. Значи, $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ е едно решение на системот. До истиот заклучок доаѓаме и ако претпоставиме $b = 0$, односно $c = 0$.

Сега, нека $abc \neq 0$. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} ab(b - c) = c(c - a), \\ bc(c - a) = a(a - b), \\ ca(a - b) = b(b - c). \end{cases} \quad (2)$$

Ги множиме равенките од системот (2) и ја добиваме равенката

$$(abc)^2(a - b)(b - c)(c - a) = abc(a - b)(b - c)(c - a),$$

па како $abc \neq 0$, добиваме

$$(abc - 1)(a - b)(b - c)(c - a) = 0.$$

Ако $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, тогаш $a = b$ или $b = c$ или $c = a$. Ако $a = b$, тогаш од втората равенка во (2) следува $b = c$, па затоа $a = b = c$. Аналогно се добива дека $a = b = c$ и ако $b = c$ или пак $c = a$. Оттука добиваме дека $(a, b, c) = (x, x, x)$, $x \neq 0$ е решение на системот.

Ако $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, тогаш броевите a, b, c се по парови различни и важи $abc = 1$. Сега, од системот (2) го добиваме системот

$$\begin{cases} b-c = c^2(c-a), \\ c-a = a^2(a-b), \\ a-b = b^2(b-c). \end{cases} \quad (3)$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a > b > c$. Тогаш $c-a = a^2(a-b) > 0$, од каде следува $c > a$, што е противречност.

Конечно, сите решенија на системот се $(a, b, c) = (x, x, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

III година

1. Нека $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{\cos \pi x}$. Определи ги сите природни броеви n за кои важи $\left| \sum_{k=1}^n \lg f(k) \right| = 1$.

Решение. Ако земеме предвид дека за x непарен природен број важи $\cos \pi x = -1$, а за x парен природен број важи $\cos \pi x = 1$, и дека

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

добиваме

$$\log f(x) = \log(x+1) + \log(x+2), \text{ ако } x \text{ парен,}$$

$$\log f(x) = -\log(x+1) - \log(x+2), \text{ ако } x \text{ непарен.}$$

Од претходно изнесеното следува дека:

- ако n парен, тогаш

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lg f(k) &= -\lg 2 - \lg 3 + \lg 3 + \lg 4 - \dots - \lg n - \lg(n+1) + \lg(n+1) + \lg(n+2) \\ &= \lg(n+2) - \lg 2 = \lg \frac{n+2}{2}, . \end{aligned}$$

$$\text{Значи, } \lg \frac{n+2}{2} = \pm 1 \Leftrightarrow 10^{\pm 1} = \frac{n+2}{2} \Rightarrow n = 18.$$

- ако n непарен, тогаш

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lg f(k) &= -\lg 2 - \lg 3 + \lg 3 + \lg 4 - \dots + \lg n + \lg(n+1) - \lg(n+1) - \lg(n+2) \\ &= -\lg(n+2) - \lg 2 = -\lg 2(n+2). \end{aligned}$$

Значи, $-\lg 2(n+2) = \pm 1 \Rightarrow 10 = 2(n+4) \Rightarrow n = 3$.

Конечно, $n = 3$ и $n = 18$ се бараните броеви.

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^y = xy + 2$.

Решение. Ако $y = 0$, тогаш $x^0 = 1 < x \cdot 0 + 2$, па затоа во овој случај задачата нема решение.

Ако $y < 0$, тогаш x^y е цел број само за $x \in \{-1, 1\}$. За $x = 1$, добиваме $1 = y + 2$, т.е. $y = -1$, па $x = 1, y = -1$ е едно решение на равенката. За $x = -1$, добиваме $(-1)^y = -y + 2$. Последната равенка нема решение бидејќи

$$(-1)^y = \pm 1 < 2 \text{ и } -y + 2 > 2.$$

Ако $y > 0$, тогаш $x(x^{y-1} - y) = 2$, т.е. $x \mid 2$, па затоа $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

- Ако $x = -2$, тогаш $(-2)^{y-1} = -y + 1$. Последната равенка нема решение. Навистина, $y = 1$ не е решение. Ако $y > 1$, тогаш десната страна на последната равенка е негативен број, па затоа y треба да е парен број. Но, тогаш левата страна е парен, а десната е непарен број, што е противречност.
- Ако $x = -1$, тогаш $(-1)^y = -y + 2$. Ако $y = 2k$, тогаш $1 = -2k + 2$, што не е можно. Ако $y = 2k + 1$, тогаш $-1 = -(2k + 1) + 2$, т.е. $k = 1$. Значи, во случај $x = -1, y = 3$ е решение на дадената равенка.
- Ако $x = 1$, тогаш $1 = y + 2$, т.е. $y = -1$, што противречи на $y > 0$.
- Ако $x = 2$, тогаш $2^{y-1} = y + 1$. Со непосредна проверка добиваме дека $y = 1$ и $y = 2$ не се решенија на последната равенка, а $y = 3$ е нејзино решение. Нека $y > 3$. Тогаш левата страна на $2^{y-1} = y + 1$ е делива со 2, па затоа мора да е и десната страна делива со 2, т.е. $y = 2k + 1$, за некој природен број $k > 1$. Со замена во равенката по средувањето добиваме $2^{2k-1} = k + 1$, па затоа $k > 1$ е непарен број, т.е. $k = 2a + 1$, каде a е природен број. Според тоа, $2^{4a+1} = 2a + 2$, од каде добиваме $16^a = a + 1$. Последното равенство не важи за $a = 1$, а ако $a > 1$, тогаш

$$a = 16^a - 1 = (16 - 1)(16^{a-1} + 16^{a-2} + \dots + 16^1 + 1) > 15a,$$

што е противречност.

Конечно, решенија на дадената равенка се: $x = -1, y = 3$; $x = 1, y = -1$ и $x = 2, y = 3$.

3. Нека $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Докажи дека $\sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 b + \cos^6 b = 1$ ако и само ако $a = b$.

Решение. Нека $a = b$. Тогаш

$$\begin{aligned}\sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 b + \cos^6 b &= \sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 a + \cos^6 a \\&= (\sin^2 a)^3 + (\cos^2 a)^3 + 3\sin^2 a \cos^2 a \\&= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a) + 3\sin^2 a \cos^2 a \\&= \sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a + 3\sin^2 a \cos^2 a \\&= \sin^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a \\&= (\sin^2 a + \cos^2 a) = 1.\end{aligned}$$

Нека $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Да означиме $x = \sin^2 a$, $y = \cos^2 b$, $z = -1$. Тогаш даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= 0, \\(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) &= 0, \\(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) &= 0, \\(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) &= 0.\end{aligned}$$

Но, $x - z \geq 0 - (-1) = 1$, $y - z \geq 0 - (-1) = 1$, па затоа $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 2$ и од последното равенство следува $x + y + z = 0$, односно

$$\begin{aligned}\sin^2 a + \cos^2 b &= 1, \\\frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 + \cos 2b}{2} &= 1, \\\cos 2a - \cos 2b &= 0, \\-2 \sin \frac{2a + 2b}{2} \sin \frac{2a - 2b}{2} &= 0 \\\sin(a - b) \sin(a + b) &= 0.\end{aligned}$$

Конечно, бидејќи $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$, од последното равенство следува $a = b$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со најдолга страна AB . Точките M и N лежат на страните AB и BC соодветно, така што секоја од отсечките AN и CM го дели четириаголникот $ABCD$ на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека MN ја преполовува дијагоналата BD .

Решение. Бидејќи $P_{MADC} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = P_{NADC}$, следува дека $P_{AMC} = P_{ANC}$. Триголниците AMC и ANC имаат заедничка страна AC , па висините спуштени од M и N кон AC се еднакви. Оттука $MN \parallel AC$. Нека m е права паралелна со AC , која минува низ точката D . Да ја означиме пресечната точка на правата m и полуправата BA со P , а пресечната точка на m и полуправата BC со Q . Да

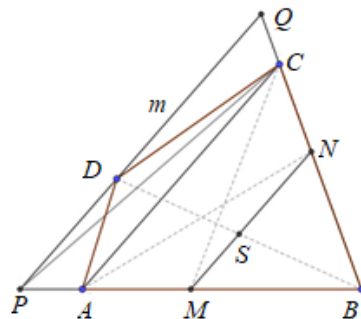
забележиме дека и триаголниците CAP и CAD имаат заедничка страна AC и заради $m \parallel AC$ тие имаат еднакви висини повлечени кон AC . Значи нивните плоштини се еднакви. Тогаш

$$\begin{aligned} P_{MPC} &= P_{MAC} + P_{CAP} = P_{MAC} + P_{CAD} \\ &= P_{MADC} = P_{BMC}. \end{aligned}$$

Оттука и заради тоа што триаголниците MPC и BMC имаат еднакви висини од темето C кон страните MP и BM , соодветно, следува дека $\overline{BM} = \overline{MP}$. Нека со S ја означиме пресечната точка на MN и BD . Тогаш, од теоремата за пропорционални отсечки следува

$$\overline{BS} : \overline{BD} = \overline{BM} : \overline{BP} = 1 : 2,$$

односно MN ја преполовува дијагоналата BD .



IV година

1. Нека a, b, c, d се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2.$$

Решение. Од неравенството меѓу геометриската и хармониската средина следува

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \cdot 1 \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{b+c+d}} + 1} = \frac{2}{\frac{b+c+d}{a} + 1} = \frac{2}{\frac{a+b+c+d}{a}} = \frac{2a}{a+b+c+d}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d}, \quad \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}, \quad \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}.$$

Ако ги собереме последните четири неравенства го добиваме бараното неравенство.

2. Нека за реалната функција f важи

$$f(x^2 + 3x + 7) + 2f(x^2 - 5x + 11) = 3x^2 - 7x + 13 \quad (1)$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Пресметај $f(2025)$.

Решение. Ако во дадената функционална равенка x го замениме со $1-x$, добиваме

$$f(x^2 - 5x + 11) + 2f(x^2 + 3x + 7) = 3x^2 + x + 9. \quad (2)$$

Сега, равенката (2) ја множиме со 2 и од добиената равенка ја одземаме равенката (1) и по средувањето добиваме

$$f(x^2 + 3x + 7) = x^2 + 3x + \frac{5}{3}.$$

Во последната равенка ставаме $x^2 + 3x + 7 = t$ и добиваме $f(t) = t - \frac{16}{3}$. Конечно,
 $f(2025) = 2025 - \frac{16}{3}$.

3. Нека A, B, C и D се четири последователни темиња на правилен конвексен многуаголник. Одреди го бројот на страни на многуаголникот, ако важи

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Решение. Нека R е центарот на опишаната кружница околу многуаголникот и нека 2α е централниот агол на многуаголникот. Тогаш

$$\overline{AB} = 2R \sin \alpha, \overline{AC} = 2R \sin \alpha, \overline{AD} = 2R \sin 3\alpha.$$

Со замена во (1), по средувањето добиваме $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$. Понатаму,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\sin 3\alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha - \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} \end{aligned}$$

т.е. $\sin 3\alpha - \sin 4\alpha = 0$. Но, $\sin 4\alpha = \sin(\pi - 4\alpha)$ и $\alpha < \frac{\pi}{4}$ (многуаголникот има повеќе од четири страни), добиваме $3\alpha = \pi - 4\alpha$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{7}$. Значи, централниот агол на многуаголникот е $2\alpha = \frac{2\pi}{7}$, т.е. тоа е седумаголник.

4. Нека $\{a_n\}$ е низа реални броеви зададена со

$$a_1 = 1, a_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1, n \geq 2.$$

Опреди го најмалиот реален број S за кој важи

$$\sum_{n=1}^i \frac{1}{a_n} < S, \text{ за секој } i \in \mathbb{N}.$$

Решение. Равенството $a_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1$ го делиме со $a_1 a_2 \dots a_n$ и добиваме $\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$, т.е. $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$. Ако во последното равенство последователно ставиме $n = 2, 3, \dots, i$ и ги собереме добиените равенства, наоѓаме

$$\sum_{n=2}^i \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i}, \text{ од каде следува}$$

$$\sum_{n=1}^i \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} = 2 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i},$$

па добиваме $\sum_{n=1}^i \frac{1}{a_n} < 2$, за секој $i \in \mathbb{N}$.

Ќе докажеме дека $S = 2$.

Од дефиницијата следува дека дадената низа е позитивна, па затоа $a_k \geq 1$ за секој $k \in \mathbb{N}$. Според тоа,

$$a_n = a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1} + 1 \geq a_{n-1} + 1, \text{ за секој } n \geq 2.$$

Сега, од $a_1 = 1$ и последното неравенство со математичка индукција лесно се докажува дека $a_n \geq n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Според тоа,

$$0 < \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} \leq \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{i}, \text{ за секој } i \in \mathbb{N},$$

односно

$$\sum_{n=1}^i \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} \geq 2 - \frac{1}{i}, \text{ за секој } i \in \mathbb{N}.$$

Нека m е произволен позитивен број помал од 2. Нека $i \in \mathbb{N}$ е избран таков што

$$i > \frac{1}{2-m}. \text{ Тогаш } \sum_{n=1}^i \frac{1}{a_n} \geq 2 - \frac{1}{i} > m, \text{ од што следува } S = 2.$$