Восемнадцатый Турнир, 1996-1997

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1996 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Можно ли найти 10 таких последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов равна сумме квадратов следующих за ними 9 последовательных натуральных чисел?
Задача с картинки из старого учебника

Задача 2.(3)
При каких целых значениях n правильный треугольник со стороной n можно замостить плитками, имеющими форму равнобочной трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2?
Н. Васильев

Задача 3.(2+2)
а)(2) Может ли случиться, что в компании из 10 девочек и 9 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики - с одним и тем же числом девочек?
б)(2) А если девочек 11, а мальчиков 10?
Н. Васильев

Задача 4.(4)
Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета.
Докажите, что сумма (длин - *добавлено редактором*) красных отрезков равна сумме (длин) синих.
В. Произволов

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 20 октября 1996 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре чёрных точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?
Н. Васильев

Задача 2.(2+2)
Существуют ли три различных простых числа p, q, r таких, что p^2+d делится на qr, q^2+d делится на rp, r^2+d делится на pq, если
а)(2) d=10,
б)(2) d=11?
В. Сендеров

Задача 3.(5)
Докажите неравенство:

$$\frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{14}{4!} + \frac{23}{5!} + \ldots + \frac{k^2-2}{k!} + \ldots + \frac{9998}{100!} < 3$$

В. Сендеров

Задача 4.(2+4)
а)(2) Квадрат разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 3 и 4 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.
б)(4) Прямоугольник разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.
А. Шаповалов

Задача 5.(8)
Существует ли 6-значное число A такое, что среди чисел A, 2A, ..., 500000A нет ни одного числа, оканчивающегося шестью одинаковыми цифрами?
С. Токарев

Задача 6.(5+5)
Карточка матлото представляет собой таблицу 6*6 клеточек. Играющий отмечает 6 клеточек и отправляет карточку в конверте. После этого в газете публикуется шестёрка проигрышных клеточек. Докажите, что
а)(5) можно заполнить 9 карточек так, чтобы среди них обязательно нашлась "выигрышная" карточка - такая, в которой не отмечена ни одна проигрышная клеточка;
б)(5) восьми карточек для этого недостаточно.
С. Токарев

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1996 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3) Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри куба и равноудаленных от трёх скрещивающихся ребер a, b, c этого куба.
В. Произволов

Задача 2.(3)
Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? (Разрешается сделать конечное число разрезов по прямым линиям и дугам окружностей.)
А. Канель-Белов

Задача 3.(4)
На координатной плоскости x0y построена парабола $y=x^2$. Затем начало координат и оси стёрли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки (используя имеющуюся параболу)?
А. Егоров

Задача 4.(4)
При каком n>1 может случиться так, что в компании из n+1 девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики - с одним и тем же числом девочек?
Н. Васильев

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 20 октября 1996 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Можно ли покрасить 4 вершины куба в красный цвет и 4 другие - в синий так, чтобы плоскость, проходящая через любые три точки одного цвета, содержала точку другого цвета?
А. Мёбиус, И. Шарыгин

Задача 2.(3)
а)(3) Докажите для всех $n>2$ неравенство:

$$3-\frac{2}{(n-1)!}<\frac{2^2-2}{2!}+\frac{3^2-3}{3!}+\ldots+\frac{n^2-2}{n!}<3$$

б)(3) Найдите какие-нибудь натуральные числа a, b, c такие, что для всех $n>2$

$$b-\frac{c}{(n-2)!}<\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\ldots+\frac{n^3-a}{n!}<b$$

В. Сендеров, Н. Васильев

Задача 3.(5)
Пусть A', B', C', D', E', F' - середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника ABCDEF. Известны площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'. Найдите площадь шестиугольника ABCDEF.
А. Лопшиц, Н. Васильев

Задача 4.(10)
Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y=f(x)$, что $f(f(x))=x^2-1996$ при всех x.
С. Богатый, М. Смуров

Задача 5.(4+6)
а)(4) Четыре порта 1, 2, 3, 4 расположены (в этом порядке) на окружности круглого острова. Их связывает плоская сеть дорог, на которых могут быть перекрёстки, то есть точки, где пересекаются, сходятся или разветвляются дороги. На всех участках дорог введено одностороннее движение так, что, выехав от любого порта или перекрёстка, нельзя вернуться в него снова.
Пусть f_{ij} означает число различных путей, идущих из порта i в порт j.
Докажите неравенство: $f_{14}f_{23}\geq f_{13}f_{24}$.
б)(6) Докажите, что если портов шесть: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (по кругу в этом порядке), то
$f_{16}f_{25}f_{34}+ f_{15}f_{24}f_{36}+ f_{14}f_{26}f_{35} \geq f_{16}f_{24}f_{35}+ f_{15}f_{26}f_{34}+ f_{14}f_{25}f_{36}$
С. Фомин

Задача 6.(5+5)
Карточка матлото представляет собой таблицу 10*10 клеточек. Играющий отмечает 10 клеточек и отправляет карточку в конверте. После этого в газете публикуется десятка проигрышных клеточек. Докажите, что
а)(5) можно заполнить 13 карточек так, чтобы среди них обязательно нашлась "выигрышная" карточка - такая, в которой не отмечена ни одна проигрышная клеточка;
б)(5) двенадцати карточек для этого недостаточно.
С. Токарев

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1997 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Сколько целых чисел от 1 до 1997 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?
А. Галочкин

Задача 2.(3)
Барон Мюнхаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярда, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могут ли слова барона быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону "угол падения равен углу отражения".)
М. Евдокимов

Задача 3.(4)
F - выпуклая фигура с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Через точку M, лежащую внутри фигуры и отстоящую от осей на расстояния a и b, провели прямые, параллельные осям. Эти прямые делят F на четыре области.
Найдите разность между суммой площадей большей и меньшей из областей и суммой площадей двух других.
Г. Гальперин, Н. Васильев

Задача 4.(4)
Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1).
Найдите площадь исходного квадрата.
В. Произволов

Задача 5.(4)
В параллелограмме ABCD точка E - середина AD. Точка F - основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CE.
Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.
М. А. Волчкевич

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 2 марта 1997 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
В треугольнике одна сторона в три раза меньше суммы двух других.
Докажите, что против этой стороны лежит наименьший угол треугольника.
А. Толпыго

Задача 2.(5)
Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?
В. Л. Дольников

Задача 3.(5)
2n шахматистов дважды сыграли полный шахматный турнир, где каждый сыграл с каждым (за выигрыш даётся 1 очко, за проигрыш - 0, за ничью - 1/2 очка). Оказалось, что во втором турнире сумма очков каждого игрока изменилась не меньше, чем на n.
Докажите, что она изменилась ровно на n.
Б. Френкин

Задача 4.(6)
В выпуклом шестиугольнике AC'BA'CB': AB'=AC', BC'=BA', CA'=CB', и $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'$.
Докажите, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.
В. Произволов

Задача 5.(4+4)
Докажите, что число
а)(4) 97^{97},
б)(4) 1997^{17}
нельзя представить в виде суммы кубов нескольких идущих подряд натуральных чисел.
А. А. Егоров

Задача 6.(7)
P - внутренняя точка равнобедренного треугольника ABC (AB=BC). $\angle ABC=80^o$, $\angle PAC=40^o$, $\angle ACP=30^o$.
Найдите $\angle BPC$.
Г. Гальперин

Задача 7.(5+4)
Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4,... , 512 (последовательные степени двойки) - по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов.
а)(5) Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями более чем 89 способами.
б)(4) Приведите пример груза, который можно взвесить ровно 89 способами.
А. Шаповалов, А. Кулаков

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1997 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1).
Найдите объём исходного куба.
В. Произволов

Задача 2.(3)
a и b - натуральные числа. Известно, что a^2+b^2 делится на ab.
Докажите, что a=b.
Б. Френкин

Задача 3.(4)
Центр круга - точка с декартовыми координатами (a,b). Известно, что начало координат лежит внутри круга. Обозначим через S^+ общую площадь тех частей круга, в которых координаты точек имеют одинаковый знак; через S^- - противоположный знак.
Найдите величину S^+-S^-.
Г. Гальперин

Задача 4.(4)
Около правильного тетраэдра ABCD описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды ABCD', ABDC', ACDB', BCDA', вершины которых лежат на этой сфере.
Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'.
А. Заславский

Задача 5.(4)
Играют двое, ходят по очереди. Первый ставит на плоскости красную точку, второй в ответ ставит на свободные места 10 синих точек. Затем опять первый ставит на свободное место красную точку, второй ставит на свободные места 10 синих, и т. д. Первый считается выигравшим, если какие-то три красные точки образуют правильный треугольник.
Может ли второй ему помешать?
А. Я. Канель-Белов

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 2 марта 1997 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?
В. Л. Дольников

Задача 2.(5)
В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Известно, что DE - биссектриса угла ADC. Найдите величину угла $\angle A$.
С. И. Токарев

Задача 3.(3+3)
Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес - на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора, если:
а)(3) веса гирь набора все целые,
б)(3) веса не обязательно целые?
М. Разин

Задача 4.(6+2)
Контуры выпуклых многоугольников F и G не имеют общих точек, причём G расположен внутри F. Хорду многоугольника F - отрезок, соединяющий две точки контура F, назовём опорной для G, если она пересекается с G только по точкам контура: содержит либо только вершину, либо сторону G.
а)(6) Докажите, что найдётся опорная хорда, середина которой принадлежит контуру G.
б)(2)Докажите, что найдутся две такие хорды.
П. Пушкарь, Дольников

Задача 5.(8)
Положительные числа a, b, c таковы, что abc=1.
Докажите неравенство:
$1/(1+a+b) + 1/(1+b+c) + 1/(1+c+a) \le 1$.
Г. Гальперин

Задача 6.(8)
Пусть $1+x+x^2+...+x^{n-1}=F(x)G(x)$, где F и G - многочлены, коэффициенты которых - нули и единицы ($n>1$).
Докажите, что один из многочленов F, G представим в виде $(1+x+x^2+...+x^{k-1})T(x)$, где T(x) - также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k>1$).
В. Сендеров, М. Вялый

Задача 7.(8)
На плоскости дано конечное число полосок, суммарная ширина которых равна 100, и круг радиуса 1. Докажите, что каждую из полосок можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг. (Полоска - часть плоскости, заключённая между двумя параллельными прямыми. - *примечание редактора*)
М. Смуров