Восьмой Турнир, 1986-1987

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 ноября 1986 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Даны два двузначных числа - X и Y. Известно, что X вдвое больше Y, одна цифра числа Y равна сумме, а другая - разности цифр числа X. Найти эти числа (и доказать, что других нет).
Фольклор

Задача 2.(2+2)
Квадрат ABCD и окружность O пересекаются по восьми точкам, так что образуется четыре криволинейных треугольника: AEF, BGH, CIJ, DKL (EF, GH, IJ, KL - дуги окружности).
Докажите, что
а)(2) сумма длин дуг EF и IJ равна сумме длин дуг GH и KL;
б)(2) сумма периметров криволинейных треугольников AEF и CIJ равна сумме периметров криволинейных треугольников BGH и DKL.
В. Произволов

Задача 3.(4)
Двое играют в такую игру. Дана шоколадка с продольными и поперечными углублениями, по которым её можно ломать. Первый разламывает шоколадку по одной из линий, второй разламывает одну из частей, первый разламывает одну из трёх образовавшихся частей и т. д. Игра заканчивается в тот момент, когда в результате очередного хода возникнет долька, на которой уже нет углублений; сделавший этот ход выигрывает. На шоколадке 60 долек: имеется 5 продольных и 9 поперечных углублений. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
С. Фомин

Задача 4.(4)
Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел 1, 2, 3, ..., N. Для каждого подмножества берётся величина, обратная к произведению всех его чисел.
Найти сумму всех таких обратных величин.
А. Анджанс

Задача 5.(7)
Найти геометрическое место ортоцентров (точек пересечения высот) всевозможных треугольников, вписанных в данную окружность.
Фольклор

Задача 6.(7)
В футбольном турнире в один круг участвовало 28 команд. По окончании турнира оказалось, что более 3/4 всех игр закончилось вничью. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.
М. Вопа, ученик гимназии, Венгрия

Задача 7.(9)
Каждая клетка шахматной доски закрашена в один из цветов - синий или красный.
Докажите, что клетки одного из цветов обладают тем свойством, что их может обойти шахматный ферзь (на клетках этого цвета ферзь может побывать не один раз, на клетки другого цвета он не ставится, но может через них перепрыгивать; ферзь ходит по вертикалям, горизонталям и диагоналям на любое расстояние).
А. Толпыго

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 ноября 1986 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Дана трапеция ABCD, M - точка пересечения её диагоналей. Известно, что боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC и что в эту трапецию можно вписать окружность.
Найдите площадь треугольника DCM, если радиус этой окружности равен r.
Фольклор

Задача 2.(3)
Существует ли такое N и такие N-1 бесконечных арифметических прогрессий с разностями 2, 3, 4, ..., N, что каждое натуральное число принадлежит хотя бы одной из этих прогрессий?
Фольклор

Задача 3.(3)
Существуют ли такие 100 треугольников, ни один из которых нельзя покрыть 99-ю остальными?
Фольклор

Задача 4.(5)
Через n!! обозначается произведение n(n-2)(n-4)... до единицы (или до двойки): например, 8!!=8*6*4*2; 9!!=9*7*5*3*1.
Докажите, что 1985!! + 1986!! делится нацело на 1987.
В. Произволов

Задача 5.(5)
В футбольном турнире в один круг участвовало 28 команд. По окончании турнира оказалось, что более 3/4 всех игр закончилось вничью.
Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.
М. Вопа, ученик гимназии, Венгрия

Задача 6.(8)
Клетки шахматной доски 8*8 как-то занумерованы числами от 1 до 32, так что каждое число использовано дважды.
Докажите, что можно выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, так что на каждой вертикали и на каждой горизонтали найдётся хотя бы по одной выбранной клетке.
А. Анджанс

Задача 7.(8)
На окружности имеется 21 точка.
Докажите, что среди дуг, имеющих концами эти точки, найдётся не меньше ста таких, угловая мера которых не превышает 120^{o}.
А. Ф. Сидоренко

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Подготовительный вариант весеннего тура 1987 г.
7-8 кл.

Задача 1.(2)
Докажите, что при любом а имеет место неравенство:
$3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$.
Фольклор

Задача 2.(2)
В остроугольном треугольнике соединены основания высот. Оказалось, что в полученном треугольнике две стороны параллельны сторонам исходного треугольника.
Докажите, что третья сторона тоже параллельна одной из сторон исходного треугольника.
Фольклор

Задача 3.(3)
Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом - 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?
С. Фомин

Задача 4.(3)
Кафельная плитка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 1 дм и 2 дм. Можно ли из 20 таких плиток сложить квадрат?
С. Фомин

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Подготовительный вариант весеннего тура 1987 г.
9-10 кл.

Задача 1.(2)
Можно ли число 1986 представить в виде суммы 6 квадратов нечётных чисел?
Фольклор

Задача 2.(2)
В пространстве даны параллелограмм ABCD и плоскость M. Расстояния от точек A, B и C до плоскости M равны соответственно a, b и c. Найти расстояние d от вершины D до плоскости M.
Фольклор

Задача 3.(2)
Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом - 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?
С. Фомин

Задача 4.(3)
На шахматной доске выбрана клетка. Сумма квадратов расстояний от её центра до центров всех черных клеток обозначена через a, а до центров всех белых клеток - через b.
Докажите, что a=b.
А. Анджанс

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 15 марта 1987 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по всем решённым задачам)

Задача 1.(3)
Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки - пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?
Ф. Назаров, перефразировка с Ленинградской олимпиады 1987 г.

Задача 2.(2+2)
Рассматривается выпуклый восьмиугольник. С помощью диагонали от него можно отрезать четырёхугольник, причём это можно сделать восемью (восьмью) способами. Может ли случиться, что среди этих восьми четырехугольников имеется
а)(2) четыре,
б)(2) пять таких,
в которые можно вписать окружность?
П. Седракян

Задача 3.(2+3)
В левый нижний угол шахматной доски 8*8 поставлено в форме квадрата 3*3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, т. е. симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали).
Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3*3, но в другом углу:
а)(2) левом верхнем,
б)(3) правом верхнем?
Я. Брискин

Задача 4.(5)
В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60^{o} .
Докажите, что биссектриса одного из углов, образованных высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности.
В. Погребняк, ученик 10 класса, г. Винница

Задача 5.(5)
Имеется много кубиков одинакового размера, раскрашенных в шесть цветов. При этом каждый кубик раскрашен во все шесть цветов, каждая грань - в какой-нибудь один свой цвет, но расположение цветов на разных кубиках может быть различным. Кубики выложены на стол, так что получился прямоугольник. Разрешается взять любой столбец этого прямоугольника, повернуть его вокруг длинной оси и положить на место. То же самое разрешается делать и со строками. Всегда ли можно с помощью таких операций добиться того, что все кубики будут смотреть вверх гранями одного и того же цвета?
Д. Фомин

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 15 марта 1987 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по всем решённым задачам)

Задача 1.(3)
p(x) - многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых a и b выполняется равенство: p(a)-p(b)=1
Докажите, что a и b различаются на 1.
Фольклор

Задача 2.(3)
Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами.
Докажите, что их радиус не меньше 1/2.
Фольклор

Задача 3.(5)
В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене).
Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.
Примечание: предполагается, что при любых обменах, парных и сложных, каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются.
А. Шнирельман, Н. Константинов

Задача 4.(5)
Докажите, что для любого n справедливо неравенство: $(2*(3*...*(N-1)^{1/2}*N^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2} < 3$
В. Произволов

Задача 5.(6)
Дан равносторонний треугольник ABC. Из его внутренней точки M опущены перпендикуляры на стороны; их основания - точки D, E и F.
Найти геометрическое место таких точек M, что треугольник DEF прямоугольный.
Фольклор

Задача 6.(6)
Двое играют на шахматной доске 8*8. Начинающий игру делает первый ход - ставит на доску коня. Затем они по очереди его передвигают, при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре - начинающий или его партнёр?
(Коня передвигают по обычным правилам, т. е. "буквой Г").
В. Зудилин, ученик 10 класса г. Бельцы