Десятый Турнир, 1988-1989

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1988 г.
7-8 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей.
Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?
Фольклор

Задача 2.(3)
В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены.
Найдите углы треугольника.
Фольклор

Задача 3.(3)
Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.
Фольклор

Задача 4.(3)
Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета.
Докажите, что в каждый цвет покрашено по 8 квадратиков.
Фольклор

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 октября 1988 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В каждой вершине куба стоит число +1 или -1. В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной 0?
Г. Гальперин

Задача 2.(3)
Внутри квадрата ABCD взята точка M такая, что
$\angle MAC=\angle MCD=u$.
Найти величину угла ABM.
Фольклор

Задача 3.(3)
Числа 1, 2, 3, ..., N записываются в некотором порядке:
$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$. Берётся сумма
$S=a_1/1 + a_2/2 + a_3/3 + a_N/N$.
Найдите такое N, чтобы среди таких сумм (при всевозможных перестановках
$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$) встретились все целые числа от N до N+100.
Фольклор

Задача 4.(3+3)
а)(3) Даны две одинаковые шестерёнки с 14 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили.
Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать).
б)(3) Тот же вопрос про две шестерёнки с 13 зубьями, из которых выпилили по 4 зуба.
Фольклор

Задача 5.(2+2+3)
Выпуклый N-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (перестройку): взяв пару треугольников ABD и BCD с общей стороной, заменить их на треугольники ABC и ACD. Пусть P(N) - наименьшее число перестроек, за которое можно перевести любое разбиение в любое.
Докажите, что
а)(2) $P(N) \geq N-3$;
б)(2) $P(N) \leq 2N-7$;
в)(3) $P(N) \leq 2N-10$ при $N \geq 13$.
Д. Фомин, по мотивам W. Thurson, D. Sleator, R. Tarjan

Задача 6.(8)
Существует ли такое натуральное число M, что никакое натуральное число, десятичная запись которого состоит лишь из нулей и не более, чем 1988 единиц, не делится на M?
Фольклор

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1988 г.
9-10 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?
Фольклор

Задача 2.(3)
Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC.
Доказать, что треугольники ABH, ACH и BCH имеют одинаковый радиус описанной окружности.
Фольклор

Задача 3.(3)
Доказать, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стоят числа не взаимно-простые (имеющие общий делитель), а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, взаимно-простые.
Примечание: простых чисел бесконечно много.
Фольклор

Задача 4.(3)
Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами.
Каково минимальное число хороших пар?
Фольклор

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 октября 1988 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы
1) среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину),
2) добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало пункт 1?
Укажите какую-нибудь систему таких клеток и докажите, что меньшим количеством обойтись нельзя.
А. Анджанс

Задача 2.(3)

Докажите, что $a^2pq+b^2qr+c^2rp\leq 0$, если a, b, c - стороны треугольника; а p, q, r - любые числа, удовлетворяющие условию $p+q+r=0$.
Я. Мустафаев, ученик 10 класса г. Баку

Задача 3.(4)
Числа 1, 2, 3, ..., N записываются в строчку в таком порядке, что если где-то (не на первом месте) записано число i, то где-то слева от него встретится хотя бы одно из чисел i+1 и i-1.
Сколькими способами это можно сделать?
А. Анджанс

Задача 4.(6)
В стране 1988 городов и 4000 дорог.
Докажите, что можно указать кольцевой маршрут, проходящий не более, чем через 20 городов (каждая дорога соединяет два города).
А. Разборов

Задача 5.(7)
Существует ли такое натуральное число M, что никакое натуральное число, десятичная запись которого состоит лишь из нулей и не более, чем 1988 единиц, не делится на M?

Задача 6.(7)
M - внутренняя точка прямоугольника ABCD, S - его площадь.
Докажите, что $S \leq AM*CM + BM*DM$.
И. Я. Гольдшейд

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1989 г.
7-8 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Положительные числа a, b, c таковы, что
$a \le b \le c$ и $a+b+c \le 1$.
Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2 \le 1$.
Ф. Назаров

Задача 2.
В треугольнике ABC проведена медиана AM. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, быть ровно в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM?
Д. Фомин

Задача 3.
Какую цифру надо поставить вместо знака "?" в числе
888...88?99...999 (восьмёрка и девятка написаны по 50 раз), чтобы оно делилось на 7?
М. Гусаров

Задача 4.(3)
Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?
С. Фомин

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 19 марта 1989 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Лестница имеет 100 ступенек. Коля хочет спуститься по лестнице, при этом он двигается начиная сверху прыжками по очереди вниз и вверх. Прыжки бывают трёх типов - на шесть ступенек (через пять на шестую), на семь и на восемь. Два раза на одну ступеньку Коля не становится. Сможет ли он спуститься?
С.Фомин

Задача 2.(3)
На некотором поле шахматной доски стоит фишка. Двое по очереди переставляют фишку, при этом на каждом ходу, начиная со второго, расстояние, на которое она перемещается, должно быть строго больше, чем на предыдущем ходу. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода.
Кто выигрывает при правильной игре?
(Фишка ставится всегда точно в центр каждого поля).
Ф. Назаров

Задача 3.(2+3)
Выпуклые четырёхугольники ABCD и PQRS вырезаны соответственно из бумаги и картона. Будем говорить, что они подходят друг к другу, если выполняются два условия:
1) картонный четырёхугольник можно наложить на бумажный так, что его вершины попадут на стороны бумажного, по одной вершине накаждую сторону;
2) если после этого перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный, то они закроют весь картонный четырёхугольник в один слой.
а)(2) Докажите, что, если четырёхугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.
б)(3) Докажите, что если ABCD - параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный четырёхугольник.
Н. Васильев

Задача 4.(5)
Докажите, что если K чётно, то числа от 1 до K-1 можно выписать в таком порядке, что сумма никаких нескольких подряд стоящих чисел не будет делиться на K.
Фольклор

Задача 5.(7)
Из центра окружности выходят N векторов, концы которых делят её на N равных дуг. Некоторые векторы синие, остальные - красные. Подсчитаем сумму углов "красный вектор - синий вектор" (каждый угол вычисляется от красного вектора к синему против часовой стрелки) и разделим её на общее число всех таких углов.
Докажите, что полученная величина "среднего угла" равна 180^o.
В. Произволов

Задача 6.(4+4)
а)(4) Докажите, что если в 3n клетках таблицы 2n*2n расставлены 3n звёздочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звёздочки будут вычеркнуты.
б)(4) Докажите, что в таблице 2n*2n можно расставить 3n+1 звёздочку так, что при вычеркивании любых n строк и любых n столбцов остаётся невычеркнутой хотя бы одна звёздочка.
К. Кохась

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1989 г.
9-10 кл., тренировочный вариант
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Положительные числа a, b, c, d таковы,
что $a \le b \le c \le d$ и $a+b+c+d \le 1$.
Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \le 1$.
Ф. Назаров

Задача 2.(3)
Известно, что в трапецию ABCD можно вписать окружность.
Докажите, что круги, построенные на её боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.
Фольклор

Задача 3.(3)
Найти шесть различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму этих двух чисел.
Д. Фомин

Задача 4.(3)
Можно ли провести в каждом квадратике на поверхности кубика Рубика диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?
С. Фомин

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 19 марта 1989 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Найти два шестизначных числа такие, что если их приписать друг к другу, то полученное двенадцатизначное число делится на произведение двух исходных чисел. Найти все такие пары чисел.
М. Гусаров

Задача 2.(4)
Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что
$\angle BMC=90^o+\angle BAC/2$, и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC.
Докажите, что M - центр вписанной окружности треугольника ABC.
Фольклор

Задача 3.(5)
Даны 1000 линейных функций:
$f_k(x)=p_kx+q_k$ (k=1, 2, ..., 1000). Нужно найти значение их композиции
$f(x)=f_1(f_2(f_3(\dots f_{1000}(x)\dots)))$ в точке x_0.
Докажите, что это можно сделать не более, чем за 30 стадий, если на каждой стадии можно параллельно выполнять любое число арифметических операций над парами чисел, полученных на предыдущих стадиях, а на первой стадии используются числа $p_1, p_2, \dots, p_{1000}, q_1, q_2, \dots, q_{1000}, x_0$.
С. Фомин

Задача 4.(6)
В кооперативе из 11 человек имеется партячейка. На каждом собрании ячейки происходит либо приём одного члена в партию, либо исключение из партии одного человека. В партячейке не может быть меньше трёх человек. Возвращаться к какому-либо из прежних составов партячейки запрещено уставом. Может ли к какому-то моменту оказаться, что все варианты состава ячейки реализованы?
С. Фомин

Задача 5.(7)
На плоскости дано N прямых (N > 1), никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.
Докажите, что в частях, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно расставить ненулевые целые числа, по модулю не превосходящие N так, что суммы чисел по любую сторону от любой из данных прямых равны нулю.
Д. Фомин

Задача 6.(7)
Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превышающими 100.
Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C, которые можно поместить друг в друга (так что $A \subset B \subset C$).
Н. Седракян

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 19 марта 1989 г.
Первый вариант (для москвичей)
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.
Лестница имеет 100 ступенек. Коля хочет спуститься по лестнице, при этом он двигается начиная сверху прыжками вниз и вверх по очереди. Прыжки бывают трех типов - на шесть ступенек (через пять на шестую), на семь и на восемь. Два раза на одну ступеньку Коля не становится. Сможет ли он спуститься?
С. Фомин

Задача 2.
Из бумаги вырезан выпуклый четырёхугольник ABCD, а из картона - выпуклый четырёхугольник PQRS. Дано, что выполняются два свойства:
1) можно наложить картонный четырехугольник на бумажный так, что его вершины попадут на стороны бумажного, по одной вершине на каждую сторону;
2) если после этого перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный, то они закроют весь картонный четырехугольник в один слой.
Докажите, что у бумажного четырехугольника либо две противоположные стороны параллельны, либо его диагонали взаимно перпендикулярны.
Н. Васильев

Задача 3.
Какую цифру вместо знака "?" надо поставить в числе 888...88?999...99 (восьмёрка и девятка написаны по 50 раз), чтобы получившееся число делилось на 7?
М. Гусаров

Задача 4.
Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?
С. Фомин