



ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ
ВАЛЕНТИНА ГОГОВСКА

ЗАДАЦИ
У ВЕЗИ СА БРОЈЕМ
2024

ВАЉЕВО, 2024.

ПРЕДГОВОР

Пред вама су задаци и решења задатака везаних за број 2024, а симболично их има 366, јер је 2024. година преступна и има 366 дана.

Задаци представљају мали овогодишњи поклон учесницима Школе за младе математичаре „Диофант“ (Србија, Република Српска, Црна Гора) и Школе за млади математичари (Македонија).

Циљ ових задатака је мала математичка рекреација ученика, али и добар тренинг и загревање за математичка такмичења. Задаци су класични, али има и прилично задатака који су мање познати. Погледајте и покушајте да решите све што можете.

Задаци који се односе на број 2024 намењени су ученицима 4, 5, 6, 7. и 8. разреда, (Србија), односно 5, 6, 7, 8. и 9. разред (Македонија, Република Српска, Црна Гора).

Задаци нису стриктно подељени по разредима, али су поређани од задатака примерених ученицима млађих разреда, ка ученицима старијих разреда. Оријентационо за сваки разред има око 75 задатака и Диофантове табле са задацима и сликама их приближно одвајају по разредима. Мислимо да је корисно да ученици свих разреда обавезно реше задатке за свој разред. Корисно ће бити ако реше и задатке за све претходне разреде и ако су у могућности и неке задатке предвиђене за следећи разред.

Селекцију и избор задатака, ако и дата решења задатака реализовали су Валентина Гоговска и Војислав Андрић.

Захваљујемо се колегиницама Јованки Свркота, Верици Марковић, Љубици Киселички, Иванки Томић, Сандри Андрић и Ивани Пецикоза које су својим корисним примедбама и предлозима допринеле да избор задатака буде функционалнији, формулације задатака прецизнија, а решења задатака коректна и јасна.

Свим читаоцима и корисницима збирке бићемо захвални, ако нам путем е-mail адресе diofant2020mmm@gmail.com доставе примедбе, предлоге и евентуалне уочене грешке, јер припремамо јединствену збирку (са задацима за 2025. годину), па би нам прилози те врсте били веома значајни и корисни.

Свим корисницима збирке желимо добру забаву и радосно и успешно решавање предложених задатака.

Ваљево, 2024.

Аутори

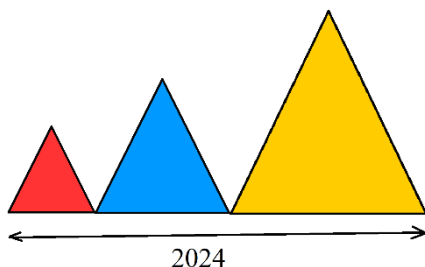
ЗАДАЦИ У ВЕЗИ СА БРОЈЕМ 2024

1. Покажи да је број 2024 дељив са 11 и одреди остале делиоце броја 2024.
2. Први јануар 2024. године је понедељак. Који је дан и датум и колико ће сати и минута бити после 2024 минута?
3. Први јануар 2024. године је понедељак. Који ће дан и датум и колико сати ће бити после 2024 сата?
4. Први јануар 2024. године је понедељак. Који дан и датум ће бити за 2024 дана?
5. Жица чија је дужина 2024 m је подељена на 184 једнака дела. Колика је дужина сваког од тих делова?
6. За колико дана ће атлетичар претрчати пут од 2024 km, ако свакога дана буде трчао по 46 km?
7. Дуж чија је дужина 2024 cm треба поделити на неколико једнаких дужи чија је дужина природан број центиметара. Колика је најмања, а колика је највећа дужина тих дужи у центиметрима? Колико ће се добити најмањих, а колико највећих дужи? На колико начина се може поделити та дуж?
8. У цистерни се налази 2024 литара сока. Колико тетра-пак сокова чија запремина је 11 децилитара се може напунити из те цистерне?
9. У магацину су ускладиштени пакети чија је укупна маса 2024 kg. Колико има пакета, ако је маса сваког пакета 22 kg?
10. Ако је $x + y = 2024$, колико је:
а) $(x + 17) + (y + 27)$; б) $(x + 45) + (y - 33)$?
11. Ако је $a - b = 2024$, колико је:
а) $(a + 1000) - (b + 500)$; б) $(a - 1000) - (b + 500)$?
12. На колико начина Алекса и Филип могу поделити суму од 2024 динара, тако да сваки од њих добије најмање 1 динар?
13. Израчунај обим и површину квадрата чија једна страница има дужину 2024 cm.
14. Ако је обим квадрата 2024 cm, колика је његова површина?

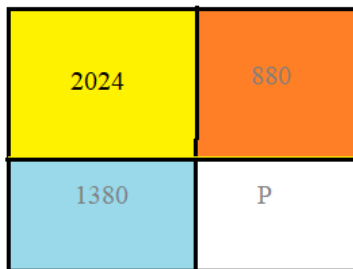
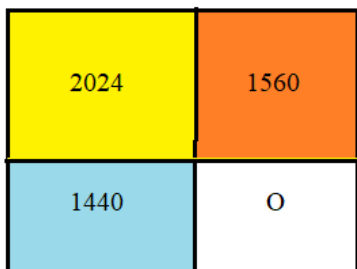
15. Правоугаоник чији је обим 2024 cm, је са две праве паралелне његовој краћој страници подељен на три једнака (подударна) квадрата. Колики је обим, а колика површина сваког од тих квадрата?
16. У правоугаонику чији је обим 2024 cm, једна страница је 10 пута дужа од друге. Колика је површина тог правоугаоника?
17. Колико има правоугаоника чија је површина једнака 2024, а мерни бројеви страница природни бојеви?
18. Може ли се правоугаоник чија је површина 2024 поделити на неколико подударних квадрата? Колико решења има?
19. Природан број А се записује коришћењем 2024 цифре. Опиши најмањи и највећи такав број?
20. Збир цифара броја В је 2024, а производ цифара је различит од 0. Одреди најмањи и највећи такав природан број?
21. Број С је написан само цифрама 4 и 5. Одреди најмањи и највећи такав број, ако је збир цифара броја С једнак 2024.
22. Збир цифара природног броја је 2024 и све његове цифре су једнаке. Који је најмањи, а који је највећи од тих бројева? Колико цифара има најмањи, а колико највећи такав број?
23. Природан број има 2024 цифре. Колики је најмањи, а колики највећи могући збир његових цифара?
24. Збир цифара природног броја је 2024. Одреди прву и последњу цифру најмањег од тих бројева.
25. Постоји ли природан број чији је производ цифара 2024?
26. Четири другарице, Анета, Валентина, Ирена и Елена су имале 2024 салвета. Анети је припала половина, Валентини четвртина, Ирени осмина свих салвета, а Елени остатак салвета. Колико салвета је добила свака од другарица?
27. Фудбалски тим (11 играча) има на располагању 2024 јабуке које треба да поделе тако да сваки играч добије једнак број јабука. Колико јабука је добио сваки играч?
28. Учитељица је имала 2024 бомбоне, а у њеном одељењу је било 23 ученика. Колико бомбона је добио сваки од ученика, ако је сваки од ученика добио једнак број бомбона?

29. Једна школа је добила 2024 оловке, које треба да подели на 88 ученика тако да свако од ученика добије једнак број оловака. Колико оловки је добио сваки ученик?
30. Ако се 2024 кликера поделе на 253 дечака, тако да сваки дечак добије једнак број кликера, колико кликера је добио сваки дечак?
31. Може ли збир два узастопна природна броја бити 2024?
32. Одреди два узастопна непарна природна броја чији је збир 2024.
33. Може ли збир два узастопна парна броја бити 2024?
34. Може ли збир три узастопна природна броја бити 2024?
35. Постоје ли четири узастопна природна броја чији је збир једнак 2024.
36. Одреди четири узастопна парна броја чији је збир једнак 2024.
37. Може ли збир 23 узастопна природна броја бити 2024?
38. Колико најмање, а колико највише узастопних природних бројева треба сабрати да би се добио збир 2024?
39. На колико се начина број 2024 може написати као збир неколико узастопних природних бројева?
40. На колико начина се број 2024 може написати као збир једног троцифреног и једног четвороцифреног природног броја?
41. На колико начина се број 2024 може написати као збир два четвороцифрена природна броја, при чему је први сабирак увек мањи од другог?
42. На колико начина се број 2024 може написати као разлика једног четвороцифреног и једног троцифреног природног броја?
43. На колико начина се број 2024 може написати као разлика два четвороцифрена природна броја?
44. Колико бројева садржи низ: 4, 8, 12, 16, ... , 2020, 2024.
45. Који број је 2024. члан низа 1, 3, 5, 7, 9 ...
46. Колико бројева садржи низ: 2024, 2021, 2018, 2015, ... 5, 2
47. Израчунај вредност израза: $2024 - 2023 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1$.

48. Израчунај вредност израза:
 $2024 + 2022 + \dots + 6 + 4 + 2 - (2023 + 2021 + \dots + 5 + 3 + 1)$.
49. Сума од 2024 динара исплаћена је са 1000 новчића од 2 и 5 динара. Колико којих новчића је било?
50. Сума од 2024 динара исплаћена је новчићима од 2 и 5 динара. Са колико најмање, а са колико највише новчића је то могуће учинити?
51. Збир два броја је 2024, а њихова разлика је 222. О којим бројевима је реч?
52. Збир дељеника, делиоца и количника је 2024, а збир делиоца и количника је 408. Одреди дељеник, делилац и количник?
53. Дата су три једнакостранична троугла (види слику). Колики је збир њихових обима?



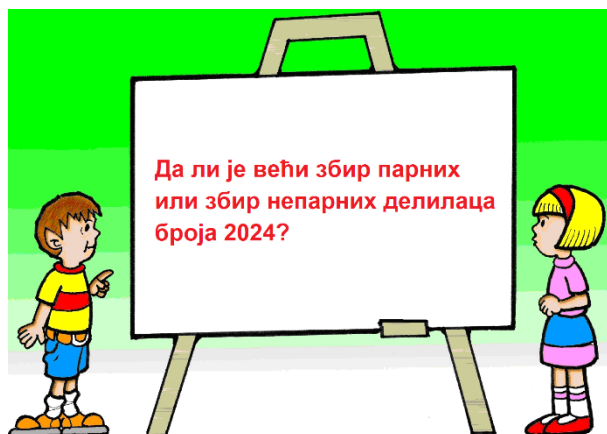
54. Правоугаоник је подељен на четири мања правоугаоника чији су обими 2024, 1560 и 1440 и О (слика лево). Одреди обим О четвртог правоугаоника.



55. Правоугаоник је подељен на четири мања правоугаоника чије су површине 2024, 880, 1380 и Р (слика десно). Одреди површину Р четвртог правоугаоника.

56. Када се страница квадрата увећа за 4 cm површина квадрата се увећа за 2024 cm^2 . Колики је обим првог (мањег), а колики обим другог (већег) квадрата?
57. Конструиши магични квадрат (3×3) чији је један елеменат број 2024.
58. Конструиши магични квадрат (3×3) , ако се у горњем левом углу налази број 2024.
59. Може ли централни број магичног квадрата (3×3) чији су сви елементи природни бројеви бити 2024? Ако може, конструиши један такав магичан квадрат?
60. Постоји ли магични квадрат (3×3) чији су елементи природни бројеви, а чији је карактеристични збир једнак 2024?
61. Дешифровати сабирање $A + AB + ABC + ABCD = 2024$, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.
62. Дешифровати множење: $A \cdot A \cdot AA \cdot AB = 2024$.
63. Дешифруј множење: $AA \cdot AB = 2024$.
64. Дешифруј сабирање: $AA + AA + \dots + AA = 2024$. Колико сабирака има?
65. Дешифруј сабирање: $AB + AB + \dots + AB = 2024$. Колико различитих решења има, ако су А и В различите цифре?
66. Дат је израз $ABC + ABC + \dots + ABC = 2024$. Колико најмање, а колико највише сабирака садржи дати израз?
67. Палиндром је број који се једнако чита с лева у десно, као и с десна у лево (на пример број 5335 или 12321). Може ли се број 2024 приказати као збир два палиндрома ABBA и CDC?
68. Може ли се број 2024 приказати као разлика два палиндрома ABBA и CDC?
69. Колико најмање једнаких бројева - палиндрома треба сабрати да би се добио збир 2024?
70. Колико највише једнаких бројева - палиндрома треба сабрати да би се добио збир 2024?

71. Колико цифара је потребно да се испишу сви природни бројеви од 1 до 2024?
72. Дактилографкиња је без размака откуцала низ природних бројева 1234567891011... Која цифра се налази на 2024. месту у том низу?
73. Марко има на располагању 2024 цифре и нумерише једну књигу. До које странице књиге је у нумерацији стигао Марко?
74. Петар је за нумерацију кућа на десној (парној) страни улице потрошио 2024 цифре. Колико кућа има на десној (парној) страни те улице?
75. Лаза је број x требао да помножи са 2024 и добијени производ сабере са 2023. Међутим, Лаза је погрешно па је x помножио са 2023 и добијени број сабрао са 2024. Испоставило се да би у оба случаја добио исти број. Одреди број x .
76. Да ли је збир прва 2024 природна броја, паран или непаран број?
77. Између бројева 2024 2023 2022 2021 ... 4 3 2 1 треба поставити знаке + или – тако да добијени израз има најмању могућу вредност. Колика је та вредност?
78. Могу ли се између бројева 2024 2023 2022 2021 ... 4 3 2 1 поставити знаци + и – и заграде тако да вредност добијеног израза буде: а) 2; б) 1; в) 1012?
79. Докажи да је број 2024 сложен број.
80. Колико делилаца има број 2024?
81. Може ли: а) производ; б) збир пет простих бројева бити 2024?
82. Шта је веће: збир парних или збир непарних делилаца броја 2024?



83. Број 2024 је записан као производ два узастопна парна броја. Колики је збир тих бројева?
84. Дужине ивица квадрa су природни бројеви. Колико има различитих квадрa чија је запремина 2024?
85. Правоугаони лист папира чија је површина 2024 cm^2 треба исећи на мање и подударне квадрате чија дужина странице је природан број. Колико најмање и колико највише се може добити таквих квадрата?
86. Мерни број дужине правоугаоника је двоцифрен број, а површина правоугаоника је 2024. Колико таквих правоугаоника има?
87. Одреди бар три двојке простих бројева (p, q) такве да је њихов збир 2024.¹
88. Одреди бар две тројке простих бројева (p, q, r) такве да је њихов збир 2024.
89. Збир три проста броја је 2024. Може ли производ тих простих бројева бити непаран број?
90. Колико најмање, а колико највише простих бројева треба сабрати да би збир био 2024?
91. Постоје ли четири проста броја чији је збир једнак 2024?
92. Одреди све природне бројеве n , такве да је $n < 1000$ и да је НЗС бројева 88 и n једнак 2024.
93. НЗС два природна броја је 2024. Које вредности може имати НЗД та два природна броја?
94. Производ НЗД и НЗС два природна броја је 2024. О којим бројевима је реч?
95. На једном математичко-информатичком научном скупу учествује 2024 научника од којих се сваки бави математиком или информатиком. Пет осмина од њих се бави математиком, а половина информатиком. Колико учесника тог скупа се бави и математиком и информатиком?

¹ У наредним задацима је дозвољено коришћење таблице простих бројева која се налази на страни 92.

96. Колико подскупова има скуп $A = \{2023, 2024, 2025\}$?
97. A је скуп свих природних бројева мањих од 2024 који су дељиви са 5, а B је скуп свих природних бројева мањих од 2024 дељивих са 8. Колико елемената имају скупови: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$?
98. Дат је скуп бројева $S = \{1, 2, 3 \dots 2023, 2024\}$. Колико бројева из скупа S није дељиво ни са 2, ни са 3?
99. Дат је скуп бројева $S = \{1, 2, 3 \dots 2023, 2024\}$. Колико бројева из скупа S је дељиво са 4 или 5 или 6?
100. Збир природних бројева који су елементи скупа A је 2027, а збир природних бројева који су елементи скупа B је 2029. Одреди скупове A и B , ако је $A \cap B = \{2024\}$. Колико има решења?
101. Дат је скуп бројева $A = \{1, 2, 3, \dots, 2023, 2024\}$. Постоје ли скупови B и C такви да је: $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$ и збир бројева скупа B , једнак је збиру бројева скупа C ?
102. Дат је скуп $A = \{1, 8, 11, 23, 2024\}$. Постоје ли скупови B и C такви да је: $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$ и производ бројева скупа B , једнак је производу бројева скупа C ?
103. Скуп A чине прости бројеви који се не могу представити као збир два сложена броја, а скуп B чине сви прости делиоци броја 2024. Одреди скупове $A \cup B$ и $A \cap B$.
104. Збир бројиоца и имениоца разломка $\frac{p}{q}$ ($p > 0$, $q > 0$ и $q \neq 0$) је 2024. Одреди најмањи и највећи од тих разломака, тако да се добијени разломак не може скратити ако је добијени разломак:
а) прави разломак; б) било који разломак.
105. Одреди разломак који је једнак разломку $\frac{3}{5}$ тако да је збир његовог бројиоца и имениоца једнак 2024.
106. Која цифра се налази на 2024. месту у децималном запису разломка $\frac{14}{33}$?
107. Шта је веће: $\frac{2023}{2024}$ или $\frac{2024}{2025}$?

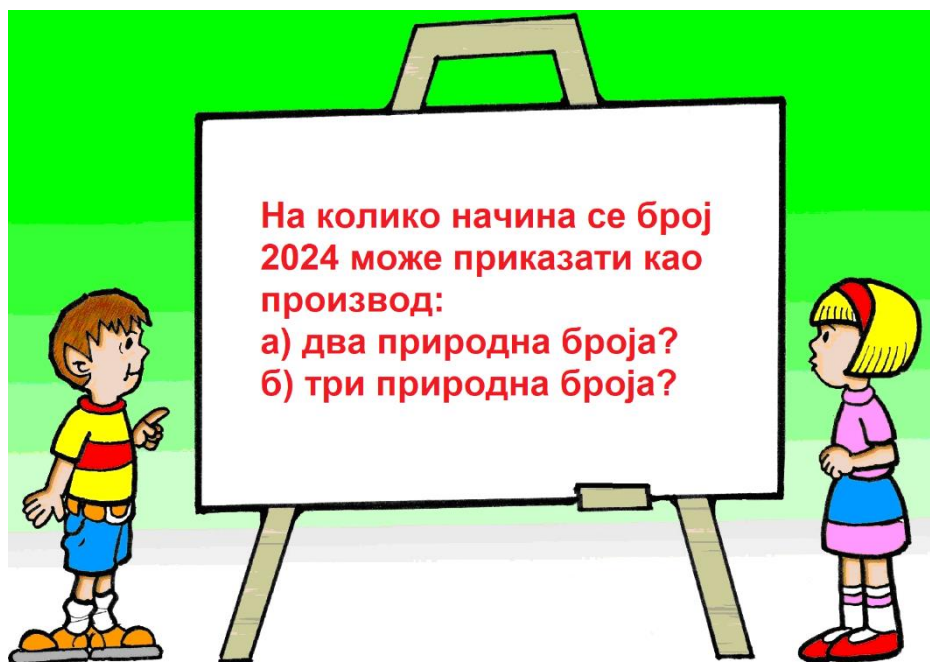
108. Упореди разломке $\frac{7}{2024}$ и $\frac{3}{755}$.
109. Одреди све природне бројеве n , такве да је

$$2023 < \frac{n+2}{3} \leq 2024.$$
110. Колико има природних бројева n таквих да је $1 \leq \frac{n+1000}{2024} < 2$.
111. Одреди све сложене бројеве s , такве да важе неједнакости:
 $2s + 2030 < 3s + 2024 < s + 2048.$
112. Одреди све просте бројеве p за које је $\frac{45}{2024} < \frac{1}{p} < \frac{5}{36}$.
113. Шта је веће: једанаестина од осмине броја 2024 или четвртина од једног 22 дела броја 2024?
114. У магацину спортске опреме се налазе 2024 лопте. Прва основна школа је добила четвртину свих лопти. Друга основна школа је добила трећину преосталих лопти. Трећа основна школа је добила половину преосталих лопти, а четврта основна школа све преостале лопте. Која школа је добила највише, а која најмање лопти?
115. Воја има 2024 динара. Свом брату Лази је поклонио осмину своје суме, сестри Лени је поклонио две једанаестине своје суме, а другој сестри Нини је поклонио три двадесеттрећине своје суме. Колико новца је остало Воји?
116. Одреди број који је за 1 већи од реципрочне вредности броја $\frac{2023}{2024}$.
117. Користећи особине реципрочне вредности разломка, реши једначину $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 2024$.
118. Број 20,242024202420242024 ... напиши у запису $\frac{p}{q}$.
119. На куглицама су записани бројеви 1, 2, 3, 4 ... 2023, 2024. Све куглице су потом постављене у непровидну врећу. Извлачи се једна куглица. Да ли је већа шанса да се на извученој куглици нађе паран или непаран број?

120. На куглицама су записани бројеви 1, 2, 3, 4 ... 1389. Све куглице су потом постављене у непровидну врећу. Извлаче се одједном две куглице. Да ли је већа шанса да збир бројева на извученим куглицама буде 24 или да збир бројева буде 2024?
121. На куглицама су записани бројеви 2, 3, 4 ... 2023, 2024. Све куглице су потом постављене у непровидну врећу. Куглице из вреће извлачи Сава. Ако Сава извуче прост број један бод се уписује Вељку, а ако Сава извуче сложен број онда један број добија Драган. Игра се завршава када Сава извуче последњу куглицу. Да ли је дата игра поштена, то јест да ли Вељко и Драган имају једнаке шансе да победе?
122. Ако се број 2024 сабере са природним бројем n , добија се палиндром АВВА. Одреди најмању могућу вредност n .
123. Ако се број 2024 сабере са природним бројем n , добија се петоцифрен палиндром АВСВА. Одреди највећу могућу вредност n .
124. На колико начина се број 2024 може написати као збир два палиндрома?
125. Може ли се број 2024 представити као збир три палиндрома АВА, ВСВ и CDC (цифре А, В, С и D не морају бити различите)?
126. На колико начина се број 2024 може написати као збир n (n је природан број) једнаких палиндрома?
127. На колико различитих области деле раван 2024 паралелне праве?
128. Дате су 2024 различите праве од којих свака садржи тачку S. На колико различитих области деле раван дате праве?
129. Дато је n тачака у равни. Могу ли дате тачке одређивати тачно 2024 праве?
130. Колико дужи је одређено са 2024 тачке?
131. Дато је n тачака у равни. Могу ли дате тачке одређивати тачно 2024 дужи?
132. Одреди бар један квадар чија је површина 2024 cm^2 , а све његове ивице имају дужину изражену природним бројевима.
133. Две кружнице једнаких полупречника се додирују. Колики су полупречници тих кружница, ако је растојање центара кружница једнако 2024?

134. Две кружнице се додирују изнутра. Колики су полупречници тих кружница, ако је растојање центара кружница једнако 2024, а полупречник веће кружнице је 3 пута већи од полупречника мање кружнице?
135. Може ли се са 1012 правих дати круг поделити на 2024 различита дела? Одреди бар један од могућих међусобних положаја тих правих.
136. Одреди бар два различита квадра чија је запремина 2024 cm^3 , а све његове ивице имају дужину изражену природним бројевима.
137. Квадар има запремину 2024 cm^3 , а једна његова страна је квадрат. Колика је површина тог квадра?
138. Квадар од пластелина има запремину 2024 cm^3 . Колико се једнаких коцки, чије ивице су изражене природним бројевима, може направити од пластелина који је на располагању (без остатка материјала)? Колико има решења?
139. Квадар има запремину 2024 cm^3 , а збир дужина свих његових ивица је 168 cm. Колика је површина тог квадра, ако су дужине његових ивица изражене природним бројевима?
140. Да ли је угао који има $2024'$ (минута), оштар, туп или прав?
141. Дат је угао чији мерни број је $2024'$ (минута). Одреди угао α који је комплементаран и угао β који је суплементаран са датим углом.
142. Углови α и β су комплементарни, а њихова разлика износи 2024 минута. Одреди углове α и β .
143. Углови α и β су суплементарни, а њихова разлика износи 2024 минута. Одреди углове α и β .
144. Углови α и β су суплементарни. Одреди углове α и β , ако је $12\alpha + 11\beta = 2024^\circ$.
145. Мерни број оштрог угла је природан број степени. Може ли збир неколико таквих једнаких оштрих углова бити 2024° ? Колико има таквих углова? Колико решења има?
146. Мерни број тупог угла је природан број степени. Може ли збир неколико таквих једнаких тупих углова бити 2024° . Колико има таквих углова? Колико решења има?

147. Постоје ли природни бројеви m и n такви да важи једнакост $1012m + 1013n = 2024$?
148. Може ли вредност израза $\frac{2024}{p} + \frac{2024}{q} + \frac{2024}{r}$ бити 1284, ако су p, q и r различити прости бројеви.
149. Постоје ли прости бројеви p и q , такви да је $406p + 404q = 2024$? Колико има решења?
150. Одреди бар један пар природних бројева m и n , таквих да је $\frac{2024}{m} + \frac{2024}{n} = 90$.
151. На колико начина се може приказати број 2024, као производ:
а) два природна броја; б) три природна броја?



152. Колико делилаца броја 2024 су парни, а колико непарни бројеви?
153. Дат је природан број $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30$. Докажи да је n дељив са 2024.
154. Производ два природна броја је 2024, а њихов НЗС је 1012. Колики је њихов НЗД? Колико парова таквих природних бројева има?

155. Дате су цифре 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0. Користећи дате цифре (у било ком распореду), симболе рачунских операција и заграде, напиши бројевни израз који има вредност 2024 („слеplивање“ цифара није дозвољено).
156. Могу ли се у следећим једнакостима звезде заменити знацима + или -, тако да се добију тачне једнакости:
 а) $1 * 2 * 3 * 4 * \dots * 2023 * 2024 = 0$;
 б) $1 * 2 * 3 * 4 * \dots * 2023 * 2024 = 2024$.
157. Упореди целе бројеве $a = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2023 - 2024$ и $b = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + \dots + 2022 - 2024$.
158. Колико целих бројева има у низу: $-76, -73, -70, \dots, 2021, 2024$?
159. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x \cdot x \cdot |y| = 2024$.
160. Може ли се скуп $\{-2024, -2023, \dots, 2023, 2024\}$ поделити на 100 дисјунктних² подскупова тако да су збирови бројева у сваком од дисјунктних подскупова једнаки?
161. Количник два цела броја је -506 . Може ли њихов производ бити:
 а) 2024; б) -2024 ?
162. На колико начина се број 2024 може приказати као производ:
 а) два различита цела броја; б) три различита цела броја?
163. Може ли збир 2024 узастопна цела броја бити 2024?
164. Може ли збир 2024 узастопна цела броја бити -1012 ?
165. Може ли збир 2024 узастопна цела броја бити једнак њиховом производу?
166. Збир k природних бројева је 2024. Производ истих k природних бројева је такође 2024. Одреди најмању и највећу вредност природног броја k .
167. Може ли се скуп бројева $S = \{1, 2, 3, \dots, 2022, 2023, 2024\}$ поделити на два дисјунктна подскупа A и B (A и B немају заједничких елемената), тако да је збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B ?

² Два скупа A и B су дисјунктна, ако је $A \cap B = \emptyset$.

168. Може ли се скуп бројева $S = \{-2024, -2023, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 2022, 2023, 2024\}$ поделити на два подскупа A и B , који немају заједничких елемената, тако да је $A \cup B = S$ и: а) збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B ; б) производ елемената скупа A једнак производу елемената скупа B ?
169. Када се број 2024 подели природним бројем m добије се количник n и остатак p . Одреди природне бројеве m и n . Колико има решења?
170. Израчунај вредност израза: $2024 + 202,4 + 20,24 + 2,024 + 0,2024$.
171. Број $0,20242024202420242024 \dots$ запиши у запису $\frac{p}{q}$.
172. Број $2024,2024202420242024 \dots$ запиши у запису $\frac{p}{q}$.
173. Дат је разломак $17/33$. Колико износи збир прве 2024 цифаре иза децималног зареза тог броја?
174. Која цифра се налази на 2024 месту иза децималног зареза у децималном запису разломка $3/7$?
175. Разломак $\frac{5}{13}$ је настао скраћивањем разломка код кога је разлика имениоца и бројиоца једнака 2024. Који је то разломак?
176. Одреди разломак једнак разломку $\frac{22}{23}$, тако да је производ његовог бројиоца и имениоца једнак 2024.
177. Када се бројиоцу разломка $\frac{2023}{2024}$ дода, а од имениоца одузме исти број, вредност разломка је 2. О ком броју је реч?
178. Скрати разломак $\frac{8888}{20242024}$.
179. Зашто разломак $\frac{525}{2024}$ не може да се скрати?
180. Одреди све двоцифрене природне бројеве x за које се разломак $\frac{5x + 2024}{x}$ може скратити.
181. Шта је веће: $\frac{3}{133}$ или $\frac{47}{2024}$?

182. Колико чинилаца треба да буде у производу $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ да би производ био једнак 2024?
183. Израчунај вредност израза $2024 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11}\right)$.
184. Одреди природан број n ако је $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2024}$.
185. Докажи неједнакост: $1 + 2 + 3 + \dots + 64 > 2024$.
186. Колико најмање узастопних непарних бројева почев од 1, па на даље треба сабрати да би се добио збир који је већи од 2024?
187. Докажи неједнакост: $2 + 4 + 6 + \dots + 86 + 88 < 2024$.
188. Реши једначину: $\frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} + \frac{5}{6x} = 2024$.
189. Реши једначину: $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}}} = 2024$.
190. Одреди збир свих целобројних решења неједначине $|x| > 2024$.
191. Израчунај производ свих решења неједначине $|2x - 6| < 2024$.
192. Колико има целих бројева x , таквих да је $|x - 1| < 2024$?
193. Одреди сва решења једначине $||x - 2024| - 2023| = 1$.
194. Постоји ли геометријска фигура која има више од 2024 осе симетрије?
195. Могу ли се 2024 кликера поделити групи од 64 дечака тако да сваки од њих добије бар један кликер и да сви добију различит број кликера?
196. Могу ли се 2024 кликера поделити групи од 63 дечака тако да сваки од њих добије бар један кликер и да сви добију различит број кликера?
197. У једној школи има 2024 ученика. Докажи да бар 3 од њих имају исте иницијале и да бар 6 од њих славе рођендан истог дана.

198. Скуп P чине 2024 проста броја. Доказати да се бар 506 датих простих бројева завршавају истом цифром. Да ли смемо да тврдимо да се бар 507 датих простих бројева завршава истом цифром?
199. Постоји ли прост број p ($p > 2024$), такав да су бројеви $p - 2024$ и $p + 2024$ такође прости?
200. Докажи да у скупу природних бројева постоји 2024 узастопна природна броја који су сложени.
201. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p + q = 2024$?³
202. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p - 5q = 2024$?
203. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p - q = 2024$?
204. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p + 2q = 2024$?
205. Постоје ли прости бројеви p , q и r , такви да је $2p + 3q + 4r = 2024$?
206. Да ли једначина $pq + qr + rp = 2024$ има решења, ако су p , q и r прости бројеви?
207. Постоје ли прости бројеви p , q и r такви да је $205p + 203q + 201r = 2024$?
208. Збир цифара природног броја m је s . Одреди бројеве m и s ако је $m + s = 2024$.
209. Збир цифара природног броја m је s . Постоје ли бројеви m и s такви да је $m - s = 2024$?
210. Може ли се дати квадрат поделити на 2024 мања, не обавезно подударна, квадрата?
211. Може ли се дати једнакостранични троугао поделити на 2024 мања, не обавезно подударна, једнакостранична троугла?
212. Обим троугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Колика може бити најмања, а колика највећа страница тог троугла?

³ За решавање наредних задатака дозвољено је коришћење таблице простих бројева – види страну 92

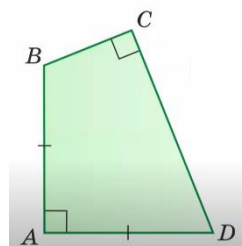
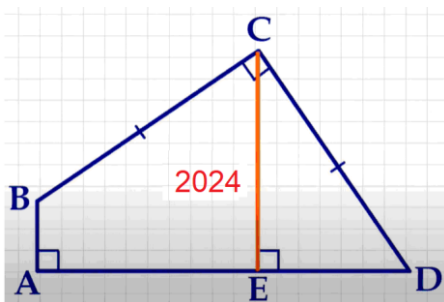
213. Један угао једнакокраког троугла је $2024'$. Одреди углове тог троугла.
214. Може ли збир два спољашња угла троугла бити $2024'$ (минута)?
215. Може ли троугао чији је обим 2024 cm бити подударан са троуглом чији је обим 2023 cm?
216. Обим троугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Може ли дати троугао бити једнакостраничан?
217. Обим троугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Може ли дати троугао бити једнакокраки, ако је:
- а) основица за 8 cm дужа од крака; б) основица за 8 cm краћа од крака?
218. Обим троугла је 2024 cm, а дужине његових страница се односе као $6 : 7 : 9$. Одреди странице тог троугла.
219. Обим једнакокраког троугла је 2024 cm, његов крак је већи од 999 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Колико има таквих једнакокраких троуглова?
220. Обим једнакокраког троугла је 2024 cm, његова основица је већа од 999 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Колико има таквих једнакокраких троуглова?
221. Обим једнакокраког троугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Колико има таквих једнакокраких троуглова?
222. Обим једнакокраког троугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Колики је најмањи могући збир апсолутних разлика његових страница?
223. Обим једнакокраког троугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви. Колики је највећи могући збир апсолутних разлика његових страница?
224. Обим четвороугла је 2024 cm, а дужине свих његових страница су природни бројеви.
- а) Може ли тај четвороугао имати све једнаке странице?
- б) Може ли тај четвороугао имати све једнаке углове?

225. Обим четвороугла је 2024 см, а дужине свих његових страница су природни бројеви. а) Колико има квадрата са том особином? б) Колико има правоугаоника (не рачунајући квадрате) са том особином? в) Колико има ромбова са том особином? г) Колико има паралелограма са том особином?
226. Обим четвороугла је 2024 см, а дужине свих његових страница су природни бројеви. а) Колико има делтоида са том особином? б) Колико делтоида са том особином има тачно један прав угао? в) Колико делтоида са том особином има тачно два права угла?
227. У декадном запису природног броја $m = 20242024...20242024$ група цифара 2024 се понавља n пута. Постоји ли природан број n такав да је m потпун квадрат?
228. Одреди најмањи природан број n такав да је број $2024n$ а) потпун квадрат; б) потпун куб.
229. Одреди природан број n такав да је $n < \sqrt{2024} < n+1$.
230. Одреди све природне бројеве n такве да је $2023 < \sqrt{n} \leq 2024$.
231. Нека је n природан број такав да је $1024 \leq n < 2024$. Одреди све вредности n тако да је и $\sqrt{n}$ природан број.
232. Колико има парова природних бројева x и y ($x > y$) таквих да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2024$?
233. Одреди најмањи природан број n такав да је $\sqrt{2024 + n}$ природан број.
234. Колико има природних бројева n таквих да је $3 \leq \sqrt{n - 2024} \leq 17$?
235. Ако је x реалан број, реши једначину $x^2 + 2x = 2024$.
236. Израчунај: $\sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}} + \sqrt{2025 - 2\sqrt{2024}}$.
237. Постоји ли природан број n такав да је $1 + 2 + \dots + n = 2024$?
238. Дати су бројеви $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024}$ и $B = 2^{2025}$. Шта је веће: A или B ?
239. Докажи да је израз $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2023} + 7^{2024}$ дељив са 2800.

240. Докажи да је број $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024}$ дељив са 217. Која је последња цифра броја A ?
241. Шта је веће: 2^{2024} или 3^{1350} ?
242. Израчунај вредност израза $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2023^2 - 2024^2$?
243. Да ли је број $m = 1^{2024} + 2^{2024} + 3^{2024} + 4^{2024}$ дељив са 10?
244. Одреди све природне бројеве n такав да је $5^n + 6^n + 7^n + 8^n$ дељив са 2024.
245. Докажи да је број $3^{2024} + 4^{1011} + 6^{1012}$ сложен.
246. Докажи да једначина $x^4 + y^4 = 202420242024$ нема решења у скупу целих бројева.
247. а) Докажи да је $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ дељиво са 155 за сваки природан број n . б) Докажи да је број $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023} + 5^{2024}$ дељив са 780.
248. Нека је $a = 2^{2025} - 2^{2024} + 2^{2023}$, $b = 2^{2024} - 2^{2025} + 2^{2026}$ и $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2023}$. Докажи да су бројеви a , b и c мерни бројеви страница правоуглог троугла.
249. Дат је број $a = 2^{2021} \cdot 3^{2022} \cdot 4^{2023} \cdot 5^{2024}$. Колико нула садржи декадни записа број a ?



250. Нека је $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2023 \cdot 2024$ и нека је m дељив бројем 2^n .
Одреди највећу могућу вредност броја n . Са колико нула се завршава декадни запис датог броја m ?
251. Дат је број $a = 1013 \cdot 1014 \cdot \dots \cdot 2023 \cdot 2024$. Докажи да је a дељив са 2^{1012} , а није дељив са 2^{1013} .
252. Доказати да број 2^{24} има 8 цифара, а број 2^{2024} има више од 606 цифара.
253. Докажи да у декадном запису броја 2^{2024} постоји цифра која се појављује бар 61 пут.
254. Одреди природан број n , ако број 2024^n има 160 делилаца.
255. Одреди најмањи природан број који има тачно 2024 делиоца.
256. Скуп S садржи 2024 различита природна броја. Докажи да у скупу S постоји бар 55 природних бројева чија је разлика дељива са 37.
257. На тениском турниру учествује 2024 тенисера. Једно од правила турнира је да победник меча наставља такмичење, а поражени испада из даљег такмичења. Колико укупно мечева треба одиграти да би се добио победник турнира?
258. Колико има природних бројева мањих од 2024 који имају тачно:
а) 3 делиоца; б) 5 делилаца?
259. У правоугаонику чије су димезије 168 и 144 на случајан начин су распоређене 2024 тачке. Докажи да при ма каквом распореду постоје две тачке такве да њихово међусобно растојање није веће од 5.
260. Да ли је број $2024,20242024\dots$ где се група цифара 2024 бесконачно понавља, рационалан или ирационалан број? Ако је дати број рационалан одреди његов запис у облику $\frac{p}{q}$.
261. У правоуглом троуглу ABC полупречник уписаног круга је 2024. Докажи да је збир катета тог троугла већи од 6072.
262. У четвороуглу $ABCD$ је $BC = CD$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ и $CE = 2024$. Одреди површину датог четвороугла $ABCD$ (слика лево).

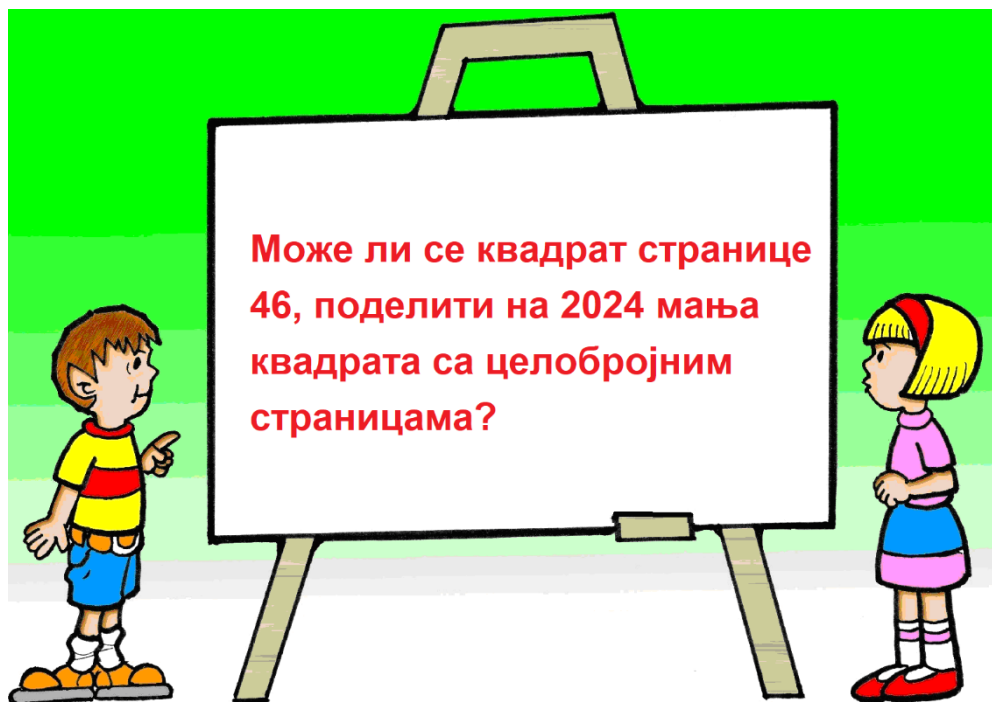


263. У четвороуглу $ABCD$ је $AB = AD$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ и $BC + CD = 2024$. Одреди површину датог четвороугла $ABCD$ (слика десно).
264. Хипотенуза правоуглог троугла је 2024, а један оштар угао правоуглог троугла је 15° . Колика је површина тог троугла?
265. У конвексном шестоуглу $ABCDEF$ сви углови су једнаки. Одредити обим и површину шестоугла, ако је $AB = 2022$, $BC = 2023$, $CD = 2024$ и $EF = 2025$.
266. Дат је трапез $ABCD$ чије дијагонале се секу у тачки O тако да је површина троугла AOD једнака 2024. Колика је површина троугла BOC ?
267. Површина четвороугла $ABCD$ је 2024. На страници AB дате су тачке M и N , тако да је $AM = MN = NB$, а на страници CD тачке P и Q тако да је $CP = PQ = QC$. Одреди површину четвороугла $MNPQ$.
268. Израчунај странице троугла ABC , ако је $a : b : c = 13 : 14 : 15$ и ако је површина троугла ABC једнака 2024 cm^2 .
269. а) Постоји ли многоугао који има 2024 дијагонале?
б) Постоји ли многоугао чији се број дијагонала повећа за 2024, када се број његових страница увећа за 16?
270. Може ли конвексни многоугао са 2024 странице имати све унутрашње углове изражене природним бројем степени?
271. Постоји ли многоугао чији је збир унутрашњих углова једнак 2024° ?
272. Збир дељеника, делиоца и количника је 2024, а разлика количника и делиоца је 56. О којим бројевима је реч?
273. На колико начина се број 2024 може приказати као збир неколико узастопних целих бројева?

274. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 - y! = 2024$?
275. Колико најмање, а колико највише: а) сложених бројева;
б) простих бројева треба сабрати да би добијени збир био 2024?
276. Да ли се број 2024 може приказати као производ два узастопна парна броја?
277. Колико решења у скупу целих бројева има једначина: $x^2 - y^2 = 2024$?
278. Колики је збир последњих цифара квадрата свих природних бројева од 1 до 2024?
279. Одреди највећи природан број n ($n < 2024$), ако је збир остатака при дељењу броја n са прва четири проста броја једнак 13.
280. Разлика 37% неког броја и 15% истог броја је 2024. О ком броју је реч?
281. У магацину се налазе 2024 лопте, које треба поделити између четири фудбалска клуба у размери 4 : 5 : 6 : 8. Колико лопти је добио сваки од фудбалских клубова?
282. Суму од 2024 динара поделити у размери 1,5 : 2,5. Колика је мања, а колика већа сума?
283. Свеже печурке садрже 75% воде, а суве 10% воде. Колико треба осушити свежих печурки да би се добило 2024 kg сувих печурки?
284. Кошуља чија је цена 2024 динара је је прво поскупела 30%, а затим појефтинила 30%. Шта у трећем кораку треба учинити са ценом кошуље да би се вратила на почетну цену?
285. Разлика два броја је 2024. Израчунај те бројеве ако је 4,5% већег броја једнако са 8,5% мањег броја.
286. Одреди реалне бројеве a, b, c, d и e , ако је $a : 1 = b : 2 = c : 3 = d : 4 = e : 5$ и ако је $2a + 2b + c + 2d + e = 2024$.
287. За позитивне реалне бројеве a, b, c и d важе релације $a : b = b : c = c : d = d : a$. Израчунај колико је $(2024a + b) : (2024c - d)$.
288. Одреди природне бројеве a, b, c и d такве да су бројеви a, b и c пропорционални са 3, 4 и d , ако је $333a + 250b + cd < 2024$.
289. Сада је подне. Колики угао ће заклапати велика и мала казаљка за 2024 минута?

290. У кутији се налази 2023 црвене, 2024 плаве и 2025 белих куглица. Колико најмање куглица треба извући да би били сигурни да је извучена бар једна плава куглица?
291. Одреди обим и површину троугла ABC, ако су темена троугла у координатној равни дати следећим координатама: A(2024, 2024); B(0, 2024) и C(2024, 506).
292. Колико има различитих правоуглих троуглова ABC са целобројним катетама, таквих да је тачка A у координатном почетку, тачка B на x оси, тачка C на y оси, а површина троугла ABC је 2024.
293. Одреди полупречник круга уписаног у правоугли троугао, ако су његове катете 2024 и 1518.
294. Постоји ли троугао чије висине имају дужину 2023, 2024, 2025?
295. У правоуглом троуглу један угао једнак је $22,5^\circ$, а хипотенуза 2024. Израчунај обим и површину тог правоуглог троугла.
296. У троуглу ABC странице имају дужину $AB = 2024$, $BC = 1000$ и $CA = 2000$. Докажи да је тај троугао оштроугли.
297. Дат је троугао чије су странице 2023, 2024 и 2025. Одреди висине тог троугла.
298. Колико има простих бројева мањих од 2024 који се не могу приказати као збир два сложена броја?
299. Реши једначину: $|||x| + x| + x| + x| = 2024$.
300. Одреди сва решења једначине $||x - 2024| - 2023| = 2022$.
301. Колико решења има једначина $|x + |2x + |5x||| = 2024$?
302. Докажи да једначина $2019x + 2022y = 2024$ нема решења у скупу целих бројева.
303. Сума од 2024 динара исплаћена је новчићима од 2 и 5 динара. На колико различитих начина је то могуће учинити? Са колико најмање, а са колико највише новчића је то могуће учинити?
304. На колико начина се од комада злата масе 2024 грама, могу направити златници масе 4 грама и 7 грама?
305. Може ли се квадрат странице 46, поделити на 2024 мања квадрата са целобројним страницама?

306. Може ли се коцка чија ивица има дужину 13 исећи (поделити) на 2024 мање коцке чије ивице су 1 cm, 2 cm, 3 cm или 4 cm?



307. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $4x^2 + 5y^2 = 2024$?
308. Дата је једначина $x^2 - y^2 = 2^{2024}$. Колико решења дата једначина има у скупу: а) природних бројева; б) целих бројева?
309. Колико решења у скупу природних бројева има једначина $xy + x + y = 2024$?
310. Постоје ли природни бројеви x и y , такви да је $x^2 - 3y^2 = 2024$?
311. Докажи да једначина $x! + y^2 = 2024$ нема решења у скупу природних бројева.
312. Постоје ли природни бројеви n , x и y такви да је $n \cdot x! + y^2 = 2024$?
313. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $x^2 + y^2 = 2024$.
314. Постоје ли цели бројеви x , y и z такви да је $x^2 + y^2 + z^2 = 2024$?
315. За целе бројеве x и y важи једнакост $2xy + 3x + 4y = 2024$. Колико решења у скупу целих бројева има дата једначина?

316. Колико решења у скупу природних бројева има једначина

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2024} ?$$
317. Колико целобројних решења има једначина

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2024} ?$$
318. Дати су природни бројеви $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ такви да је $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 2024$. Одреди најмању и највећу могућу вредност природног броја n .
319. Колико најмање, а колико највише квадрата природних бројева треба сабрати да би добијени збир био 2024?
320. Дата је једначина $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2010}^2 = 2024$. Колико решења има дата једначина, ако су $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \dots \geq x_n$ природни бројеви?
321. На колико начина Влада, Нада и Јагода могу поделити суму од 2024 динара, тако да свако од њих добије најмање 1 динар?
322. На колико начина се број 2024 може приказати као збир неколико узастопних непарних целих бројева?
323. Постоји ли правоугли троугао, са свим целобројним страницама у коме је: а) једна катета једнака 2024; б) хипотенуза једнака 2024?
324. Постоји ли правоугли троугао са целобројним страницама чији је обим једнак 2024?
325. Постоји ли правоугли троугао са целобројним страницама чија је површина једнака 2024?
326. Колико има тангентних четвороуглова чије су три странице 2022, 2023 и 2024?
327. Колико има тангентних четвороуглова чији је обим 2024, а мерни бројеви дужина свих страница су природни бројеви?
328. Колико има тангентних четвороуглова ABCD чији је обим 2024, мерни бројеви свих његових страница су природни бројеви и дужина дијагонале AC је 1011?
329. Може ли тангентни четвороугао чији је обим 2024, а мерни бројеви свих његових страница природни бројеви имати четири права угла? Колико таквих четвороуглова има?

330. Колико има делтоида чији је обим 2024, мерни бројеви свих његових страница су природни бројеви и једна дијагонала делтоида је 1000?
331. Дужине ивица квадра су природни бројеви. Може ли површина тог квадра бити 2024?
332. Докажи да је $\frac{89}{45} < \frac{1}{\sqrt{1936}} + \frac{1}{\sqrt{1937}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}} < \frac{45}{22}$.
333. На једној од две паралелне праве има m , а на другој n тачака. Одредити све парове бројева (m, n) таквих да је датим скупом тачака одређено тачно 2024 праве.
334. Докажи да постоји n тачака у простору које одређују тачно 2024 различите равни.
335. Колико решења у скупу природних бројева има једначина $3x + 10y = 2024$?
336. Реши једначину $||x - 1| - 3| = 2024$.
337. Реши неједначину $|x + |x + |x||| \leq 2024$.
338. Дата је једначина $|x + |x + \dots + |x|\dots|| = 2024$ где је број (отворених и затворених) апсолутних заграда једнак природном броју k . Одреди све вредности броја k , тако да су сва решења дате једначине целобројна.
339. У троуглу ABC, страница $BC = a = 2024$, а за унутрашње углове троугла важи однос $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 4$. Докажи да је $\frac{bc}{b+c} = 2024$.
340. Дат је троугао ABC тако да је $AB = 2AC$ и $\angle BAC = 120^\circ$. Симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D, тако да је $AD = 2024$. Израчунај странице AB и AC.
341. Реши једначину:

$$\frac{x+6}{2019} + \frac{x+7}{2020} + \frac{x+8}{2021} = \frac{x+9}{2022} + \frac{x+10}{2023} + \frac{x+11}{2024}.$$
342. Одреди скуп решења једначине $\frac{x-2024}{x-2} + \frac{x-2023}{x-3} + 2 = 0$
343. Напиши бар једну неједначину чије је једино решење број 2024.

344. Напиши бар једну једначину чије решење је скуп $(2024, \infty)$.
345. Дато је 13 узастопних природних бројева. Када је изостављен један од њих, збир преосталих 12 бројева је 2024. О којим бројевима је реч?
346. Ако са $S(n)$ означимо збир цифара природног броја n , реши једначине:
а) $n + S(n) = 2024$; б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2024$.
347. Одредити природан број n , такав да је $n < \frac{10^{4048} + 2}{10^{2024} + 1} < n + 1$.
348. Катете правоуглог троугла су $AC = 1518$ и $BC = 2024$. Симетрала правоугла пресеца хипотенузу троугла у тачки M . Одреди дужи AM и BM .
349. Троугао ABC има површину 2024 cm^2 и сличан је са троуглом $A'B'C'$. Колика је површина троугла $A'B'C'$ ако је $AB : A'B' = 2 : 1$?
350. Дат је квадрат $ABCD$ и на страници AB тачка M тако да је $AM : MB = 2024 : 759$. У ком односу дијагонала AC дели дуж MD ?
351. Подножје планине P је тачка B . Из тачке A која је 2024 m удаљена од подножја планине B , врх планине C се види под углом α . Из тачке D која је за 1518 m ближе подножју планине B од тачке A , врх планине C се види под углом $90^\circ - \alpha$. Колика је висина BC планине P ?
352. У једнакокраком троуглу ABC , је крак $AC = BC = 2024$, а основица AB је 1012 . Висина која одговара краку AC је дуж BD . Докажи да је дуж $CD = 7 \cdot AD$.
353. У правоуглом троуглу дужине катета су a и b , а дужина хипотенузе c . Докажи да је $a^{2024} + b^{2024} < c^{2024}$.
354. Израчунати збир коефицијената полинома $(x^2 + x + 1)^{2024}$.
355. Одредити последње две цифре броја $7^{2024} - 1$.
356. Израчунај вредност израза $x^{2024} + y^{2024}$, ако је $x + y = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$.
357. Израчунај $f(0)$, ако је $10 \cdot f(x) + f(10x) = x + 2024$.
358. Одреди функцију $f(x)$, ако је $f(x + 2024) = 2x - 2024$.
359. Дата је тространа пирамида чије све ивице имају дужину 2024. Доказати да се висине те пирамиде секу у односу $3 : 1$.

360. Од коцке ивице 2024 одсечено је 8 пирамида тако да је од сваке стране коцке настао правилни осмоугао. Израчунај запремину тако добијеног тела.
361. Одреди последње две цифре броја 2^{2024} .
362. Колики је остатак при дељењу броја $3^{2024} + 4^{2024}$ са 7.
363. У круг чији је полупречник једнак 2024 уписан је правоугаоник највеће могуће површине. Одреди површину тог правоугаоника.
364. Докажи да је $\sqrt{2023} + \sqrt{2025} < 2\sqrt{2024}$.
365. Докажи неједнакост $\frac{2^{2023} + 1}{2^{2024} + 1} > \frac{2^{2024} + 1}{2^{2025} + 1}$.
366. Докажи да за сваки реалан број x важи неједнакост:
 $(x - 2022)(x - 2023)(x - 2024)(x - 2025) + 1,0001 > 0$.

РЕШЕЊА

РЕШЕЊА

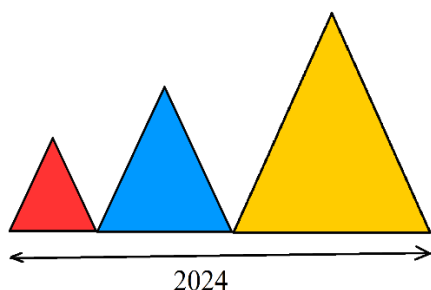
1. Како је $2024 : 11 = 184$, то је број 2024 дељив са 11. Следи да је $184 : 2 = 92$, $92 : 2 = 46$, $46 : 2 = 23$, па је број $2024 = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$.
2. С обзиром да је $2024 : 60 = 33$ (44), то 2024 минута подразумева 33 сата и 44 минута, што је 1 дан (24 часа), 9 часова и 44 минута. То значи да ће после 2024 минута бити уторак, 2 јануар 2024. године, 9 часова и 44 минута.
3. Како је $2024 : 24 = 84$ (8), то 2024 часа подразумева 84 дана и још 8 часова и како је $84 : 7 = 12$, то значи да ће протећи тачно 12 седмица (недеља). Јануар има 31 дан, фебруар има 29 дана и за март остаје 24 дана и 8 часова. Дакле после 2024 часа биће понедељак, 25. март 2024. године, 8:00 часова.
4. Ако се узме у обзир да 2024. година има 366 дана, 2025. има 365 дана, 2026. има 365 дана, 2027. има 365 дана, 2028 има 366 дана, онда до 31.12.2028. протекне $366 + 365 + 365 + 365 + 366 = 1827$ дана. За 2029. годину остаје $2024 - 1827 = 197$ дана. Тих 197 дана ће бити садржано у $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 = 181$ дан колико има од почетка јануара до краја јуна месеца. Недостаје још $197 - 181 = 16$ дана, па ће за 2024 дана бити 16. јул 2029. године. Како је $2024 : 7 = 289$ (1), то ће 16. јул 2029. године бити уторак.
5. Из $2024 : 184 = 22$, следи да ће сваки од добијених делова имати дужину 22 m.
6. Из једнакости $2024 : 46 = 44$, следи да ће пут од 2024 km атлетичар претрчати за 44 дана.
7. Најмања дужина жице је 1 cm и таквих делова ће бити 2024. Највећа дужина жице је 1012 cm и таквих делова ће бити само 2. Могуће су и следеће поделе: 1012 делова по 2 cm; 506 делова по 4 cm; 253 дела по 8 cm; 184 дела по 11 cm; 92 дела по 22 cm; 88 делова по 23 cm; 92 дела по 22 cm; 46 делова по 44 cm; 44 дела по 46 cm, 22 дела по 92 cm, 23 дела по 88 cm; 11 делова по 184 cm; 8 делова по 253 cm; 4 дела по 506 cm. Могући број подела је $2 + 13 = 15$.
8. Како је $2024 : 11 = 184$, то ће се од 2024 литра добити 184 тетрапак сокова.
9. Из једнакости $2024 : 22 = 92$, следи да ће бити 92 пакета.

10. Ако $x + y = 2024$, онда је $(x + 17) + (y + 27) = x + y + 17 + 27 = 2024 + 44 = 2068$. Слично је $(x + 45) + (y - 33) = x + y + 45 - 33 = 2024 + 12 = 2036$.
11. Ако $a - b = 2024$, онда је $(a + 1000) - (b + 500) = a - b + 1000 - 500 = 2024 + 500 = 20524$. Слично: $(a - 1000) - (b + 500) = a - b - 1000 - 500 = 2024 - 1000 - 500 = 1024 - 500 = 524$.
12. Могуће поделе су $1 + 2023 = 2 + 2022 = \dots = 2022 + 2 = 2023 + 1$ и има их 2023.
13. Обим је $4 \cdot 2024 = 8096$ cm. Површина $2024 \cdot 2024 = 4\,096\,576$ cm².
14. Ако је обим квадрата 2024 cm, онда је дужина његове странице $2024 : 4 = 506$ cm. Његова површина је $506 \cdot 506 = 256\,036$ cm².
15. Ако краћа страница правоугаоника има дужину x , онда је обим тог квадрата $x + 3x + 3x + x = 8x$. Следи да је $8x = 2024$ cm, па је $x = 253$ cm. Обим сваког од тих квадрата је $4 \cdot 253 = 1012$ cm, а површина $253 \cdot 253 = 64\,009$ cm².
16. Нека краћа страна тог правоугаоника има дужину y . Тада дужа страна има дужину $10y$. Обим правоугаоника је $y + 10y + y + 10y = 22y = 2024$ cm. Следи да је $y = 2024 : 22 = 92$, па је површина тог правоугаоника $y \cdot 10y = 92 \cdot 920 = 84\,640$ cm².
17. Таквих правоугаоника има осам и дужине њихових страна су: 1 cm и 2024 cm; 2 cm и 1012 cm; 4 cm и 506 cm; 8 cm и 253 cm; 11 cm и 184 cm, 22 cm и 92 cm; 23 cm и 88 cm и 44 cm и 46 cm.
18. Ако страница квадрата има дужину 1 cm, онда таквих квадрата има 2024. Ако страница квадрата има дужину 2 cm, онда је површина квадрата 4 cm², па ће таквих квадрата бити $2024 : 4 = 506$. Друге поделе нису могуће.
19. Најмањи такав број је 1000...000 (једна јединица и после има 2023 нуле), а највећи је 999 ... 999 (садржи 2024 деветке).
20. Ако је производ цифара броја B различит од нуле, то значи да ниједна цифра броја B није 0. Тада се најмања могућа вредност броја B добија када има најмање, а највећа када има највише цифара. Како је $2024 : 9 = 224$ (8) најмањи могући број B је 8999 ... 999 (једна осмица и потом 224 деветке), а највећи је 111...111 (садржи 2024 јединице).

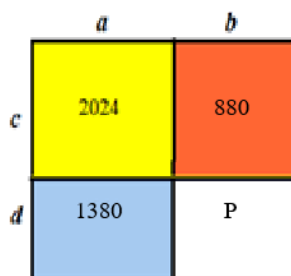
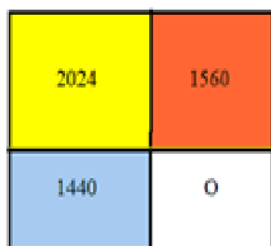
21. Најмањи такав број је онај који садржи најмање цифара, а највећи онај који садржи највише цифара. Зато је најмањи такав број онај који има што више петица, а највећи онај који има највише четворки. Следи да је најмањи 4555 ... 555 (једна четворка и 404 петице) и има 405 цифара. Највећи је 444 ... 444 (има 506 цифара).
22. Најмањи такав број је број који садржи 253 осмице 888 ... 888, а највећи онај који садржи 2024 јединице 111 ... 111.
23. Најмањи могући збир цифара 1 има број 1000 ... 000, а највећи могући збир цифара има број 999 ... 999 (2024 деветке). Тај збир је $9 \cdot 2024 = 18\,216$.
24. Најмањи број који има збир цифара 2024 је 8999 ... 999 (види задатак 20). Прва цифра таквог броја је 8, а последња 9.
25. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, то би цифре у таквом броју morale бити 11 и 23, а то није могуће, па такав број не постоји.
26. Анета је добила $2024 : 2 = 1012$ салвета, а Валентина $2024 : 4 = 506$ салвета. Ирени је припало $2024 : 8 = 253$ салвета. Елена је добила $2024 - 1012 - 506 - 253 = 253$ салвета.
27. Сваки играч ће добити $2024 : 11 = 184$ јабуке.
28. Сваки ученик је добио $2024 : 23 = 88$ бомбона.
29. Сваки ученик је добио $2024 : 88 = 23$ оловке.
30. Сваки дечак ће добити $2024 : 253 = 8$ кликера.
31. Не може, јер је збир два узастопна броја увек непаран број.
32. Два узастопна непарна броја су x и $x + 2$, па је $x + x + 2 = 2024$. Следи да је $2x = 2022$, па је $x = 2022 : 2 = 1011$. Тражени непарни бројеви су 1011 и 1013.
33. Два узастопна парна броја су y и $y + 2$, па је $y + y + 2 = 2024$. Следи да је $2y = 2022$, па је $y = 2022 : 2 = 1011$. Како y није паран број, то број 2024 не може бити збир два узастопна природна броја.
34. Не може, јер број 2024 није дељив са 3.
35. Не може, јер једначина $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4x + 6 = 2024$ или $4x = 2018$ нема решења, јер 2018 није дељиво са 4.
36. Ако је најмањи од тих бројева x , онда је $x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 4x + 12 = 2024$ или $4x = 2012$. Тада је $x = 503$ и тражени бројеви су 503, 505, 507, 509.

37. Нека су тражени бројеви $x - 11, x - 10, \dots, x - 1, x, x + 1, \dots, x + 10, x + 11$. Збир тих бројева је $23 \cdot x = 2024$, па је $x = 2024 : 23 = 88$. Тражени бројеви су 77, 78, ..., 87, 88, 89 ... 98, 99.
38. Најмањи број сабирака је 11, и како је $2024 : 11 = 184$, тражени бројеви су 179, 180, ... 184, ... , 188, 189. Највећи број сабирака је 23 (видети претходни задатак).
39. На три начина. Два су описана у задатку 38, а могуће је још и сабирање 16 узастопних природних бројева: $119 + 120 + \dots + 134$, где постоји 8 парова бројева чији је збир 253.
40. Како је $100 + 1924 = 101 + 1923 = \dots = 999 + 1025 = 2024$, то се број 2024 на 900 начина (толико има троцифрених бројева) може приказати као збир једног троцифреног и једног четвороцифреног броја.
41. Како је $1000 + 1024 = 1001 + 1023 = \dots = 1012 + 1012 = 2024$, то се број 2024 на 13 начина може приказати као збир два четвороцифрена броја.
42. Нека је $x - y = 2024$, где је x четвороцифрен, а y троцифрен број. Тада је $x = 2024 + y$. Какав год био троцифрен број y , број x ће бити четвороцифрен. То значи да ће начина бити колико и троцифрених бројева, дакле 900. То се може видети и из набрајања: $2124 - 100 = 2125 - 101 = \dots = 3023 - 999 = 2024$.
43. Ако је, као и у претходном задатку, $x - y = 2024$, где су x и y четвороцифрени бројеви, тада је $x = 2024 + y$. Најмањи четвороцифрен број y је 1000, а највећи $9999 - 2024 = 7975$. Таквих четвороцифрених бројева има 7976. То се може видети и из набрајања: $3024 - 1000 = 3025 - 1001 = 3026 - 1002 = \dots = 9999 - 7975 = 2024$.
44. Како је $2024 : 4 = 506$, то низ 4, 8, 12, 16, ... , 2020, 2024 има толико чланова колико и низ 1, 2, ... , 505, 506, а то значи 506.
45. Чланови низа 1, 3, 5, 7, ... су $2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 4 - 1 \dots$ То значи да ће 2024. члан низа бити $2 \cdot 2024 - 1 = 4048 - 1 = 4047$.
46. Низ А : 2024, 2021, 2018, 2015, ...5, 2 у коме се бројеви (чланови) разликују за 3, садржи исто бројева колико и низ В: 2025, 2022, 2019, 2016 ... 6, 3. Када се сваки члан тако добијеног низа В подели са 3 добије се низ С: 675, 674, 673, 672 ... 3, 2, 1. Како низови А, В и С имају једнак број елемената, то тражени низ садржи 675 бројева.

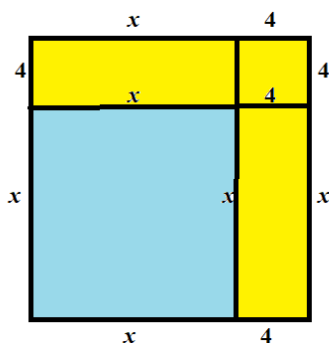
47. Израз $A = 2024 - 2023 + 2022 - 2021 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1$ се може написати и у облику $A = (2024 - 2023) + \dots + (4 - 3) + (2 - 1)$. У свакој од заграда разлика је 1, а како има $2024 : 2 = 1012$ парова, вредност израза је $A = 1 + 1 + \dots + 1 = 1012$.
48. Израз $B = 2024 + 2022 + \dots + 6 + 4 + 2 - (2023 + 2021 + \dots + 3 + 1)$ се може написати у облику $2024 - 2023 + 2022 - 2021 + \dots + 2 - 1$ (разлика 1012 парова суседних бројева), па је тражена вредност израза $B = 1 + 1 + \dots + 1 = 1012$.
49. Нека је x број новчића од 5 динара. Тада новчића од 2 динара има $1000 - x$. Из услова задатка је $5 \cdot x + 2 \cdot (1000 - x) = 2024$, па је $5 \cdot x + 2 \cdot 1000 - 2 \cdot x = 2024$. Добија се да је $3 \cdot x - 2000 = 2024$ или $3 \cdot x = 2024 - 2000 = 24$. Тада је $x = 24 : 3 = 8$. То значи да је било 8 новчића од 5 и 992 новчића од 2 динара.
50. Највише новчића ће бити ако су све новчићи од 2 динара и тада ће их бити $2024 : 2 = 1012$. Ако се морају употребити и једни и други новчићи, ситуација ће се за мало променити, јер је тада потребно 2 новчића од 5 динара, а новчића од 2 динара ће тада бити $(2024 - 2 \cdot 5) : 2 = 2014 : 2 = 1007$, што ће укупно бити 1009 новчића. Најмање новчића ће бити ако је већина новчића од 5 динара. Највећа сума која се може исплатити новчићима од 5 динара је 2020 динара и тада има $2020 : 5 = 404$ новчића од 5 и 2 новчића од 2 динара, што је $404 + 2 = 406$ новчића.
51. Ако се бројеви разликују за 222, онда је реч о бројевима x и $x + 222$. Њихов збир је $x + x + 222 = 2 \cdot x + 222 = 2024$. Следи да је $2 \cdot x = 2024 - 222 = 1802$, па је $x = 1802 : 2 = 901$ и тражени бројеви су број 901 и $901 + 222 = 1123$.
52. Ако је реч о дељењу $a : b = c$, онда је дељеник a једнак $b \cdot c$. Из услова задатка задатка је $a + b + c = 2024$ и $b + c = 408$. Следи да је дељеник $a = 2024 - 408 = 1616$. То значи да је $a = b \cdot c = 1616$. Како је $1616 = 4 \cdot 404$, а $4 + 404 = 408$, реч је о једнакостима $1616 : 4 = 404$ или $1616 : 404 = 4$.
53. Збир дужина страница датих троуглова је је 2024 cm. Обим дате фигуре садржи по 3 странице сваког од троуглова, па је обим дате фигуре једнак $3 \cdot 2024 = 6072$ cm.



54. Збир обима два унакрсна правоугаоника једнак је обиму великог правоугаоника, а то је $1560 + 1440 = 3000$. Збир $O + 2024$ је такође једнак обиму великог правоугаоника, а то значи једнак 3000. Тада је $O = 3000 - 2024 = 976$.



55. Када се помноже површине два унакрсна правоугаоника добија се да је $(b \cdot c) \cdot (a \cdot d)$ и то је једнако са $(a \cdot c) \cdot (b \cdot d)$. Тражена површина P добија се из једнакости $2024 \cdot P = 1380 \cdot 880$. Следи да је $P = 1380 \cdot 880 : 2024 = 600$.
56. Нека је страница малог квадрата x . Када се његова страница увећа за 4 cm, његова површина се увећа за $4x + 16 + 4x$ (види слику). Следи да је $4 \cdot x + 16 + 4 \cdot x = 2024$, па је $8 \cdot x = 2024 - 16$, односно $8 \cdot x = 2008$. Тада је $x = 2008 : 8 = 251$ cm. Обим малог квадрата је $4 \cdot 251 = 1004$ cm, а обим великог квадрата је $4 \cdot 255 = 1020$ cm.



2028	2021	2026
2023	2025	2027
2024	2029	2022

57. Тражени магични квадрат је добијен тако што је свако поље магичног квадрата (1, 2, ..., 8, 9) увећано за 2000 (види претходну слику десно). Наравно, то је само једно од могућих решења.
58. Једно од могућих решења је конструисано коришћењем претходног магичног квадрата симетричним пресликавањем бројева (види наредну слику лево).

2024	2029	2022
2023	2025	2027
2028	2021	2026

2023	2028	2021
2022	2024	2026
2027	2020	2025

59. Тражени магични квадрат је конструисан тако што је у претходном магичном квадрату број у сваком пољу број умањен за 1 (види претходну слику десно).
60. Не постоји, јер централни број магичног квадрата је увек једнак трећини карактеристичног збира, па како 2024 није дељиво са 3, то није могуће.
61. Цифра А се појављује на месту јединица, десетица, стотина и хиљада и не може бити већа од 1, јер би тада коначни збир био најмање 2222. Дакле $A = 1$. Како је $2024 - 1111 = 913$, то је $B + BC + BCD = 913$. Следи да је $B = 8$, јер би у супротном BBB било 999 или 777, 666 ... што није могуће. Сада је $913 - 888 = 25$, па је $C + CD = 25$ и добија се да је $C = 2$ и $D = 3$. Коначно је $1823 + 182 + 18 + 1 = 2024$.
62. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, цифра А може бити само 2. Тада је $A \cdot A \cdot AA \cdot AB = 2 \cdot 2 \cdot 22 \cdot 23 = 2024$, па је $B = 3$.
63. Из $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ следи да је $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 23 = 44 \cdot 46 = 2024$ решење ребуса, тј $A = 4$, $B = 6$.
64. Како је $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 44 \cdot 46 = 88 \cdot 23$, то имају четири решења:
 $11 + 11 + \dots + 11 = 2024$ (184 сабирка);
 $22 + 22 + \dots + 22 = 2024$ (92 сабирка);
 $44 + 44 + \dots + 44 = 2024$ (46 сабирака);
 $88 + 88 + \dots + 88 = 2024$ (23 сабирка).

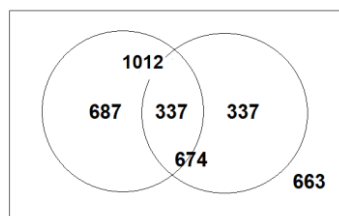
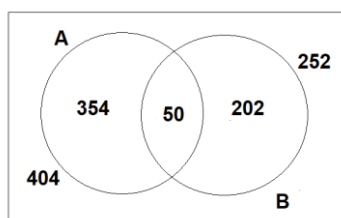
65. Из једнакости $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 23 \cdot 88 = 46 \cdot 44 = 92 \cdot 22$ следи да једнакост $AB + AB + \dots + AB = 2024$ има три решења:
 $23 + 23 + \dots + 23 = 2024$ (88 сабирака);
 $46 + 46 + \dots + 46 = 2024$ (44 сабирка) и
 $92 + 92 + \dots + 92 = 2024$ (22 сабирка).
66. Ако је $ABC + ABC + \dots + ABC = 2024$, онда су могуће следеће три ситуације:
 $506 + 506 + \dots + 506 = 2024$ (4 сабирка);
 $253 + 253 + \dots + 253 = 2024$ (8 сабирака);
 $184 + 184 + \dots + 184 = 2024$ (11 сабирка).
 Дакле, дати израз има најмање 4, а највише 11 једнаких троцифрених сабирака.
67. Јасно је да је у палиндрому ABBA цифра A = 1. Тада је $1BB1 + CDC = 2024$, па је цифра C = 3 и следи да је $1BB1 + 3D3 = 2024$. Закључујемо да је B једнако 6 или 7. Ако је B = 6 добија се да је $3D3 = 2024 - 1661 = 363$, а ако је B = 7, онда је $3D3 = 2024 - 1771 = 253$. Други случај не долази у обзир, јер 253 није палиндром, па је једино решење $1661 + 363 = 2024$.
68. Ако је $ABBC - CDC = 2024$, онда је цифра A једнака 2 или 3. Када је A = 2, добија се једнакост $2BB2 - CDC = 2024$, или $CDC = 2BB2 - 2024$, па је C = 8. Тада је $2BB2 = 2024 + 8D8$ и цифра B је једнака 8 (ако нема преноса на месту десетица) и једнака $8 + 1 = 9$ (ако има преноса на месту десетица). Следи да је $2882 - 8D8 = 2024$, па је $2882 - 2024 = 858$ (једно решење). Или $2992 - 8D8 = 2024$, тј. $2992 - 2024 = 968$ (што није решење јер број 968 није палиндром).
- Ако је A = 3, онда је $3BB3 - CDC = 2024$, па је цифра C = 9. Тада се добија да је $3BB3 - 2024 = 9D9$ или $3BB3 = 2024 + 9D9$. Јасно је да је тада B = 0, па се добија да је $3003 = 2024 + 9D9$ и $9D9 = 3003 - 2024 = 979$ (што јесте решење). Коначно, има два решења: $2882 - 858 = 2024$ и $3003 - 979 = 2024$.
69. Највећи број - палиндром који се садржи у 2024 је 88. То значи да је најмање сабирака ако је збир $88 + 88 + \dots + 88 = 2024$, а тада има $2024 : 88 = 23$ сабирка.

70. Најмањи број – палиндром који се садржи у 2024 је 11. То значи да је највише сабирака ако је збир $11 + 11 + \dots + 11 = 2024$, а тада има $2024 : 11 = 184$ сабирака.
71. Да би се исписали сви природни бројеви од 1 до 2024, потребно је написати 9 једноцифрених бројева (9 цифара), 90 двоцифрених (180 цифара), 900 троцифрених (2700 цифара) и $2024 - 999 = 1025$ четвороцифрених бројева ($1025 \cdot 4 = 4100$ цифара). Укупно је то $9 + 180 + 2700 + 4100 = 6989$ цифара.
72. Да би се написали сви једноцифрени бројеви потребно је 9 цифара, а за 90 двоцифрених бројева треба 180 цифара. Преостаје још $2024 - 189 = 1835$ цифара. Како је $1835 : 3 = 611$ (2), последњи написани троцифрени број је $9 + 99 + 611 = 719$. Преостале две цифре припадају броју 720, па је 2024. цифра – цифра 2.
73. Марко ће нумерисати 719 страна и преостаће му две цифре за 720 страну, што значи да су две последње цифре 7 и 2.
74. Петар је за нумерисање кућа на парној страни улице употребио 4 једноцифрена парна, 45 двоцифрених парних бројева и 450 троцифрених парних бројева. За то исписивање је употребљено укупно $4 + 45 \cdot 2 + 450 \cdot 3 = 4 + 90 + 900 = 994$ цифре. Преосталих $2024 - 994 = 1030$ цифара ће се употребити за четвороцифрене парне бројеве, а њих ће бити $1030 : 4 = 257$ (2). Тада на парној страни улице има $4 + 45 + 450 + 257 = 499 + 257 = 756$ кућа и преостаће 2 цифре.
75. Лаза је требао да добије број $2024 \cdot x + 2023$, а он је израчунао број $2023 \cdot x + 2024$. Како је $2024 \cdot x + 2023 = 2023 \cdot x + 2024$, следи да је $2024 \cdot x - 2023 \cdot x = 2024 - 2023 = x$, па је $x = 1$.
76. Нека је $A = 2024 + 2023 + 2022 + 2021 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$. Ако се удруже по два узастопна броја добија се да је $A = (2024 + 2023) + (2022 + 2021) + \dots + (4 + 3) + (2 + 1)$, онда је А збир 1012 непарних бројева, па је А паран број.
Друго решење: Ако се примени Гаусов поступак и удруже се први и последњи, други и претпоследњи ... сабирак добиће се 1012 сабирака од којих је сваки 2025, па је збир $A = 1012 \cdot 2025$ и А је паран број.

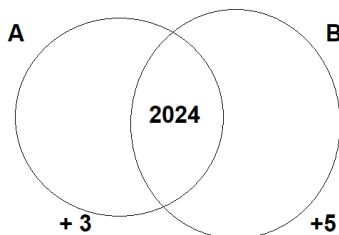
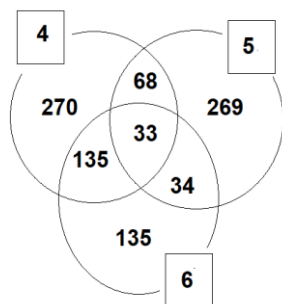
77. Нека је $X = 2024 - 2023 - 2022 + 2021 + 2000 - 1999 - 1998 + 1997 + \dots + 4 - 3 - 2 + 1$. Тада је $X = 2024 + 2021 - 2023 - 2022 + 2000 + 1997 - 1999 - 1998 + \dots + 4 + 1 - 3 - 2$. Када се израчуна вредност израза за свака четири узастопна броја добија се 0, па је најмања вредност израза $0 + \dots + 0$ (506 нула). Значи да је $X = 0$.
78. а) Ако је $A = (2024 - 2023 + 2022 - 2021) - (2000 - 1999 + 1998 - 1997) + \dots + (8 + 7 - 6 - 5 + 4 - 3 - 2 - 1) = (1 + 1) - (1 + 1) + \dots + (1 + 1) - (1 + 2) = 2 - 2 + 2 - 2 + \dots + 2 - 2 + (19 - 17) = 2$. Како у свакој од 504 заграде има по 4 броја, то има 252 заграде, од којих се добија 252 пара $2 - 2 = 0$, па је збир тих вредности 0 у последњој загради вредност израза је 2, па је и коначна вредност израза A једнака 2.
- б) Ако је збир свих бројева испред којих је знак плус једнака X , а збир бројева испред којих стоји знак минус једнака Y , онда је $X + Y$ паран број (види задатак 76), а $X - Y$ би требало бити 1, што је немогуће јер збир два природна броја и њихова разлика су исте парности.
- в) Може (пример) $2024 - 2023 + 2022 - 2021 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1 = 1 + 1 + \dots + 1$. Како има 1012 парова суседних бројева и разлика сваког пара бројева је 1, то је збир свих тих разлика 1012.
79. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, то је број дељив са 2, 11 и 23 и сложен је.
80. Сви делиоци броја 2024 су 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024 и има их тачно 16.
81. а) Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, то број 2024 може бити производ пет простих бројева, али не може бити производ пет различитих простих бројева.
- б) Ако је збир пет простих бројева a, b, c, d и e једнак 2024, онда је бар један од њих паран, јер у случају да су сви непарни и њихов збир би био непаран. Нека је прост број $e = 2$. Тада је $a + b + c + d = 2022$. Један од простих бројева мањих од 2022 је број 2011, па је, на пример $d = 2011$. Тада је $a + b + c = 2022 - 2011 = 11 = 2 + 2 + 7$, па се у случају да прости бројеви могу бити једнаки добија да је $2 + 2 + 2 + 7 + 2011 = 2024$.
- Ако сви бројеви морају бити различити и ако је $d = 2003$, онда је $a + b + c = 2022 - 2003 = 19$, онда је $2 + 3 + 5 + 11 + 2003 = 2024$, што значи да постоји пет простих бројева чији је збир једнак 2024 (били неки од њих међусобно једнаки или различити).

82. Већи је збир парних делилаца, јер је $1 + 11 + 23 + 253 = 278$, што је мање од $506 < 1012 < 2024$, а поготову од збира свих парних делилаца.
83. Како је $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$, то је производ $2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$ и $2 \cdot 23 = 46$ једнак 2024, а бројева 44 и 46 су два узастопна парна броја. Њихов збир је $44 + 46 = 90$.
84. Има више решења, јер се број 2024 може на више начина написати као производ три природна броја: $1 \cdot 1 \cdot 2024$; $1 \cdot 2 \cdot 1012$; $1 \cdot 4 \cdot 506$; $1 \cdot 8 \cdot 253$; $1 \cdot 11 \cdot 184$; $1 \cdot 22 \cdot 92$; $1 \cdot 23 \cdot 88$; $1 \cdot 44 \cdot 46$; $2 \cdot 2 \cdot 506$; $2 \cdot 4 \cdot 253$; $2 \cdot 11 \cdot 92$; $2 \cdot 22 \cdot 46$; $2 \cdot 23 \cdot 44$; $4 \cdot 11 \cdot 46$; $4 \cdot 22 \cdot 23$; $8 \cdot 11 \cdot 23$.
85. Највише подударних квадрата ће се добити, ако је страница квадрата једнака 1, јер ће тада његова површина бити 1 cm^2 и таквих ће бити 2024 квадрата. Ако је страница квадрата 2, онда ће његова површина бити 4 cm^2 и таквих квадрата ће бити $2024 : 4 = 506$, што је и најмањи могући број подударних квадрата. Напомена: Странице тог правоугаоног листа папира морају бити веће или једнаке 2 cm.
86. Ако је мерни број дужине правоугаоника двоцифрен број то може бити само број 11, 22, 23, 44. Тада су димензије правоугаоника: (11, 184); (22, 92); (23, 88) и (44, 46). Значи да таквих правоугаоника има 4.
87. Користећи таблицу простих бројева добија се да су неке од тражених двојки: $7 + 2017 = 13 + 2011 = 31 + 1993 \dots$
88. Ако је збир три проста броја 2024, онда је један од њих паран, јер у случају да су сви непарни њихов збир ће бити непаран и не може бити 2024. Ако је један од тражених бројева 2, онда је збир преостала 2 једнак 2022, па $11 + 2011 = 2022$ или $5 + 2017 = 2022$. Нека од тражених решења су $2 + 5 + 2027 = 2 + 11 + 2011 = 2024$.
89. Не може, јер је један од сабирака паран (видети претходни задатак).
90. Најмање два, на пример $13 + 2011$ или $7 + 2017$.
Највише $2 + 2 + \dots + 2 + 2 + 2 = 2024$, где је број сабирака 1012.
Колико би сабирака било ако они морају бити различити?

91. Ако је збир четири проста број a , b , c и d једнак 2024, онда су бар два од њих непарни, јер када би сви били парни, њихов збир би био 8, а не 2024. Нека је највећи од њих број $d = 2003$. Онда је $a + b + c + d = a + b + c + 2003 = 2024$, па је $a + b + c = 2024 - 2003 = 21 = 3 + 5 + 13$. Постоје четири различита проста броја чији је збир 2024 (на пример 3, 5, 13, 2003).
92. Нека је НЗД $(88, n) = d$. Тада је $88 = a \cdot d$ и $n = b \cdot d$. Из једнакости $a \cdot d = 88$ следи да је $d \in \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88\}$. Тада је НЗС $(88, n) = a \cdot b \cdot d = 88 \cdot b = 2024$ и $b = 23$. Одговарајуће вредности за n су $n = b \cdot d$, па је $n \in \{23, 46, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024\}$.
93. Ако су тражени бројеви $m = a \cdot d$ и $n = b \cdot d$, где је $d = \text{НЗД}(m, n)$. Онда је НЗС $(m, n) = a \cdot b \cdot d = 2024$. Тада је $d \in \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024\}$ и производ бројева $a \cdot b \in \{2024, 1012, 506, 253, 184, 92, 88, 46, 44, 23, 22, 11, 8, 4, 2, 1\}$.
94. Нека су тражени природни бројеви $m = a \cdot d$ и $n = b \cdot d$, где број $d = \text{НЗД}(m, n)$ није 1. Онда је НЗС $(m, n) = a \cdot b \cdot d$, па се добија једнакост $\text{НЗД}(m, n) \cdot \text{НЗС}(m, n) = d \cdot a \cdot b \cdot d = m \cdot n = 2024$. Могуће вредности за m и n су: $(m, n) \in \{(1, 2024), (2, 1012), (4, 506), (8, 253), (11, 184), (22, 92), (23, 88), (44, 46), (46, 44), (88, 23), (92, 22), (184, 11), (253, 8), (506, 4), (1012, 2), (2024, 1)\}$.
95. Нека је број учесника тог научног скупа $8x$. Тада се $5x$ учесника бави математиком, а $4x$ учесника бави информатиком. Ако се у учесника бави и математиком и информатиком, онда је $5x - y + y + 4x - y = 8x$, па је $9x - y = 8x$, тј. $x = y = 2024 : 8 = 253$. Дакле и математиком и информатиком се бави 253 научника.
96. Сви подскупови скупа A су: $\emptyset$, $\{2023\}$, $\{2024\}$, $\{2025\}$, $\{2023, 2024\}$, $\{2023, 2025\}$, $\{2024, 2025\}$ и $\{2023, 2024, 2025\}$ и има их 8.
97. Из услова задатка скуп $A = \{5, 10, \dots, 2015, 2020\}$ и има тачно $2020 : 5 = 404$ елемента, а скуп $B = \{8, 16, \dots, 2008, 2016\}$ и има $2016 : 8 = 252$ елемента. Скуп $A \cap B$ чине бројеви који су дељиви и са 5 и са 8, па је $A \cap B = \{40, 80, \dots, 1960, 2000\}$ и таквих бројева има $2000 : 40 = 50$. Тада скуп $A \cup B$ има $404 - 50 + 252 = 656 - 50 = 606$ елемената. Скуп $A \setminus B$ има $404 - 50 = 354$ елемента, а скуп $B \setminus A$ има $252 - 50 = 202$ елемента (слика лево).



98. У скупу $S = \{ 1, 2, 3 \dots 2023, 2024 \}$ има 1012 бројева који су дељиви са 2, 674 бројева који су дељиви са 3 и 337 бројева који су дељиви и са 2 и са 3 (дељиви са 6). Дакле бројева који су дељиви са 2 или 3 има $1024 + 674 - 337 = 1361$. То значи да бројева који нису дељиви ни са 2, ни са 3 има $2024 - 1361 = 663$ (слика десно).
99. У датом скупу $S = \{ 1, 2, 3 \dots 2023, 2024 \}$ има 506 бројева који су дељиви са 4; 404 броја који су дељиви са 5 и 337 бројева дељивих са 6. Бројева који су дељиви са 4 и 5, (дакле са 20) има 101; бројева који су дељиви са 4 и 6 (дакле са 12) има 168 и бројева који су дељиви са 5 и 6 (дакле са 30) има 67. Бројева који су дељиви и са 4, и са 5 и са 6 (дакле са 60) има 33. Следи да тражени скуп има $506 + 404 + 337 - 101 - 168 - 67 + 33 = 944$ броја (слика лево).



100. Ако је $A \cap B = \{2024\}$, онда је збир бројева у скупу $A \setminus B$ једнак $2027 - 2024 = 3$, а збир бројева у скупу $B \setminus A = 2029 - 2024 = 5$. Тада постоје две могућности. У скупу $A \setminus B$ је само број 3 и у скупу $A \setminus B$ су бројеви 1 и 2. Онда су у пром случају у скупу $B \setminus A$ бројеви 1 и 4 или сам број 5, а у другом случају само број 5. Постоје три различита решења: $A = \{ 2024, 3 \}$, $B = \{ 2024, 1, 4 \}$; $A = \{ 2024, 3 \}$, $B = \{ 2024, 5 \}$; $A = \{ 2024, 1, 2 \}$, $B = \{ 2024, 5 \}$.
101. Збир бојева у скупу A је $1 + 2 + \dots + 2023 + 2024$ и добија се тако што се направе парови бројева $(1, 2024), (2, 2023) \dots (1012, 1013)$. Тада постоји $2024 : 2 = 1012$ парова и сваки од њих има збир 2005, па је укупан збир $1012 \cdot 2025$.

Како су скупови B и C дисјунктни (немају заједничких елемената) и збир бројева у скупу B је једнак збиру бројева у скупу C , то је збир бројева у сваком од ових скупова једнак $506 \cdot 2025$ и таква подела је могућа. Једна од могућих подела је, на пример: $B = \{ 1, 2024, 3, 2022, \dots, 1011, 1014 \}$, $C = \{ 2, 2023, 4, 2021, 6, 2019 \dots 1012, 1013 \}$ или $B = \{ 1, 2024, 2, 2023, 3, 2022, \dots, 505, 1520, 506, 1519 \}$, $C = \{ 507, 1518, 508, 1517, \dots, 1011, 1014, 1012, 1013 \}$.

102. Како је $2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23$, таква подела скупа A је могућа и има два решења:

Прво решење је $B = \{1, 8, 11, 23\}$ и $C = \{2024\}$.

Друго решење је $B = \{8, 11, 23\}$ и $C = \{1, 2024\}$.

103. Скуп A чине прости бројеви $\{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$, а скуп B прости бројеви $\{ 2, 11, 23 \}$. Тада је $A \cup B = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 23 \}$ и $A \cap B = \{ 2, 11 \}$.

104. Најмањи прави разломак је разломак $\frac{1}{2023}$, а највећи прави

разломак је $\frac{1011}{1013}$, јер је број 1013 прост. Ако гледамо било какав

разломак, онда је најмањи $\frac{1}{2023}$, а највећи $\frac{2013}{1}$.

105. Тражени разломак има облик $\frac{3n}{5n}$, па је $8n = 2024$ и $n = 253$. Тада

је тражени разломак једнак $\frac{759}{1265}$.

106. Нека је $x = \frac{14}{33}$. Тада је $33x = 14$, па је $x = 0,424242\dots$. На

непарним децималним местима је цифра 4, а на парним цифра 2. На 2024, месту иза децималог зареза је цифра 2.

107. Како је $\frac{2023}{2024} = 1 - \frac{1}{2024}$ и $\frac{2024}{2025} = 1 - \frac{1}{2025}$ и како је

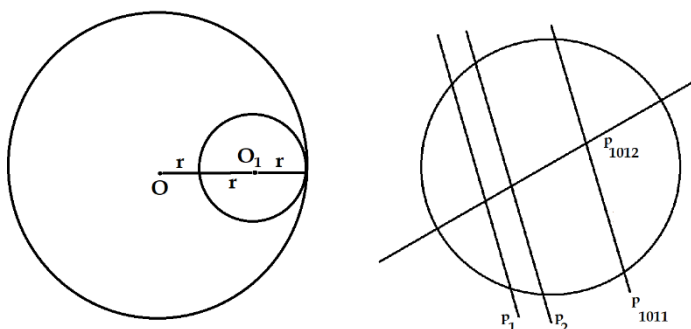
$\frac{1}{2024} > \frac{1}{2025}$ то је $\frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2025}$.

108. Како је $\frac{7}{2024} < \frac{8}{2024} = \frac{1}{253}$ и како је $\frac{3}{755} > \frac{3}{756} = \frac{1}{252}$ то важе неједнакости $\frac{3}{755} > \frac{3}{756} = \frac{1}{252} > \frac{1}{253} = \frac{8}{2024} > \frac{7}{2024}$.
109. Из релације $2023 < \frac{n+2}{3} < 2024$, се добија $6069 < n+2 < 6072$. Тада је $6067 < n < 6070$. То значи да је $n \in \{6068, 6069\}$.
110. Из неједнакости $1 \leq \frac{n+1000}{2024} < 2$, је $2024 \leq n+1000 < 4048$. Тада је $1024 \leq n < 3048$. То значи да је $n \in \{1024, \dots, 3047\}$ и таквих бројева има $3047 - 1023 = 1024$.
111. Из неједнакости $2s + 2030 < 3s + 2024 < s + 2048$, следе неједнакости $3s - 2s = s > 2030 - 2024 = 6$ и $3s - s = 2s < 2048 - 2024 = 24$, па је $s < 12$. Следи да је $6 < s < 12$. Тада је $s \in \{8, 9, 10\}$.
112. Ако је $\frac{43}{2024} < \frac{1}{p} < \frac{5}{36}$, онда је $\frac{36}{5} < p < \frac{2024}{43}$. Тада је $8 \leq p \leq 47$ и $p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.
113. Осмина броја 2024 је 253, а једанаестина броја 253 је 23. Четвртина броја 2024 је 506, а двадесет други део броја 506 је 23. То значи да су дефинисани бројеви једнаки.
114. Прва основна школа је добила $2024 : 4 = 506$ лопти. Преостало је $2024 - 506 = 1518$ лопти. Друга основна школа добила $1518 : 3 = 506$ лопти. Трећа основна школа је добила половину од остатка $2024 - 506 - 506 = 1012$ лопти, а то је $1012 : 2 = 506$ лопти. Следи да је четврта основна школа добила $2024 - 506 - 506 - 506 = 506$ лопти, што значи да су све школе добиле исти број лопти.
115. Воја је Лазару поклонио $2024 : 8 = 253$ динара и њему је остало $2024 - 253 = 1771$ динар. Лени је поклонио $2 \cdot (1771 : 11) = 2 \cdot 161 = 322$ динара и остало му је $1771 - 322 = 1449$ динара. Нини је поклонио $3 \cdot (1449 : 23) = 2 \cdot 63 = 126$ динара. То значи да је Воји остало $1449 - 126 = 1323$ динара.
116. Тражени број је $\frac{2024}{2023} + 1 = \frac{2024}{2023} + \frac{2023}{2023} = \frac{4047}{2023}$.

117. Из $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 2024$, следи $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2024}$. Тада је $\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2024}$
и $\frac{1}{x} = \frac{2024 - 1}{2024} = \frac{2023}{2024}$. Следи да је $x = \frac{2024}{2023}$.
118. Нека је $2024,20242024 \dots = a$. Тада је $10\,000 \cdot a = 20242024,2024 \dots$ што значи да је $10\,000a - a = 9\,999a = 20242024,20242024 \dots - 2024,20242024 \dots = 20240000$. Решавањем добијене једначине, следи да је $a = \frac{20240000}{9999} = \frac{11 \cdot 1840000}{11 \cdot 909} = \frac{1840000}{909} \dots$
119. Како у кеси има 1012 парних и 1012 непарних бројева шансе су једнаке.
120. Збир 24 се може добити на 11 начина ($1 + 23, 2 + 22, \dots, 11 + 13$). Број 2024 се може добити као збир $1011 + 1013 = 1010 + 1014 = \dots = 636 + 1388 = 635 + 1389 = 2024$, а то значи на $1011 - 634 = 377$ начина. Према томе веће шансе има да се добије збир 2024.
121. Дата игра није поштена, јер из скупа $\{2, 3, 4 \dots 2023, 2024\}$ се могу издвојити бројеви 4, 6, 8 $\dots$ 2022, 2024 коју су парни и сложени и којих има 1011. Ако се овим бројевима додају бројеви 9, 15 и 21 који су такође сложени, може се закључити да сложених бројева има више од $1011 + 3 = 1014$. То значи да игра није поштена - Драган ће увек имати више бодова од Вељка, јер има више сложених него простих бројева.
122. Нека је $2024 + n = \text{ABBA}$. Најмања могућа вредност за n добиће се ако је ABBA најмањи могући четвороцифрени палиндром, већи од 2024, а то је 2112. Значи да је најмања могућа вредност $n = 2112 - 2024 = 88$.
123. Нека је $2024 + n = \text{ABCBA}$. Највећа могућа вредност за n добиће се ако је ABCBA највећи могући петоцифрени палиндром, већи од 2024, а то је 99999. Значи да је највећа могућа вредност $n = 99999 - 2024 = 97975$.
124. Број 2024 се може представити као збир двоцифреног и четвороцифреног палиндрома или као збир троцифреног и четвороцифреног палиндрома. Дакле, $2024 = \text{AA} + \text{BCCB}$ или $\text{ABA} + \text{CDDC}$. За први случај постоји само једно решење $2002 + 22 = 2024$.

У другом случају је $2024 = ABA + 1DD1$, па је $A + 1 = 4$, тј. $A = 3$ и добија се да је $2024 = 3B3 + 1DD1$. Број D може бити 6 или 7. Ако је $D = 6$, једнакост би била $3B3 + 1661 = 2024$, па би $3B3 = 2024 - 1661 = 363$. Ако је $D = 7$, онда је $3B3 = 2024 - 1771 = 253$, што није могуће. Једина могућа решења су: $22 + 2002 = 363 + 1661 = 2024$.

125. Нека је $ABA + BCB + CDC = 2024$. Тада је $100(A + B + C) + 10(B + C + D) + A + B + C = 2024$. То значи да се збир $A + B + C$ завршава цифром 4, па постоје три могућности: 4, 14, 24. Прва отпада јер би тада збир три палиндома био мањи од 1000. Трећи отпада јер би тада збир три палиндома био већи од $2400 > 2024$. Ако је $A + B + C = 14$, онда је $100(A + B + C) + 10(B + C + D) + A + B + C = 1400 + 10(B + C + D) + 14$, па је и овај случај немогућ јер би добијени збир био мањи од $1414 + 10(B + C + D)$ а то је мање од $1414 + 10(14 + 9) = 1414 + 230 = 1644 < 2024$. Одговор је не може.
126. Како је $2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 44 \cdot 46 = 88 \cdot 23$, то постоје 4 различита решења: $11 + 11 + \dots + 11$ (184 сабирка), $22 + 22 + \dots + 22$ (92 сабирка), $44 + 44 + \dots + 44$ (46 сабирака) и $88 + 88 + \dots + 88$ (23 сабирка).
127. На 2025 делова.
128. На $2024 \cdot 2 = 4048$ делова.
129. Могу. На пример, ако се 2023 тачке налазе на једној правој, а једна тачка је изван те праве.
130. Број дужи је $2024 \cdot 2023 : 2 = 1012 \cdot 2023 = 2\,047\,276$.
131. Ако је дато n тачака у равни, онда је тим тачкама одређено $n(n - 1) : 2 = 2024$ дужи. Тада је $n(n - 1) = 4048 = 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23$. Како се број 4048 не може представити као производ два узастопна природна броја такав број n не постоји.
132. Нека су ивице траженог квадрата 2 cm, 2 cm и x cm. Тада је његова површина једнака $2(2 \cdot 2 + 2 \cdot x + 2 \cdot x) = 2024$. Тада је $4 + 4x = 1012$, па је $4x = 1008$ и $x = 252$ cm, при чему ваља нагласити да су могуће су и друге комбинације димензија.
133. Тражено растојање је 1012 cm.
134. Нека је полупречник мање кружнице једнак r . Тада је полупречник веће кружнице $3r$. Растојање између центара тих кружница је $OO_1 = 2r = 2024$, па је $r = 2024 : 2 = 1012$ cm. Тражени полупречници су 1012 cm и 3036 cm (види наредну слику лево).



135. Може. На пример, треба изабрати 1011 паралелних правих од којих свака сече дати круг. И још једну 1012. праву која сече сваку од претходно уочених правих и такође сече круг (види претходну слику десно).
136. Како је $2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23$, то тражени квадрати могу имати ивице 8 cm, 11 cm и 23 cm или 2 cm, 23 cm и 44 cm. Постоје и друга решења.
137. Ако је једна страна квадрата квадрат, онда постоје две могућности. Прва је да су две ивице квадрата 1 cm и тада је трећа ивица квадрата $2024 : 1 = 2004$ cm. Друга да су две ивице квадрата 2 cm и трећа ивица квадрата је $2024 : 4 = 506$ cm. Површина првог квадрата је $2(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2024 + 1 \cdot 2024) = 2 \cdot 4049 = 8098 \text{ cm}^2$, а површина другог квадрата је $2(2 \cdot 2 + 2 \cdot 506 + 2 \cdot 506) = 2 \cdot 2028 = 4056 \text{ cm}^2$.
138. Ако коцка има ивицу 1 cm, онда је њена запремина 1 cm^3 и таквих коцки има 2024. Ако је ивица коцке 2 cm, онда је њена запремина 8 cm^3 и таквих коцки има $2024 : 8 = 253$. И то су сва решења, јер број 2024 је дељив само са 1^3 и 2^3 .
139. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ и како је збир свих његових 12 ивица 168 cm, то је збир његове три димензије $168 : 4 = 42$ cm. Чињеница је да је збир $8 + 11 + 23 = 42$ cm, па су димензије траженог квадрата 8 cm, 11 cm и 23 cm. Површина тог квадрата је $2 \cdot (8 \cdot 11 + 11 \cdot 23 + 23 \cdot 8) = 1050 \text{ cm}^2$.
140. Из једнакости $2024 : 60 = 33(40)$ следи да дати угао од 2024 минута има 33° и 44 минута. Према томе дати угао је оштар.
141. Из претходног задатка је $2024' = 33^\circ 44'$, Угао α који је комплементан са датим углом је $90^\circ - 33^\circ 44' = 56^\circ 16'$, а угао β који је суплементан са датим је $90^\circ + 56^\circ 16' = 146^\circ 16'$.

142. Ако је $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\alpha - \beta = 33^\circ 44'$, онда је $\beta + 33^\circ 44' + \beta = 90^\circ$, па је $2\beta = 56^\circ 16'$. Добија се да је $\beta = 28^\circ 8'$ и $\alpha = 61^\circ 52'$.
143. Ако је $\alpha + \beta = 180^\circ$, а $\alpha - \beta = 33^\circ 44'$, онда је $\beta + 33^\circ 44' + \beta = 180^\circ$, па је $2\beta = 146^\circ 16'$. Добија се да је $\beta = 73^\circ 8'$ и $\alpha = 106^\circ 52'$.
144. Ако је $\alpha + \beta = 180^\circ$, онда је $11\alpha + 11\beta = 11 \cdot 180^\circ = 1980^\circ$. Како је $11\alpha + 12\beta = 2024^\circ$, то је $\beta = 2024 - 1980 = 44^\circ$. Тада је $\alpha = 136^\circ$.
145. Може. На пример 2024 угла по 1° , или 1012 углова по 2° , или 506 углова по 4° , или 253 угла по 8° , или 184 угла по 11° , или 92 угла по 22° , или 88 углова по 23° , или 44 угла од 46° , или 46 углова од 44° , или 23 угла од 88° .
146. Може. На пример 22 угла по 92° .
147. Најмања вредност природних бројева m и n је 1, па је најмања вредност израза $1012m + 1013n = 1012 + 1013 = 2025 > 2024$. Значи да такви природни бројеви m и n не постоје.
148. Прости делиоци броја 2024 су 2, 11 и 23. Ако је $p = 2$, $q = 11$ и $r = 23$, онда је вредност израза $\frac{2024}{p} + \frac{2024}{q} + \frac{2024}{r} = \frac{2024}{2} + \frac{2024}{11} + \frac{2024}{23} = 1012 + 184 + 88 = 1284$, што значи да такви прости бројеви постоје.
149. Ако је $404 \cdot p + 406 \cdot q = 2024$, онда је $202 \cdot p + 203 \cdot q = 1012$. Како су бројеви $202 \cdot p$ и 1012 парни, то мора бити и број $203 \cdot q$, па је $q = 2$. Следи да је $202 \cdot p + 406 = 1012$. Решавањем једначине $202 \cdot p = 1012 - 406 = 606$, добија се да је $p = 606 : 202 = 3$.
150. Ако се у једначини $\frac{2024}{m} + \frac{2024}{n} = 90$ сваки израз прошири са $m \cdot n$, добија се једначина $2024 \cdot n + 2024 \cdot m = 90 \cdot m \cdot n$. Значи да је $2024 \cdot (m + n) = 90 \cdot m \cdot n$ или $1012 (m + n) = 45 \cdot m \cdot n$. Како су бројеви 1012 и 45 узајамно прости, то је 1012 дељиво са $m \cdot n$, а $m + n$ дељиво са 45. Број $1012 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 2 \cdot 22 \cdot 23$, а $22 + 23 = 45$, једно од решења једначине је $m = 4 \cdot 11 = 44$ и $n = 2 \cdot 23 = 46$, јер је $1012 \cdot 90 = 2 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 45 = 45 \cdot 44 \cdot 46$.
151. а) Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ и има 16 делилаца, то се 2024 може на осам начина приказати као производ два природна броја: $1 \cdot 2024 = 2 \cdot 1012 = 4 \cdot 506 = 8 \cdot 253 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 23 \cdot 88 = 44 \cdot 46$.

- б) Ако има три природна броја има и више начина: $1 \cdot 1 \cdot 2024 = 1 \cdot 2 \cdot 1012 = 1 \cdot 4 \cdot 506 = 1 \cdot 8 \cdot 253 = 1 \cdot 11 \cdot 184 = 1 \cdot 22 \cdot 92 = 1 \cdot 23 \cdot 88 = 1 \cdot 44 \cdot 46 = 2 \cdot 2 \cdot 506 = 2 \cdot 4 \cdot 253 = 2 \cdot 11 \cdot 92 = 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2 \cdot 23 \cdot 44 = 4 \cdot 11 \cdot 46 = 4 \cdot 22 \cdot 23 = 8 \cdot 11 \cdot 23$ – укупно 15.
152. Број 2024 има 16 делилаца. Непарни су само 1, 11, 23 и 253, а парних делилаца има $16 - 4 = 12$.
153. Број $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30$ је дељив са 2024, јер је дељив бројевима 8, 11 и 23.
154. Нека су тражени бројеви m и n и нека је њихов НЗД једнак d . Тада је број $m = a \cdot d$ и $n = b \cdot d$ и НЗС за бројеве m и n је $s = a \cdot b \cdot d = 1012$ (a и b су узајамно прости). Тада је производ бројева $m \cdot n = a \cdot d \cdot b \cdot d = 2024$. То значи да је 2024 дељиво са $d \cdot d$, па је $d = 1$ или $d = 2$. Ако је $d = 1$, онда је $a \cdot b = 2024$, што је немогуће, јер је тада $s = a \cdot b \cdot 1 = 1012$.
Ако је $d = 2$, онда је $s = a \cdot b \cdot 2 = 1012$, па је $a \cdot b = 506$. Могућа решења за пар (a, b) су: (1, 506), (2, 253), (11, 46), (22, 23), што значи да постоји 4 пара бројева m и n који испуњавају услове задатка: (2, 1012); (4, 506); (22, 92); (44, 46).
155. Два од много могућих решења су:
 $8 \cdot (6 + 9 - 1 - 3) \cdot (2 \cdot 7 + 4 + 5) + 0 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$;
 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + (6 \cdot 5 + 2) : (1 + 3) + 0 = 2016 + 8 = 2024$.
156. Нека од могућих решења су:
а) $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + \dots + 2021 - 2022 - 2023 + 2024 = 0$ (збир свака 4 узастопна броја је 0, па је збир свих тих удружених четворки нула);
б) $1 + 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 - \dots - 2021 - 2022 + 2023 + 2024 = 2024$ (збир свака 4 узастопна броја је 4), па пошто тако четворки има 506, збир свих тако удружених бројева ће бити $4 \cdot 506 = 2024$.
157. Како је $a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2021 - 2022 + 2023 - 2024 = -1 - 1 - 1 - \dots - 1$ и како таквих парова има $2024 : 2 = 1012$, то је тражена вредност броја $a = -1012$.
Слично је $b = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 2022 - 2024 = -2 - 2 - 2 \dots - 2$ и како таквих парова има $1012 : 2 = 506$, то је $b = -2 \cdot 506 = -1012$. Према томе, $a = b = -1012$.

158. Ако сваки члан датог низа саберемо са 79, онда се добија низ 3, 6, 9 ... 2100, 2103. Ако елементе добијеног низа поделимо са 3, добија се низ 1, 2, 3, ..., 700, 701.
159. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = x \cdot x \cdot y$, то значи да је број 2024 дељив са $x \cdot x$, па је $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$ и $(x \cdot x) \in \{1, 4\}$. Тада је $|y| \in \{2024, 506\}$ и тада је $y \in \{-2024, -506, 506, 2024\}$. Ако је уређени пар (x, y) решење дате једначине, онда су сва решења једначине: $(x, y) \in \{(-1, -2024), (1, -2024), (-1, 2024), (1, 2024), (-2, -506), (2, -506), (-2, 506), (2, 506)\}$ и има их 8.
160. Може. Збир бројева у сваком од 100 дисјунктних скупова је 0. На пример: $\{-1, 0, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\} \dots \{-99, 99\}, \{-100, 100, -101, 101, -102, 102 \dots -2023, 2023, -2024, 2024\}$.
161. а) Ако је $m : n = -506$, онда су m и n различитог знака и њихов производ не може бити позитиван, тј. не може бити 2024, већ само -2024 . б) Ако је $m : n = -506$, онда је $m = -506n$ и тада је $mn = -506n \cdot n = -506n^2$. Тада је $-506n^2 = -2024$, па је $n \cdot n = 4$, што значи да n може бити или 2 или -2 . Дакле, производ може бити $-2024 = 1012 \cdot (-2) = (-1012) \cdot 2$.
162. Погледај задатак 151.
- а) Број 2024 се може на 8 начина написати као производ два природна броја. У скупу целих бројева, сваки од случајева $x \cdot y$ има свој одговарајући случај $(-x)(-y)$, а то значи да се број 2024 може на $8 + 8 = 16$ начина представити као производ два цела броја.
- б) Број 2024 се може на 15 начина написати као производ три природна броја (доказано у 151. задатку). У скупу целих бројева, сваки од случајева $x \cdot y \cdot z$ има још три одговарајућа случаја $(x)(-y)(-z)$, $(-x)(y)(-z)$, $(-x)(-y)(z)$. То значи да се број 2024 може на $15 \cdot 4 = 60$ начина представити као производ три цела броја. Од ових 60 начина треба одузети идентичне случајеве, а то су када су два чиниоца једнаки по апсолутној вредности, јер тада нема 4, већ само три одговарајућа производа, тј $1 \cdot 1 \cdot 2024 = (-1) \cdot (-1) \cdot 2024 = (-1)(-2024) \cdot 1$ и $2 \cdot 2 \cdot 506 = 2 \cdot (-2) \cdot (-506) = (-2) \cdot (-2) \cdot 506$. То значи да има укупно $60 - 2 = 58$ начина.
163. Нека су $x + 1, x + 2, \dots, x + 2024$ тражени узастопни цели бројеви. Њихов збир је $2024x + (1 + \dots + 2024) = 2024x + 2024 \cdot 2025/2 = 2024$. Ако целу једначину поделимо са 2024, следи да је $x + 2025/2 = 1$, па x није цео број. Дакле, не може.

164. Нека су $x + 1, x + 2, \dots, x + 2024$ тражени узастопни цели бројеви, Њихов збир је $2024x + (1 + 2 + \dots + 2024) = 2024x + 2024 \cdot 2025/2 = -1012$. Ако целу једнакост поделимо са 1012, добија се да је $2x + 2025 = -1$, па је $x = -1013$. Тражени збир целих бројева је $(-1012) + (-1011) + \dots + 1010 + 1011 = -1012$.
165. Ако је 0 један од 2024 броја, онда је производ бројева 0, а збир бројева различит од 0, јер су преосталих 2023 бројева 1, -1, 2, -2, ... x , $-x$ и увек ће, због непарног броја сабирака, остати бар један број који нема свој супротан број.
Ако нула није један од 2024 броја, онда су сви бројеви позитивни или сви бројеви негативни, па је њихов производ (због парног броја чинилаца) увек позитиван и увек већи од њиховог збира. То значи да не постоје 2024 узастопна цела броја чији је збир једнак њиховом производу.
166. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, то ће најмање сабирака и најмање чинилаца бити у случају $1012 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1012 + 2 + 1 + \dots + 1 = 2024$ и тада има 1012 бројева (1012, 2 и 1010 јединица). Ако је $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 2 + 2 + 2 + 11 + 23 + 1 + \dots + 1 = 2024$, онда ће бити највише 1989 сабирака и чинилаца и то су бројеви 2, 2, 2, 11, 23 и 1984 јединице.
167. Збир бројева у скупу S је $1012 \cdot 2025$, јер имамо 1012 парова чији је збир 2025 (1 и 2024, 2 и 2023, ...). То значи да збир бројева у скупу A и скупу B треба да буде $506 \cdot 2025$. То је могуће ако су на пример скупови A и B формиран на следећи начин: $A = \{1, 2024, 2, 2023, \dots, 506, 1519\}$ и $B = \{507, 1518, 508, 1517, \dots, 1012, 1013\}$.
168. а) Како је збир бројева у скупу S једнак 0, то и збир бројева у сваком од скупова A и B мора бити 0. Како је $x - (x + 1) - (x + 2) + (x + 3) = 0$, један од могућих начина формирања скупова A и B је: $A = \{0, 1, -2, -3, 4, 5, -6, -7, 8, \dots, 2021, -2022, -2023, 2024\}$ и $B = \{-1, 2, 3, -4, -5, 6, 7, -8, \dots, -2021, 2022, 2023, -2024\}$.
- б) Не може, јер 0 мора бити или у скупу A или у скупу B и тада ће производ елемената у том скупу бити 0, а у другом скупу то никако не може бити.
169. Из услова задатка је $2024 : m = n(n)$, што значи да важи једнакост $2024 = m \cdot n + n = (m + 1) \cdot n$, при чему је остатак n увек мањи од делиоца m .

Како је $2024 = 2024 \cdot 1 = 1012 \cdot 2 = 506 \cdot 4 = 253 \cdot 8 = 184 \cdot 11 = 92 \cdot 22 = 88 \cdot 23 = 46 \cdot 44$, то за пар (m, n) има 8 решења: $(2023, 1)$, $(1011, 2)$, $(505, 4)$, $(252, 8)$, $(183, 11)$, $(91, 22)$, $(87, 23)$, $(45, 44)$.

170. Вредност датог израза је 2248,8664.

171. Нека је $0,202420242024... = a$. Тада је $10\,000 \cdot a = 2024,20242024...$ што значи да је разлика $10000a - a = 9999a = 2024,20242024... - 0,20242024... = 2024$. Следи да је рационалан број $a = \frac{2024}{9999}$ или

$$a = \frac{11 \cdot 184}{11 \cdot 909} = \frac{184}{909}.$$

172. Прво решење: Број $20,2420242024...$ је 100 пута већи од броја $0,20242024...$. Према томе рационални број $20,2420242024$ је једнак $100 \cdot \frac{2024}{9999} = \frac{202400}{9999} = \frac{11 \cdot 18400}{11 \cdot 909} = \frac{18400}{909}$.

Друго решење: Нека је $20,2420242024... = a$. Тада је $100 \cdot a = 2024,202420242024...$, а $1\,000\,000a = 20242024,20242024...$ што значи да је $1\,000\,000a - 100a = 999\,900a = 20242024... - 2024,20242024... = 20240000$. Следи да је $a = \frac{18400}{909}$.

173. Нека је $b = \frac{17}{33} = 0,515151...$. Како је збир две суседне цифре у децималном запису броја b једнак $5 + 1 = 6$, то ће збир 2024 цифре иза децималног зареза бити $1012 \cdot 6 = 6072$.

174. Нека је $c = \frac{3}{7} = 0,42857142857142...$. Како се цифре 428571 периодично понављају и као је $2024 : 6 = 337(2)$ на 2024. месту иза децималног зареза биће цифра 2.

175. Ако је пробитни разломак био $\frac{5n}{13n}$, онда је $13n - 5n = 8n = 2024$. Следи да је $n = 2024 : 8 = 253$, па је разломак пре скраћивања са 253 био $\frac{5n}{13n} = \frac{1265}{3289}$.

176. Нека је $\frac{22}{23} = \frac{22m}{23m}$. Како је $22m \cdot 23m = 506 m \cdot m = 2024$, то је

$m \cdot m = 4$. Следи да је $m = 2$ и тражени разломак је $\frac{44}{46}$.

177. Из услова задатка је $\frac{2023+n}{2024-n} = 2$. Тада је $2023 + n = 4048 - 2n$.

Следи да је $n + 2n = 3n = 4048 - 2023 = 2025$, па је тражени број $n = 675$.

178. Како је $\frac{8888}{20242024} = \frac{88 \cdot 101}{88 \cdot 230023} = \frac{101}{230023}$ и како су бројеви 101

и 230023 узајамно прости, то је дати разломк после скраћивања једнак $\frac{101}{230023}$.

179. Зато што бројеви $525 = 5 \cdot 105 = 5 \cdot 5 \cdot 21$ и $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$ немају заједничких делилаца.

180. Како је $\frac{5x + 2024}{x} = 5 + \frac{2024}{x} = 5 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23}{x}$ дати разломак

се може скратити увек када је x делилац броја 2024. Како се траже двоцифрене вредности броја x , то је $x \in \{11, 22, 23, 44, 46, 88, 92\}$.

181. Из низа неједнакости $\frac{3}{133} < \frac{3}{132} = \frac{1}{44} = \frac{46}{46 \cdot 44} = \frac{46}{2024} < \frac{47}{2024}$

следи да је $\frac{3}{133} < \frac{47}{2024}$.

182. Из услова задатка је

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = 2024.$$

После могућих скраћивања бројиоца једног и имениоца наредног разломка у добијеном производу, следи да је $\frac{n+1}{2} = 2024$ и

решавањем једначине $n + 1 = 2 \cdot 2024 = 4048$, долази до коначног решења $n = 4047$.

183. Како је $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}$ вредност израза $A = 2024 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \right)$ се израчунава коришћењем једнакости $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right)$.
- Следи да је $A = 2024 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} \right) = 2024 \cdot \frac{10}{11} = 184 \cdot 10 = 1840$.
184. Из услова задатка је $\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.
- Следи да је $\frac{1}{n} = \frac{1}{2024}$, па је $n = 2024$.
185. Користимо добро познати Гаусов поступак. Из једнакости $1 + 2 + \dots + 64 = (1 + 64) + (2 + 63) + \dots + (32 + 33) = 32 \cdot 65 = 2080$ следује неједнакост $2080 > 2024$, чиме је доказ завршен.
186. Ако је n непарних бројева, онда је $1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = 2n + 2n + \dots + 2n = 2n \cdot n/2 = n \cdot n > 2024$. Како је $45 \cdot 45 = 2025$, најмањи број који задовољава добијену неједнакост је $n = 45$.
187. У једнакости $2 + 4 + \dots + 86 + 88$ има $88 : 2 = 44$ сабирка. Тада је $2 + 4 + \dots + 86 + 88 = 90 + \dots + 90$ (у збиру има 22 сабирка) и следи да је $2 + 4 + \dots + 86 + 88 = 90 \cdot 22 = 1980 < 2024$.
188. Из једнакости $\frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} + \frac{5}{6x} = 2024$ се свођењем разломака на НЗС $= 12x$ добија да је $\frac{6}{12x} + \frac{9}{12x} + \frac{10}{12x} = 2024$. Даље је $\frac{25}{12x} = 2024$, па је $12x = \frac{25}{2024}$ и $x = \frac{25}{12 \cdot 2024} = \frac{25}{24288}$.
189. У решавању ове једначине користи се једноставна чињеница да ако су два разломка једнака, онда су једнаке и њихове реципрочне вредности. Неколико узастопних примена овог тврђења омогућује поступно решавање једначине. Конкретно, из једнакости

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}}} = 2024, \text{ следи да је } 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} = \frac{1}{2024}.$$

Сада је $\frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} = 1 - \frac{1}{2024}$, па је $\frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} = \frac{2023}{2024}$. Даље је

$$1 + \frac{1}{|x|} = \frac{2024}{2023} \text{ и } \frac{1}{|x|} = \frac{2024}{2023} - 1 = \frac{1}{2023}.$$

Из последње једнакости је $|x| = 2023$, па су решења дате једначине 2023 и -2023 .

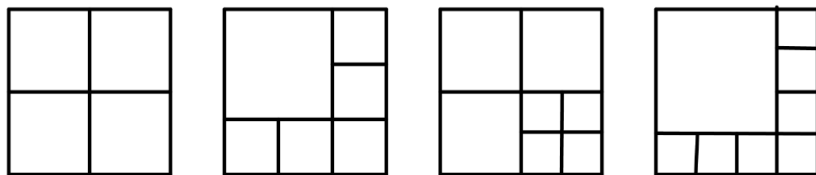
190. Збир свих решења дате неједначине је 0, јер ако је решење x , онда је и решење $-x$.
191. Производ свих решења је 0, јер је 0 једно од решења дате неједначине.
192. Ако је $|x - 1| < 2024$, онда је $-2024 < x - 1 < 2024$, што значи да је $-2023 < x < 2025$. Дати скуп садржи 2022 негативна, нулу и 2024 позитивна цела броја, што значи да дата неједначина има $2022 + 1 + 2024 = 4047$ целобројна решења.
193. Из једнакости $||x - 2024| - 2023| = 1$, је $|x - 2024| - 2023 = 1$ или $|x - 2024| - 2023 = -1$. Значи да је $|x - 2024| = 2024$ или $|x - 2024| = 2022$. Следи да вредност израза $x - 2024$ припада скупу $\{-2024, 2024, -2022, 2022\}$, па је $x \in \{0, 4048, 2, 4046\}$.
194. Круг има бесконачно много, дакле више од 2024, оса симетрије.
195. „Најмања“ таква подела је када дечаци добију 1, 2, 3 ... 62, 63, 64 кликера. Таква подела подразумева укупно најмање $1 + 2 + \dots + 62 + 63 + 64$ кликера. Како је добијени збир једнак $32 \cdot 65 = 2080$ кликера, а има 2024 кликера то предложена подела није могућа.
196. „Најмања“ таква подела је када дечаци добију 1, 2, 3 ... 61, 62, 63 кликера. Таква подела подразумева најмање $1 + 2 + \dots + 62 + 63$ кликера. Како је добијени збир једнак $31 \cdot 63 + 63 = 32 \cdot 63 = 2016$, а има 2024 кликера то је предложена подела могућа. На пример, расподела може бити $1 + 2 + \dots + 62 + 71 = 63 \cdot 31 + 71 = 2024$ кликера.

197. Укупан број иницијала је $30 \cdot 30 = 900$. Како је $2024 = 2 \cdot 900 + 224$, то на основу Дирихлеовог принципа можемо тврдити да ће бар $2 + 1 = 3$ ученика имати једнаке иницијале. Како је $2024 : 366 = 5(194)$, то бар $5 + 1 = 6$ ученика слави рођендан истог дана.
198. Сви прости бројеви се завршавају цифрама 1, 2, 3, 5, 7 и 9. Цифрама 2 и 5 се завршавају само два проста броја (2 и 5), па преостаје $2024 - 2 = 2022$ броја које треба распоредити у 4 класе. Како је $2022 = 4 \cdot 505 + 2$, то на основу Дирихлеовог принципа постоји бар $505 + 1 = 506$ простих бројева који се завршавају истом цифром.
Тврђење да постоји бар 507 простих бројева који се завршавају истом цифром није могуће, јер се може десити да су међу датим простим бројевима тачно по 506 бројева завршавају цифрама 1, 3, 7 и 9.
199. Ако је број p прост, он је облика $6k - 1$ или $6k + 1$ (јер је већи од 2024, значи већи и од 3).
Ако је p облика $6k - 1$, онда је $p - 2024 = 6k - 1 - 2024 = 6k - 2025$ који је дељив са 3 и који може бити прост само ако је $6k - 2025 = 3$, тј. $6k = 2028$ и $p = 6k - 1 = 2027$, што јесте прост број. У том случају је $p + 2024 = 2027 + 2024 = 4051$, што такође јесте прост број. Дакле такав прост број p постоји и једнак је 2027.
Ако је p облика $6k + 1$, онда је $p + 2024 = 6k + 1 + 2024 = 6k + 2025$ који је дељив са 3 и који може бити прост само ако је $6k + 2025 = 3$, тј. $6k = -2022$ и $p = 6k + 1 = -2021$. Како је број p већи од 2024 овај случај није могућ, јер не одговара условима задатка. Дакле једини такав број је $p = 2027$.
200. Нека је $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025$. Посматрамо узастопне природне бројеве $n + 2, n + 3, \dots, n + 2024, n + 2025$. Има их тачно 2024 и сви су сложени, јер је први дељив са 2, други дељив са 3, ... а 2024. дељив са 2025.
201. Прости бројеви p и q су исте парности. Како не могу бити оба парна ($2 + 2 = 4$), оба су непарна. Коришћењем таблице простих бројева може се утврдити да постоји више таквих парова. На пример: $7 + 2017 = 13 + 2011 = 31 + 1993 \dots = 2024$.
202. Из једнакости $p - 5q = 2024$, следи да је $p = 2024 + 5q$. Тада је $p > 2024$, дакле непаран. Како се број $5q$ завршава цифром 5 или 0, то се прост број p мора завршавати цифром $5 + 4 = 9$.

- Из таблице простих бројева се види да су такви прости бројеви 2029, 2039, 2069 ... Тада је $5q = 5$ или $5q = 15$ или $5q = 45$... Ако је $5q = 15$, онда је $p = 3$, па је $2039 - 5 \cdot 3 = 2039 - 15 = 2024$ и такви прости бројеви постоје.
203. Ако је $p - q = 2024$, онда је $p = 2024 + q$, па је дата једнакост могућа јер се за $q = 3, q = 5$... добијају прости бројеви $p = 2027, p = 2029$...
204. Ако је $p + 2q = 2024$, онда је p паран број, па је $p = 2$. Тада је $2q = 2024 - 2 = 2022$, па је $q = 1011$, што није прост број (дељив је са 3). Дата једнакост није могућа.
205. Ако је $2p + 3q + 4r = 2024$, онда је $3q$ паран број, па је $q = 2$. Тада једнакост постаје $2p + 6 + 4r = 2024$, па је $p + 3 + 2r = 1012$, тј. $p + 2r = 1009$. Ако је $p = 971$, онда је $2r = 1009 - 971 = 38$, па је $r = 19$. Дакле, дата једнакост је могућа, што се види из случаја $2 \cdot 971 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 19 = 1942 + 6 + 76 = 2024$.
206. Ако су сви прости бројеви p, q и r непарни онда је $pq + qr + rp$, такође, непарно и једнакост није могућа. То значи да је бар један од простих бројева p, q и r паран и претпоставимо да је $p = 2$. Тада једначина постаје $2q + qr + 2r = 2024$, па је qr парно, што значи да је или q или r парно. Нека је $q = 2$. Следи да је $pq + qr + rp = 4 + 2r + 2r = 2024$, па је $4r + 4 = 2024$ и $4r = 2020$. Сада је $r = 2020 : 4 = 505$, што није прост број и закључујемо да дата једначина нема решења.
207. Слично као и у претходном задатку, један од бројева p, q и r мора бити паран. Како је $205p + 203q + 201r = 201(p + q + r) + 4p + 2q = 2024$, то се из последње једнакости може закључити да је $p + q + r$ паран број мањи од $2024 : 201$, тј. мањи од 11. Ако је $p + q + r = 10$, онда је $4p + 2q = 2024 - 2010 = 14$, па је $2p + q = 7$. Ако је $p = 2$, онда је $q = 3$, па је онда $r = 5$. То значи да важи једнакост $205 \cdot 2 + 203 \cdot 3 + 201 \cdot 5 = 410 + 609 + 1005 = 2024$, па такви прости бројеви (2, 3 и 5) постоје.
208. Нека је број $m = \overline{abcd}$. Тада је $m + s = 1000a + 100b + 10c + d + (a + b + c + d) = 1001a + 101b + 11c + 2d = 2024$. Ако је $a = 1$, једначина постаје $101b + 11c + 2d = 2024 - 1001 = 1023$. Следи да је $b = 9$, па је $11c + 2d = 1023 - 909 = 114$. Тада је $c = 9$, па је $2d = 114 - 99 = 15$, што је немогуће јер је $2d$ мора бити паран број.

Ако је $a = 2$, једначина постаје $101b + 11c + 2d = 2024 - 2002 = 22$. Следи да је $b = 0$, па је $11c + 2d = 22$. Тада је $c = 2$ и $d = 0$. Дакле, тражени број је 2020, јер је $2020 + 4 = 2024$.

209. Нека је број $m = \overline{abcd}$. Тада је $m - s = 1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c = 2024$, што је немогуће, јер је лева стране једнакости дељива са 9, а број 2024 није дељив са 9.
210. Сваки квадрат се може конструкцијом њгових средњих линија поделити на 4 мања квадрата (види слику), чиме се број квадрата увећа за $4 - 1 = 3$. То значи да се од n квадрата увек може направити $n + 3, n + 6, \dots, n + 3k$ квадрата. На наредној слици дата су четири модела:



M1: $1 \rightarrow 4$ M2: $6 \rightarrow 3n$ M3: $7 \rightarrow 3n + 1$ M4: $8 \rightarrow 3n + 2$.

Први који показује како се од n квадрата добија $n + 3$ квадрата; други који показује како се од 6 квадрата добија $3n$ квадрата; трећи који показује како се од 7 квадрата добија $3n + 1$ квадрата; четврти како се од 8 квадрата добија $3n + 2$ квадрата. Како је 2024 број облика $3n + 2$, то значи да се дати квадрат може поделити на 2024 мања квадрата дељењем претходно добијених квадрата из модела М4 на 4 нова квадрата. Уопштено, сваки квадрат се може поделити на 4 или било који број мањих квадрата већи од 5.

211. Може. Све је исто као у преходном задатку, само треба направити моделе М1, М2, М3 и М4 за једнакостранични троугао.
212. Ако странице троугла имају дужину $a \leq b \leq c$. Онда је обим тог троугла $a + b + c = 2024$ см. Како је $a > 0$, то најмања вредност a може бити 1. Нека је $a = 1$. Тада је из неједнакости троугла $c - b < a = 1$. Дакле, $c - b = 0$, тј. $c = b$. Следи да је $c + b = 2023$, што значи да дужине страница c и b нису природни бројеви. Нека је најмања могућа дужина странице троугла $a = 2$ см. Тада постоји једнакокраки троугао чије странице имају дужину 2, 1011, 1011.

- Из неједнакости троугла $a + b > c$, следи да c мора бити мање од полуобима троугла, што значи да је $c < 1012$ cm. Дакле дужина највеће страница тог троугла може бити 1011 cm, а најмања 2 cm.
213. Један угао једнакокраког троугла је $2024' = 33^\circ 44'$. Ако је тај угао – угао на основици једнакокраког троугла, онда су углови $33^\circ 44'$, $33^\circ 44'$ и $112^\circ 32'$. Ако је тај угао – угао у врху једнакокраког троугла, онда су углови $33^\circ 44'$, $73^\circ 8'$ и $73^\circ 8'$.
214. Не може, јер ако је на пример $\alpha_1 + \beta_1 = 20224' = 33^\circ 44'$, онда би збир одговарајућих унутрашњих углова $\alpha + \beta$ био $360^\circ - 33^\circ 44' = 326^\circ 16'$, што је немогуће.
215. Не може, јер подударни троуглови имају све подударне елементе (странице, углове ...), па и обим и површину.
216. Не може, јер 2024 није дељиво са 3, па страница једнакостраничног троугла неће бити природни бројеви.
217. а) Ако је основица 8 cm, дужа од крака, онда краци тог троугла имају дужину $(2024 - 8) : 3 = 672$, а основица је $672 + 8 = 680$ cm.
б) Ако је основица 8 cm мања од крка, онда краци тог троугла имају дужину $(2024 + 8) : 3 = 2032 : 3$ и не могу бити целобројни, јер 2032 није дељиво са 3.
218. Како је $6 + 7 + 9 = 22$ и како је обим троугла 2024 cm то је $2024 : 22 = 92$ cm. Тада су странице тог троугла $6 \cdot 92 = 552$ cm, $7 \cdot 92 = 644$ cm и $9 \cdot 92 = 828$ cm.
219. Збир дужина два крака је паран број већи или једнак од 2 000 cm. Тада дужина основице такође мора бити паран број мањи или једнак $2024 - 2000 = 24$, тј. из скупа $\{2, 4, 6 \dots 22, 24\}$. Према томе, таквих једнакокраких троуглова има 12.
220. Нека је дужина основице a , а дужина крака b . Тада је обим троугла $a + 2b = 2024$, па дужина основице a мора бити паран број већи или једнак 1000. Међутим, из неједнакости троугла је $2024 = a + 2b > a + a = 2a$ и $a < 1012$. Следи да је дужина основице a из скупа $\{1000, 1002, \dots, 1008, 1010\}$ и има таквих троуглова има 6.
221. Нека је дужина основице a , а дужина крака b . Тада је обим троугла $a + 2b = 2024$, па дужина основице a мора бити паран број. Међутим, из неједнакости троугла је $2024 = a + 2b > a + a = 2a$ и $a < 1012$. Следи да је $2 \leq a \leq 1010$, па једнакокраких троуглова чији је обим 2024 cm има $1010 : 2 = 505$.

222. Нека је дужина основице a , а дужина крака b . Тада је тражени збир апсолутних вредности $|a - b| + |b - b| + |b - a| = 2|a - b|$. Најмањи могући збир апсолутних разлика његових страница је када се странице најмање разликују, а најмање ће се разликовати ако су једнаке $x, x, x + 1$ или $x, x + 1, x + 1$. У првом случају обим је $3x + 1 = 2024$ и нема решења, јер 2023 није дељиво са 3. У другом случају је обим $3x + 2 = 2024$, па је $3x = 2022$ и $x = 674$ cm. Тада су странице једнакокраког троугла 674 cm, 675 cm, 675 cm. Збир апсолутних разлика је $1 + 1 + 0 = 2$.
223. Нека је дужина основице a , а дужина крака b . Тада је тражени збир апсолутних вредности $|a - b| + |b - b| + |b - a| = 2|a - b|$. Највећи могући збир апсолутних разлика његових страница је када се странице највише разликују, а то је ако је $a = 2$ cm и $b = 1011$ cm. Тада је $2|a - b| = 2 \cdot |1011 - 2| = 2 \cdot 1009 = 2018$.
224. а) Може, и све странице су по $2024 : 4 = 506$ cm, а четвороугао је квадрат или ромб.
б) Може, а четвороугао је квадрат или правоугаоник.
225. а) Квадрат је само један и његова страница је $2024 : 4 = 506$ cm.
б) Ако је обим правоугаоника 2024, онда је полуобим правоугаоника 1012 cm. Тада странице правоугаоника могу бити (1, 1011), (2, 1010) ... (505, 507) и има их 505.
в) Ромбова има бесконачно много, јер и оштрих (самим тим и тупих) углова ромба има бесконачно.
г) Паралелограма има такође бесконачно много.
226. Ако је код делтоида ABCD ($AB = BC$ и $CD = DA$) обим 2024 cm, онда је збир дужина његових неједнаких, а целобројних страница $AB + AD = BC + CD = 1012$ cm.
а) Неједнаке странице (AB, AD) делтоида могу бити (1, 1011), (2, 1010) ... (505, 507) и има их бесконачно много, јер постоји бесконачно много дужина дијагонала BD делтоида (услов је само да дијагонала BD делтоида која повезује неједнаке странице AB и AD делтоида већа 0 и мања од 1012 cm).
б) Ако једнаке странице делтоида граде тачно један прав угао, таквих делтоида има тачно 505, јер је троугао који граде дијагонала и две неједнаке странице потпуно одређен двома страницама ($x, 1012 - x$) и углом од 45° који је наспрам веће од њих.

- в) Ако неједнаке странице делтоида граде тачно два права угла, таквих делтоида има тачно 505, јер је троугао који граде дијагонала и две неједнаке странице потпуно одређен двома страницама $(x, 1012 - x)$ и углом од 90° који је између њих.
Напомена: У деловима б) и в) „делтоид“ чије су све странице 506 није рачунат јер ако има један или два права угла, онда он има сва четири права угла и није делтоид, већ квадрат.
227. Ако је $m = 20242024 \dots 2024$, онда је m дељиво са 8 и може се написати као $m = 8 \cdot 25302530 \dots 0253 = 4 \cdot 2 \cdot 25302530 \dots 0253$. Дакле m је дељив са 4, а није са 16, па не може бити квадрат ниједног природног броја.
228. а) Како је $2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, најмањи број n такав да је $2024n$ потпун квадрат је $2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$.
б) Како је $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$, најмањи број n такав да је број $2024n$ потпун куб је $11^2 \cdot 23^2 = 64009$.
229. Како је $44^2 = 1936 < 2024 < 2025 = 45^2$, то је $44 < \sqrt{2024} < 45$ што значи да је тражена вредност $n = 44$.
230. Ако је $2023 < \sqrt{n} < 2024$, то је $2023^2 < n < 2024^2$.
231. Ако је $1024 \leq n < 2024$, онда је $32^2 \leq n < 45^2$. Кореновањем претходне неједнакости добијс се $32 \leq \sqrt{n} < 45$. То значи да је $\sqrt{n} \in \{32, 33, \dots, 44\}$, па је $n \in \{32^2, 33^2, \dots, 44^2\}$.
232. Из $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2024$, следи да је $\sqrt{x} = 2024 - \sqrt{y}$. Квадрирањем једнакости се добија се да је $x = 2024^2 + y - 4048\sqrt{y}$. Како су x , y и 2024^2 природни бројеви следи и да је $\sqrt{y}$ природан број, па y мора бити потпун квадрат. На сличан начин се показује и да и x мора бити потпун квадрат. Нека је $x = a^2$ и $y = b^2$. Тада једначина постаје $a + b = 2024$ и она има 2023 решења у скупу природних бројева, па и дата једначина има 2023 решења.
233. Како је $45^2 = 2025$, најмања вредност за n је 1.
234. Ако је $3 \leq \sqrt{n - 2024} \leq 17$, онда је $9 \leq n - 2024 \leq 289$. Тада је $2033 \leq n \leq 2313$ и таквих природних бројева n има тачно $2313 - 2032 = 281$.
235. Ако је $x^2 + 2x = 2024$, онда је $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 2025 = 45^2$. Даље је $x + 1 = 45$ или $x + 1 = -45$ и има два решења 44 и -46.

236. Израз $\sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}} + \sqrt{2025 - 2\sqrt{2024}}$ се може написати у облику $\sqrt{2024 + 2\sqrt{2024} + 1} + \sqrt{2024 - 2\sqrt{2024} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2024} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2024} - 1)^2} = |\sqrt{2024} + 1| + |\sqrt{2024} - 1| = \sqrt{2024} + 1 + \sqrt{2024} - 1 = 2\sqrt{2024}$.
237. Дата једнакост се може написати у облику $\frac{n(n+1)}{2} = 2024$, па је $n(n+1) = 4048$. Како се производ два узасипна природна броја n и $n + 1$ увек завршава цифрама 0, 2 и 6 и никада не завршава цифром 8, то такав природан број n не постоји.
238. Ако је $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024}$, онда је $2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024} + 2^{2025}$, па је $2A - A = A = 2^{2025} - 1$. Како је $B = 2^{2025}$, то је $B > A$.
239. Ако је $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2023} + 7^{2024}$, онда је A дељив са 7, јер је сваки његов сабирак дељив са 7. Како је $A = 7(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 7^4(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \dots + 7^{2021}(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = (1 + 7 + 49 + 342) \cdot 7B = 400 \cdot 7B = 2800 \cdot B$, то је доказ завршен.
240. Приметимо да број B има 2025 сабирака и да се ти сабирци могу груписати и по 3 и по 5. Како је $B = (1 + 2 + 2^2) + 2^3 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{2022} \cdot (1 + 2 + 2^2) = 7X$ и како је $B = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot 2^{2020} = 31 \cdot Y$, то је B дељиво и са 7 и са 31, па је дељиво и са $7 \cdot 31 = 217$. Како је $B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024} = 2^{2025} - 1$ то се број B завршава цифром $2 - 1 = 1$.
241. Како је $3^{1350} = (3^2)^{675} = 9^{675} > 8^{675} = (2^3)^{675} = 2^{2025} > 2^{2024}$, то је $2^{2024} < 3^{1350}$.
242. Израз $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2021^2 - 2022^2 + 2023^2 - 2024^2$ се применом формуле за разлику квадрата трансформише у једнакост $A = (1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + \dots + (2021 - 2022)(2021 + 2022) + (2023 - 2024)(2023 + 2024)$ и у изразу A има $2024 : 2 = 1012$ парова. Даље је $A = (-1)(3 + 7 + 11 + \dots + 4043 + 4047) = (-1)(4050 + 4050 + \dots + 4050)$. Како је било 1012 сабирака, сада имамо $1012 : 2 = 506$ парова који имају збир 4050, и добија се да је $A = (-1) \cdot 506 \cdot 4050$.

243. Ако је $m = 1^{2024} + 2^{2024} + 3^{2024} + 4^{2024}$, онда се 1^{2024} завршава цифром 1, 2^{2024} завршава цифром 6, 3^{2024} се завршава цифром 1 и 4^{2024} се завршава цифром 6. То значи да се број m завршава цифром $1 + 6 + 1 + 6$, тј. цифром 4, па није дељив са 10.
244. Нека је $5^n + 6^n + 7^n + 8^n = A$. Како је $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$, то број A мора бити дељив са 8. Број 8^n је увек дељив са 8, па остаје да видимо шта је са изразом $5^n + 6^n + 7^n$. Број 6^n је дељив са 8, за сваки природан број n већи од 2. Број 5^n при дељењу са 8 има два остатка: 5 ако је n непаран и 1 ако је n паран број. Број 7^n при дељењу са 8 има остатак 7 ако је n непаран и 1 ако је n паран број. Према томе ако је n непаран број већи од 2, онда израз $5^n + 6^n + 7^n + 8^n$ при дељењу са 8 даје остатак $5 + 0 + 7 + 0 = 12$, тј остатак 4 и није дељив са 8. Ако је n паран број онда израз $5^n + 6^n + 7^n + 8^n$ при дељењу са 8 даје остатак $1 + 0 + 1 + 0 = 2$ и није дељив са 8. За $n = 1$, број $A = 26$, а за $n = 2$, број $A = 25 + 36 + 49 + 64 = 174$, па ни за једно n број $5^n + 6^n + 7^n + 8^n$ није дељив са 8, па према томе ни са 2024.
245. Нека је $X = 3^{2024} + 4^{1011} + 6^{1012} = (3^{1012})^2 + (2^{1011})^2 + 2^{1012} \cdot 3^{1012} = (3^{1012})^2 + 2 \cdot 3^{1012} \cdot 2^{1011} + (2^{1011})^2 = (3^{1012} + 2^{1011})^2$, што је производ два једнака броја већа од 1, па према томе и сложен број.
246. Квадрати целих бројева се завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6, 9, па се четврти степени целих бројева завршавају цифрама 0, 1, 5, 6. Тада се $x^4 + y^4$ увек завршава цифрама 0, 1, 5, 6, 7, 2 и никада не завршава цифрама 3, 4, 8 и 9 и зато дата једначина нема решења у скупу целих бројева.
247. а) Како је $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n(1 + 5 + 25) = 31 \cdot 5^n$, то је дати број дељив са 5 и са 31, дакле и са $5 \cdot 31 = 155$.
- б) Ако је $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023} + 5^{2024} = 5(1 + 5 + 5^2 + 5^3) + 5^5(1 + 5 + 5^2 + 5^3) + \dots + 5^{2021}(1 + 5 + 5^2 + 5^3)$, онда је број A дељив са 5 и са $1 + 5 + 5^2 + 5^3 = 156$, па је дељив и са $5 \cdot 156 = 780$.
248. Како су изрази $a = 2^{2025} - 2^{2024} + 2^{2023} = 2^{2023}(1 - 2 + 4) = 3 \cdot 2^{2023}$, $b = 2^{2024}(1 - 2 + 4) = 3 \cdot 2^{2024}$ и $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2023}$, онда је збир квадрата $a^2 + c^2 = 9 \cdot 2^{2046} + 27 \cdot 2^{2046} = 36 \cdot 2^{4046} = 9 \cdot 4 \cdot 2^{4046} = 9 \cdot 2^{4048} = (3 \cdot 2^{2024})^2 = b^2$. Значи да бројеви a , b и c задовољавају једнакост $a^2 + c^2 = b^2$ и представљају мерне бројеве страница правоуглог троугла чије су катете a и c , а хипотенуза b .

249. Ако је $a = 2^{2021} \cdot 3^{2022} \cdot 4^{2023} \cdot 5^{2024}$, онда је $a = 2^{2021} \cdot 3^{2022} \cdot 2^{4046} \cdot 5^{2024} = 2^{6067} \cdot 3^{2022} \cdot 5^{2024} = 10^{2024} \cdot 3^{2022} \cdot 2^{4043}$. То значи да број a садржи 2024 нуле.

250. У низу бројева 1, 2, 3, ..., 2023, 2024 има 1012 бројева који су дељиви са 2, 506 бројева који су дељиви са 4, 253 броја који су дељиви са 8, 126 бројева који су дељиви за 16, 63 броја који су дељиви са 32, 31 број дељив са 64, 15 бројева дељивих са 128, 7 бројева дељивих са 256, 3 броја дељива са 512 и 1 број дељив са 1024. Производ наведених бројева садржи $1012 + 506 + 253 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2017$ двојки, па је број m дељив са 2^{2017} и $n = 2017$. У низу бројева 1, 2, 3, ..., 2023, 2024 има 404 број који су дељиви са 5, 80 бројева који су дељиви са 25, 16 бројева који су дељиви са 125, 3 броја који су дељиви са 625. Производ наведених бројева садржи $404 + 80 + 16 + 3 = 503$ петице. Значи да је број $m = 2^{2017} \cdot 5^{503} \cdot a = 10^{503} \cdot 2^{1514} \cdot b$, па се m завршава са 503 нуле.

251. Јасно је да је број $a = 1013 \cdot 1014 \cdot \dots \cdot 2023 \cdot 2024 = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1012 \cdot 1013 \cdot \dots \cdot 2023 \cdot 2024}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1012}$.

Видели смо да бројилац добијеног разломка садржи 2017 двојки. Број $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1012$ садржи 506 бројева дељивих са 2, 253 броја дељива са 4, 126 бројева који су дељиви за 8, 63 броја који су дељиви са 16, 31 број дељив са 32, 15 бројева дељивих са 64, 7 бројева дељивих са 128, 3 броја дељива са 256 и 1 број дељив са 512. То значи да број $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1012$ садржи $506 + 253 + 126 + 63$

$+ 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1005$ двојки и да је $a = \frac{2^{2017} \cdot m}{2^{1005} \cdot n} = 2^{1012} \cdot \frac{m}{n}$.

Бројеви m и n не садрже број 2, па је a природан број који је дељив са 2^{1012} и није дељив са 2^{1013} .

252. Како је $2^{10} = 1024 > 10^3$, то је $2^{20} > 10^6$, па је $2^{24} = 2^4 \cdot 2^{20} > 16 \cdot 10^6 = 16\,000\,000$. Слично је $2^{10} = 1024 < 1100$, па је $2^{20} < 121 \cdot 10^4$, па је $2^{24} = 2^4 \cdot 2^{20} < 16 \cdot 121 \cdot 10^4 = 19\,360\,000$. Дакле важи неједнакост $16\,000\,000 < 2^{24} < 19\,600\,000$ и број 2^{24} има тачно 8 цифара. Даље је $2^{2024} = 2^4 \cdot 2^{2020} > 16 \cdot (10^3)^{202} = 16 \cdot 10^{606} = 1,6 \cdot 10^{607}$, што значи да је број цифара бар 607, дакле већи од 606.

253. Број 2^{2024} има бар 607 цифара. Како је $607 : 10 = 60(7)$, то на основу Дирихлеовог принципа постоји цифра које се појављује бар $60 + 1 = 61$ пут.
254. Како је $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, то је $2024^n = 2^{3n} \cdot 11^n \cdot 23^n$ и има тачно $(3n + 1)(n + 1)(n + 1) = 160$ делилаца. Из $(3n + 1)(n + 1)^2 = 160$ следи да је $3n^3 < 160$, па је $n^3 < 54 < 64$ и $n < 4$. Провером за 1, 2 и 3 се добија да је $n = 3$, јер је $(3n + 1)(n + 1)^2 = 10 \cdot 16 = 160$. Може и овако: Из $(3n + 1)(n + 1)^2 = 160 = 2^5 \cdot 5 = 4^2 \cdot 10$ следи да је $n + 1 = 4$ и $3n + 1 = 10$, па је $n = 3$.
255. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, то тражени број n има облик $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$, при чему је $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)(e + 1) = 2024$. Најмањи број n ће се добити ако је $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Најмањи такав број је $n = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.
256. Остаци при дељењу неког природног броја са 37 су 0, 1, ..., 36 и има их тачно 37. Ако се скуп S , зависно од остатка сваког броја при дељењу са 37, подели у 37 класа, тако да се у свакој класи налазе бројеви који имају исти остатак, онда на основу Дирихлеовог принципа из једнакости $2024 : 37 = 54(26)$, следи да постоји бар једна класа у којој има $54 + 1 = 55$ бројева са истим остатком. Ако су $x_m = 37m + r$ и $x_n = 37n + r$ два броја из уоченог скупа, онда је $x_m - x_n = 37(m - n)$ и јасно је да је њихова разлика дељива са 37, чиме је доказ завршен.
257. Да би се добио победник турнира мора бити 2023 поражена. Према томе треба одиграти 2023 меча.
258. а) Ако број n има тачно 3 делиоца онда је то квадрат простог броја, тј. $n = p^2$, јер су његови делиоци 1, p и p^2 . Како је $p^2 < 2024$, то је $p < 45$, па таквих бројева има 14 (квадрати бројева 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43).
б) Ако број n има тачно 5 делилаца онда је $n = p^4$, јер су његови делиоци 1, p , p^2 , p^3 , p^4 . Како је $p^4 < 2024$, то је $p^2 < 44$ и $p < 6$, па таквих бројева има само 3 ($2^4 = 16$, $3^4 = 81$ и $5^4 = 625$).
259. Ако се дати правоугаоник подели на мање правоугаонике чије су странице 3 и 4, онда таквих правоугаоника има $(168 : 3) \cdot (144 : 4) = 56 \cdot 36 = 2016$. Када се 2024 тачке на произвољан начин тачке распореде у 2016 правоугаоника, онда на основу Дирихлеовог принципа постоји правоугаоник у коме се налазе бар две тачке. Растојање између те две тачке није веће од дијагонале мањег правоугаоника, која је једнака 5.

260. Нека је $x = 2024,20242024$, онда је $10000x = 20242024, 20242024\dots$ и $10000x - x = 9\,999x = 20240000$. Тада је $x = \frac{20240000}{9999}$ и после скраћивања са 11 добија се да је $x = \frac{20240000}{9999} = \frac{1840000}{909}$.
261. У правоуглом троуглу је полупречник круга уписаног у троугао је $r = (a + b - c) : 2 = 2024$. Тада је $a + b - c = 4048$. То значи да је збир катета $a + b > 4048$ и да постоји катета, на пример a , која је већа од 2024. Како је хипотенуза већа од било које катете, то је $c > a > 2024$. Тада је $a + b = 4048 + c > 4048 + 2024 = 6072$.
262. Ако се четвороугао $ABCE$ допуни до правоугаоника $AMCE$, онда су троуглови BMC и CDE подударни (имају све углове једнаке и страница $BC = CD$ – угао, страница, угао). Следи да је површина четвороугла $ABCD$ једнака површини правоугаоника $AMCE$. Међутим, из подударности је $CM = CE = 2024$, па је $AMCE$ у ствари квадрат и његова површина је једнака $2024^2 = 4\,096\,576$.
263. Нека је $AB = AD = a$, $BC = b$ и $CD = c$. Површина P четвороугла $ABCD$ једнака $a^2/2 + bc/2$, па је $4P = 2a^2 + 2bc$. Из Питагорине теореме је $a^2 + a^2 = 2a^2 = b^2 + c^2$, па је $4P = b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 = 2024^2$. Следи да је $P = 2024^2 : 4 = 1012^2 = 1\,024\,144$.
264. Ако се конструише осносиметрична слика датог троугла ABC , онда се добије једнакокраки троугао ABD у коме је крак 2024, а угао ABD једнак 30° . Тада је висина AA' троугла ABD једнака $2024 : 2 = 1012$ и површина $\triangle ABD$ је једнака $2024 \cdot 1012 : 2 = 1012^2$. Површина $\triangle ABC$ је једнака $1\,024\,144 : 2 = 512\,072$.
265. Сви углови тог шестоугла су једнаки 120° . Ако продужимо странице BC , DE и FA добија се троугао MNP чије су сви углови по 60° . То значи да је тај троугао MNP једнакостраничан, па је једна његова страница $MN = 2022 + 2023 + 2024 = 6069$. Тада је дуж $DE = 6069 - 2024 - 2025 = 2020$ и $FA = 6069 - 2025 - 2022 = 2022$. Обим шестоугла је $2022 + 2023 + 2024 + 2020 + 2025 + 2022 = 12\,136$. Површина шестоугла се добија као разлика површине једнакостраничног троугла MNP и површине једнакостраничних троуглова AMB , CND и EPF .

266. Из једнакости површина троуглова ABC и ABD, следи и једнакост површина $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, па је $P_{\triangle BOC}$ такође 2024.
267. Површина четвороугла MNPQ је једнака трећини површине четвороугла ABCD, дакле 2024/3.
268. Користећи Херонову формулу добија се да је површина троугла чије су странице 13κ , 14κ и 15κ је $84\kappa^2$. Како је $84\kappa^2 = 2024$, то је $\kappa^2 = 2024/84 = 506/21$ и $\kappa = \sqrt{\frac{506}{21}}$. Странице траженог троугла су $13\sqrt{\frac{506}{21}}$, $14\sqrt{\frac{506}{21}}$ и $15\sqrt{\frac{506}{21}}$.
269. а) Ако је n број страница многоугла онда је број његових дијагонала $n(n-3)/2 = 2024$ и $n(n-3) = 4048$. Ако се број 4048 растави на чиниоце, онда се добије $4048 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$. То значи да се број 4048 не може написати као производ бројева n и $n-3$.
б) Многоугао са $n+16$ страница има $(n+16)(n+13)/2$ дијагонала. Тада је $(n+16)(n+13)/2 - n(n-3)/2 = 2024$. После сређивања једначине следи да је $29n + 3n + 208 = 4048$ или $32n = 3840$, па је број страница многоугла $n = 120$.
270. Не може. Ако би сви унутрашњи углови били изражени целим бројем степени, онда би то морали бити и спољашњи углови. Ако би 2024 спољашња угла били само по 1° , онда би њихов збир био 2024° , што је немогуће јер је збир спољашњих углова 360° .
271. Не постоји, јер је збир унутрашњих углова многоугла увек дељив са 180, а број 2024 то није.
272. Ако се ради о дељењу $m : n = \kappa$, онда је $m = n\kappa$. Из услова задатка је $m + n + \kappa = 2024$ и $\kappa - n = 56$. Значи да је $n(n+56) + n + n + 56 = 2024$, па је $n^2 + 58n = 1968$. Следи једнакост $n^2 + 58n + 29^2 = 1968 + 29^2$, па је $(n+29)^2 = 1968 + 841 = 2809 = 53^2$. Постоје два решења: $n+29 = 53$ и $n+29 = -53$. У првом случају је дељење $1920 : 24 = 80$, а у другом је $2132 : (-82) = -26$.
273. Нека је $(n+1) + (n+2) + \dots + (n+\kappa) = 2024$, где је κ број сабирака, па је κ природан број већи од 1. Тада важи једнакост $k\kappa + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} = 2024$, па је $2k\kappa + \kappa(\kappa+1) = \kappa(2n + \kappa + 1) = 4048$.

Како су κ и $2n + \kappa + 1$ различите парности у обзир долазе само следећи случајеви:

- 1) $\kappa = 11$ и $2n + \kappa + 1 = 368$. Следи да је $n = 178$, а тражени збир је онда $179 + 180 + \dots + 189$;
- 2) $\kappa = 16$ и $2n + \kappa + 1 = 253$. Следи да је $n = 118$, а тражени збир је онда $119 + 120 + \dots + 134$;
- 3) $\kappa = 23$ и $2n + \kappa + 1 = 176$. Следи да је $n = 76$, а тражени збир је онда $77 + 78 + \dots + 99$;
- 4) $\kappa = 176$ и $2n + \kappa + 1 = 23$. Следи да је $n = -77$, а тражени збир је онда $(-76) + \dots + 76 + 77 + \dots + 99$;
- 5) $\kappa = 253$ и $2n + \kappa + 1 = 16$. Следи да је $n = -119$, а тражени збир је онда $(-118) + (-117) + \dots + 118 + 119 + \dots + 134$;
- 6) $\kappa = 368$ и $2n + \kappa + 1 = 11$. Следи да је $n = -179$, а тражени збир је онда $(-178) + (-177) + \dots + 178 + 179 + \dots + 189$.

274. Ако је $x^2 - y! = 2024$, онда је $x^2 = y! + 2024$. За $y = 1$, је $x^2 = 2025$ и $x = 45$, па постоје такви природни бројеви: $x = 45, y = 1$.
275. а) Треба сабрати најмање два сложена броја, на пример: $2020 + 4 = 2024$. Треба сабрати највише 506 сложених бројева и то је $4 + 4 + \dots + 4 = 4 \cdot 506 = 2024$.
- б) Треба сабрати најмање два проста броја, на пример $2017 + 7 = 2024$. Треба сабрати највише 1012 простих бројева $2 + 2 + \dots + 2 = 1012 \cdot 2 = 2024$.
276. Може, јер је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = (2 \cdot 2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 23) = 44 \cdot 46$.
277. Ако је $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2024$. Како су бројеви $(x - y)$ и $(x + y)$ бројеви исте парности, морају оба бити парна, у скупу природних бројева се разликују случајеви: $x - y = 2, x + y = 1012$; $x - y = 4, x + y = 506$; $x - y = 22, x + y = 92$; $x - y = 44, x + y = 46$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева: (507, 505), (255, 251), (57, 35), (45, 1). Свако од 4 дата решења генерише 4 решења у скупу целих бројева: $(x, y), (x, -y), (-x, y), (-x, -y)$ и број решења једначине у скупу целих бројева је 16.
278. Квадрати десет узастопних природних бројева почев од 1 до 10 завршавају се цифрама 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 и 0 и њихов збир је 45. Према томе, збир последњих цифара бројева $1^2, 2^2 \dots 2023^2, 2024^2$ је $202 \cdot 45 + 1 + 4 + 9 + 6 = 9090 + 20 = 9110$.

279. Нека је n највећи број мањи од 2024. Природан број n при дељењу са 2, 3, 5 и 7 има остатке не веће од 1, 2, 4, 6. Из једнакости $1 + 2 + 4 + 6 = 13$, следи да је број $n + 1$ је дељив са 2, 3, 5 и 7, па број n има облик $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \kappa - 1 = 210\kappa - 1$. Највећи такав број мањи од 2024 је $210 \cdot 9 - 1 = 1890 - 1 = 1889$.
280. Из услова задатка следи да је $0,37x - 0,15x = 0,22x = 2024$. Тада је $x = 2024 : 0,22 = 202400 : 22 = 9200$.
281. Фудбалски клубови ће добити 4κ , 5κ , 6κ и 8κ лопти. То значи да је $23\kappa = 2024$ и $\kappa = 2024 : 23 = 88$. Клубови су добили 352, 440, 528 и 704 лопте.
282. Размера $1,5 : 2,5$ је исто што и размера $3 : 5$. Мања сума је тада $2024 : 8 \cdot 3 = 759$ динара, а већа сума је $2024 : 8 \cdot 5 = 1265$ динара.
283. Суве печурке садрже 90% суве материје. Маса од 2024 kg сувих печурака садржи $2024 \cdot 90\% = 2024 \cdot 0,9 = 1821,6$ kg суве материје. Та маса је четвртина масе свежих печурака, па је укупна маса свежих печурака $4 \cdot 1821,6 = 7286,4$ kg.
284. Ако је цена кошуље била 2024 динара, онда је после поскупљења и појефтињења за 30% цена кошуље $2024 \cdot 1,3 \cdot 0,7 = 2024 \cdot 0,91 = 1841,84$ динара. Да би се вратила на почетну треба цену увећати за $x\%$. Тада је $1841,84 \cdot (1 + x\%) = 2024$. Следи да је $1 + x\% = 2024 : 1841,84 = 1,0989$. Закључујемо да цену кошуље треба повећати за приближно 9,89%.
285. Ако је мањи број x , онда је већи број $x + 2024$. Из услова задатка се добија да је $4,5\% \cdot (x + 2024) = 8,5\% \cdot x$ или $45 \cdot (x + 2024) = 85 \cdot x$. Даље је $85x - 45x = 45 \cdot 2024$. и $40x = 45 \cdot 2024$. Следи да је $x = 9 \cdot 253 = 2277$, а $x + 2024 = 4301$.
286. Нека је $a : 1 = b : 2 = c : 3 = d : 4 = e : 5 = \kappa$. Тада је $a = \kappa$, $b = 2\kappa$, $c = 3\kappa$, $d = 4\kappa$ и $e = 5\kappa$ и $2a + 2b + c + 2d + e = 2\kappa + 4\kappa + 3\kappa + 8\kappa + 5\kappa = 22\kappa = 2024$. Следи да је $\kappa = 2024 : 22 = 92$. Тада је:
 $a = \kappa = 92$, $b = 2\kappa = 184$, $c = 3\kappa = 276$, $d = 4\kappa = 368$ и $e = 5\kappa = 460$.
287. Нека је $a : b = b : c = c : d = d : a = \kappa$. Тада је $a = b\kappa$, $b = c\kappa$, $c = d\kappa$ и $d = a\kappa$. Следи да је $c = a\kappa^2$, $b = a\kappa^3$ и $a = a\kappa^4$, што значи да је $\kappa^4 = 1$, па је $\kappa = 1$ или $\kappa = -1$.

- (1) Ако је $\kappa = 1$, онда је $a = b = c = d$, па је $(2024a + b) : (2024c - d) = 2025 : 2023$.
- (2) Ако је $\kappa = -1$, онда је $a = -b = c = -d$, па је тражени однос $(2024a + b) : (2024c - d) = 2023 : 2025$.
288. Нека је $a : 3 = b : 4 = c : d = \kappa$. Тада је $a = 3\kappa$, $b = 4\kappa$ и $c = d\kappa$ ($\kappa > 0$). Из услова задатка је $333a + 250b + cd < 2024$, па је $333 \cdot 3\kappa + 250 \cdot 4\kappa + \kappa d \cdot d = 999\kappa + 1000\kappa + \kappa \cdot d^2 < 2024$. Следи да је $\kappa(1999 + d^2) < 2024$. Из добијене неједнакости је $\kappa = 1$ и $1999 + d^2 < 2024$, па је $d^2 < 25$ и $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Значи да постоје четири решења: $a = 3, b = 4, c = 1, d = 1$; $a = 3, b = 4, c = 2, d = 2$; $a = 3, b = 4, c = 3, d = 3$; $a = 3, b = 4, c = 4, d = 4$.
289. Мала казаљка за 1 сат или 60 минута пређе 5 подеока или 30° . Велика казаљка за 60 минута пређе 60 подеока или 360° . То значи да мала казаљка у једном минуту прелази пола степена, а велика 6 степени. Како је 2024 минута једнако 33 часа и 44 минута, тражи се угао између казаљки у 21 час и 44 минута. У 21:00 часова тај угао је 270° (гледајући у правцу кретања казаљки). За 44 минута велика казаљка ће прећи $44 \cdot 6 = 264^\circ$. За то време мала казаљка ће прећи половину од 44° , а то је 22° . Дакле мала казаљка ће бити на позицији $270 + 22 = 292^\circ$, а велика на позицији 264° . Угао између казаљки ће бити $292 - 264 = 28^\circ$.
290. Да би били сигурни да ће се извући бар једна плава куглица, мора бити најмање $2023 + 2025 + 1 = 4049$ куглица, јер првих 4048 куглица могу бити црвене или беле.
291. Дати троугао је правоугли са правим углом код темена А и катетама $AB = 2024$ и $AC = 2024 - 506 = 1518$. Површина троугла ABC је $2024 \cdot 1518 : 2 = 1\,536\,216$. Хипотенуза троугла се добија из Питагорине теореме, па је $BC^2 = 2024^2 + 1518^2 = (4 \cdot 506)^2 + (3 \cdot 506)^2 = (5 \cdot 506)^2$. Следи да је $BC = 5 \cdot 506 = 2530$. Обим троугла ABC је $2024 + 1518 + 2530 = 6072$.
292. Површина тог правоуглог троугла ABC је 2024, па је $AB \cdot AC = 4048$. Како је број 4048 $= 1 \cdot 4048 = 2 \cdot 2024 = 4 \cdot 1012 = 8 \cdot 506 = 11 \cdot 368 = 16 \cdot 253 = 22 \cdot 184 = 23 \cdot 176 = 44 \cdot 92 = 46 \cdot 88$ то има 10 троуглова у којима је $AB < AC$ и 10 у којима је $AB > AC$. Међутим, све набројано се односи само на први квадрант, што значи да таквих правоуглих троуглова са целобројним страницама има $4 \cdot 20 = 80$, јер и у осталим квадрантима постоји по 20 таквих троуглова.

293. Како је $2024 = 4 \cdot 506$, а $1518 = 3 \cdot 506$, то је хипотенуза тог правоуглог троугла једнака $5 \cdot 506 = 2530$ (види задатак 291). Тада је полупречник круга уписаног у тај правоугли троугао једнак $(2024 + 1518 - 2530) : 2 = 1012 : 2 = 506$.
294. Претпоставимо да такав троугао постоји и да има површину P . Тада су странице тог троугла једнаке $\frac{2P}{2023}, \frac{2P}{2024}, \frac{2P}{2025}$. Проверимо да ли за ове странице важи неједнакост троугла, тј. да ли је $\frac{2P}{2025} + \frac{2P}{2024} > \frac{2P}{2023}$. Како је та једнакост тачна, такав троугао постоји.
295. Ако се конструише осносиметрична слика датог троугла ABC , онда се добије једнакокраки троугао ABD у коме је крак 2024, а угао ABD једнак 45° . Тада је висина AA' једнакокраког троугла ABD једнака $\frac{2024}{2}\sqrt{2} = 1012\sqrt{2}$ и површина троугла једнака $2024 \cdot 1012\sqrt{2} : 2 = 1012^2 \sqrt{2}$. Тада је површина троугла ABC је једнака $512\,072 \sqrt{2}$.
296. Како је $BC^2 + CA^2 = AB^2 = 1000^2 + 2000^2 = 5\,000\,000 > 4\,096\,576 = 2024^2$ то је дати троугао ABC оштроугли.
297. Упутство: Коришћењем Херонове формуле израчунати површину троугла, а онда из површине израчунати сваку појединачну висину.
298. Прости бројеви $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ и на крају $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ нису зборови два сложена броја. Први прост број који задовољава тај услов је прост број $13 = 4 + 9$. Али и сви остали прости бројеви већи од 11 се могу приказати као $p = 9 + (p - 9)$. Број 9 је сложен, а број $p - 9$ је паран (јер је p непаран број). Према томе таквих бројева има само 5 и то су прости бројеви: 2, 3, 5, 7 и 11.
299. За једначину $|||x| + x| + x| + x| = 2024$, разликујемо два случаја: Ако је $x < 0$, онда је $|x| = -x$ и дата једначина постаје $||| -x + x| + x| + x| = ||x| + x| = 2024$, тј. $|-x + x| = 0 = 2024$ и нема решења. Ако је $x \geq 0$, онда је $|x| = x$ и једначина постаје $|||x + x| + x| + x| = 4x = 2024$, па је $x = 506$.

300. Ако је $||x - 2024| - 2023| = 2022$, онда је $|x - 2024| - 2023 = 2022$ или $|x - 2024| - 2023 = -2022$. Тада је $|x - 2024| = 4045$ или $|x - 2024| = 1$. Следи да је $x - 2024 = 4045$ или $x - 2024 = -4045$. У другом случају је $x - 2024 = 1$ или $x - 2024 = -1$. Добијају се 4 решења: 6069, -2021, 2025, 2023.
301. Ако је $x < 0$, онда је $|x| = -x$ и једначина $|x| + |2x| + |5x| = 2024$ постаје $|x| + |2x - 5x| = |x| + |-3x| = |x + (-3x)| = |-2x| = -2x = 2024$ и $x = -1012$.
Ако је $x \geq 0$, онда је $|x| = x$ и једначина постаје $|x| + |2x| + |5x| = 8x = 2024$, па је $x = 253$.
302. Ако је $2019x + 2022y = 2024$, онда је $3(673x + 674y) = 2024$, па је на левој страни једнакости број који је дељив са 3, а на десној број који није дељив са 3 и једначина нема решења у скупу целих бројева.
303. Ако је x новчића од 2 и y новчића од 5 динара, онда је $2x + 5y = 2024$. Једно решење добијене једначине је $x_0 = 2$ и $y_0 = 404$. Тада је опште решење једначине $x = 2 + 5k$ и $y = 404 - 2k$. При том мора бити: $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Значи да је $2 + 5k \geq 0$ и $404 - 2k \geq 0$, па је $0 \leq k \leq 202$. Дакле исплата се може обавити на 203 начина. Најмање новчића ће бити када је већина новчића, тј. 404 новчића од 5 и 2 новчића од 2 динара. Највише новчића, 1012 ће бити ако су сви новчићи од 2 динара.
304. Ако је број златника масе 4 грама једнак x , а број златника масе 7 грама једнак y , онда је $4x + 7y = 2024$. Како су $4x$ и 2024 дељиви са 4, то мора бити и $7y$, па је $y = 4n$. Тада се добија $4x + 28n = 2024$, па је $x + 7n = 506$ и $x = 506 - 7n$. Како број златника не може бити негативан то је $x = 506 - 7n \geq 0$, па је $0 \leq n \leq 72$. То значи да се златници могу направити на 73 начина.
305. Нека су странице мањих квадрата 1, 2 и 3 и нека првих има a , других b и трећих c . Тада је $a + b + c = 2024$ и $a + 4b + 9c = 46^2 = 2116$. Ако од друге једнакости одузмемо прву добија се да је $3b + 8c = 92$. Једно решење добијене једначине је $b = 4$, $c = 10$, па квадрат странице 46 треба поделити на $2024 - 4 - 10 = 2010$ квадрата странице 1, 4 квадрата странице 2 и 10 квадрата странице 3.

306. Идеја је слична идеји из 305. задатка. Из једнакости $a + b + c + d = 2024$ и $a + 8b + 27c + 64d = 13^3 = 2197$, одузимањем прве од друге једначине добија се да је $7b + 26c + 63d = 173$. Једно решење једначине је $b = 3, c = 1, d = 2$, па је $a = 2024 - 6 = 2018$ и таква подела коцке је могућа.
307. Како су бројеви $4x^2$ и 2024 дељиви са 4 , па то мора бити и $5y^2$, тј. y је дељив са 2 . Нека је $y = 2m$. Тада је $4x^2 + 5 \cdot 4m^2 = 2024$ и дељењем са 4 се добија да је $x^2 + 5m^2 = 506$. Следи неједнакост $5m^2 \leq 506$, па је $m^2 \leq 100$ и $m \leq 10$. За $m \in \{0, 1, 2 \dots 9, 10\}$, добија се да је $x^2 \in \{506, 501, 486, 461, 426, 381, 326, 261, 186, 101, 6\}$. У добијеном скупу нема потпуних квадрата, па не постоје цели бројеви x и y такви да је $4x^2 + 5y^2 = 2024$.
308. а) Добија се да је $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 2^{2024}$. У скупу природних бројева је $x + y > x - y$ и како су $x + y$ и $x - y$ исте парности, могуће вредности за $(x + y)$ су $2^{2023}, 2^{2022}, \dots, 2^{1014}, 2^{1013}$. То значи да у скупу природних бројева једначина има $2023 - 1012 = 1011$ решења.
б) Како свако решење (x, y) у скупу природних бројева генерише 4 решења у скупу целих бројева $(x, y), (x, -y), (-x, y), (-x, -y)$, то ће у скупу целих бројева бити $4 \cdot 1011 = 4044$ решења, којима се морају додати и решења $(2^{1012}, 0)$ и $(-2^{1012}, 0)$, што чини да у скупу целих бројева једначина има 4046 решења.
309. Ако се и на леву и на десну страну једначине $xy + x + y = 2024$, дода 1 , добија се једначина $(x + 1)(y + 1) = 2025$. Како је $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ то број 2025 има $5 \cdot 3 = 15$ делилаца. Бројеви $(x + 1)$ и $(y + 1)$ не могу узети вредности 1 и 2025 , јер тада x или y нису природни бројеви, што значи да дата једначина има $15 - 2 = 13$ решења.
310. Ако је $x^2 - 3y^2 = 2024$ и ако уведемо смену $x^2 = m$ и $y^2 = n$, једначина постаје $m - 3n = 2024$. Опште решење добијене једначине је $(2024 + 3n, n)$, где је n неки природан број. Тада је $x^2 = 2024 + 3n$ што је немогуће, јер $2024 + 3k$ при дељењу са 3 даје остатак 2 , а једини могући остаци при дељењу квадрата природних бројева са 3 су 0 и 1 .
311. Из $x! + y^2 = 2024$ следи да је $x! < 2024 < 5040 = 7!$, па је $x < 7$. Доказ следи из разликовања случајева за $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, јер је тада $y^2 \in \{2023, 2022, 2018, 2000, 1904, 1304\}$, па у ни у једном случају није природан број.

312. Ако је $x = 1$, онда је $x! = 1$ и једначина постаје $n \cdot 1 + y^2 = 2024$, тј. $n = 2024 - y^2$, па је $y^2 < 2024$ и постоје 44 вредности броја n које су природни бројеви. Те вредности су из скупа $\{2024 - 1^2, 2024 - 2^2, \dots, 2024 - 44^2\}$. Одговор је постоје. Пример: $n = 2023, x = 1, y = 1$.
313. Ако је $x^2 + y^2 = 2024$, онда су x и y исте парности и разликујемо два случаја:
 (1) Ако су x и y оба парни онда је $x = 2m$ и $y = 2n$, па је $4m^2 + 4n^2 = 2024$ и $m^2 + n^2 = 506$. Једначина нема решења ако су оба броја m и n парни (због дељивости са 4), а у случају да су непарни добија се $(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 506$ или $4a^2 + 4a + 4b^2 + 4b = 504$. Тада је $a^2 + a + b^2 + b = 126$ и провером за $a \in \{0, 1, \dots, 10, 11\}$ добија се да једначина нема решења.
 (2) Ако су x и y непарни, онда је $(2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 2024$ и тада је $4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n = 2022$. Једначина нема решења, јер је лева страна једнакости дељива са 4, а десна није.
314. Ако су у једначини $x^2 + y^2 + z^2 = 2024$ сва три броја x, y и z парни онда једначина постаје $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 2024$, односно $a^2 + b^2 + c^2 = 506$. Како је $21^2 + 8^2 + 1^2 = 441 + 64 + 1 = 506$, такви бројеви $x = 2 \cdot 21 = 42, y = 2 \cdot 8 = 16$ и $z = 2 \cdot 1 = 2$ постоје.
315. Ако је $2xy + 3x + 4y = 2024$, онда је $2y(x + 2) + 3(x + 2) - 6 = 2024$. Следи да је $(x + 2)(2y + 3) = 2030 = 2 \cdot 5 \cdot 203 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$. Број 2030 има $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ дилаца. То значи да дата једначина има $2 \cdot 16 = 32$ решења, јер ако је $(x + 2, 2y + 3)$ једно решење, онда је и уређени пар $(-x - 2, -2y - 3)$ такође решење.
316. Дата једначина је еквивалентна са једначином $2024x + 2024y = xy$ која се може трансформисати у једначину $xy - 2024x - 2024y = 0$, тј. једначину $xy - 2024x - 2024y + 2024^2 = 2024^2$. Растављањем на чиниоце добија се да је $(x - 2024)(y - 2024) = 2024^2 = ab$, где су a и b комплементарни делиоци броја $2024^2 = 2^6 \cdot 11^2 \cdot 23^2$ који има $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ делиоца. Како су бројеви a и b као делиоци броја 2024^2 природни, то су и бројеви $x = a + 2024$ и $y = b + 2024$, увек природни, па једначина има 63 решења.
317. Како је дата једначина дефинисана само ако су x и y ненегативни бројеви, решења треба тражити само у скупу $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ при чему су и x и y мањи или једнаки 2024.

- Ако је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2024}$, онда је $\sqrt{x} = 2024 - \sqrt{y}$. Ако се добијена једнакост квадрира, онда је $x = 2024 + y - 2\sqrt{2024 \cdot y}$. Како су x , y и 2024 цели бројеви то и број $\sqrt{2024 \cdot y}$ мора бити цео, па су могућа решења само ако y има облик $2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot \kappa^2$. Како је $y \leq 2024$, то је и $2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot \kappa^2 \leq 8 \cdot 11 \cdot 23$, па је $\kappa^2 \leq 4$ или $\kappa \leq 2$, тј. $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ или $\kappa = 2$. па једначина има само три решења: (2024, 0), (506, 506) и (0, 2024).
318. Како је $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1$, то ће најмања вредност број n бити када је збир бројева већих од 1 највећи. Како је $2 + 1012 = 1014$ и како је $2024 - 1014 = 1010$ то је најмања вредност броја n једнака $1 + 1 + 1010 = 1012$. Највише јединица имаће ако је збир сабирака различит од 1 најмањи а то је у случају када је $2 + 2 + 2 + 11 + 23 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = 40 + 1984 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$, где има тачно 1984 јединице и тада је $n = 5 + 1984 = 1989$.
319. Из задатака 313. и 314. следи да је потребно сабрати најмањи три квадрата (на пример $42^2 + 16^2 + 2^2$), а највише 2024 квадрата, јер је $1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = 2024 \cdot 1 = 2024$. Напомена: У задатку се не тражи, али би било интересантно истражити колико највише би у збиру могло бити различитих квадрата.
320. Ако је $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2010}^2 = 2024$, онда има κ бројева који су већи од 1 и $2010 - \kappa$ бројева који су тачно 1. Тада је збир квадрата бројева већих од 1 већи или једнак $\kappa \cdot 4 = 4\kappa$, јер је сваки од тих квадрата већи или једнак 4, па важи једнакост $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2010}^2 = 2024 \geq 4\kappa + 2010 - \kappa$ или $3\kappa \leq 2024 - 2010 = 14$. То значи да је $\kappa \leq 4$. Тада је $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + (2010 - 4) \cdot 1 = 2024$. Из добијене једначине је $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2024 - 2006 = 18$. Нека a ових бројева има вредност 4, b вредност 3, c вредност 2 и d вредност 1. Тада је $a + b + c + d = 4$ и $16a + 9b + 4c + d = 18$. Ако се од друге одузме прва једнакост добија се $15a + 8b + 3c = 14$. Значи да је $a = 0$, па је $3c = 14 - 8b$. Следи да је $14 - 8b$ дељиво са 3, па у обзир долази само једна вредност $b = 1$, за коју је $3c = 6$ и $c = 2$. Тада је $d = 1$ и добија се $3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = 2024$, што значи да у збиру има 2007 јединица.

321. Помоћно тврђење: Ако су x и y природни бројеви, онда једначина $x + y = n$ има $n - 1$ решење у скупу природних бројева. Доказ: Како x може узети вредности $1, 2, \dots, n - 1$, јасно је да једначина има тачно $n - 1$ решење. Доказано помоћно тврђење примењујемо у решавању датог проблема.

Нека је Влада добио a , Нада b и Јагода c динара, при чему важи неједнакост $1 \leq a, b, c \leq 2022$. Тада је $a + b + c = 2024$. Ако је $c = 1$, онда је $a + b = 2023$ и постоје 2022 поделе. Ако је $c = 2$, онда је $a + b = 2022$ и постоји 2021 подела ... Ако је $c = 2022$, онда је $a + b = 2$ и постоји само 1 подела. Укупан број подела је $1 + 2 + 3 + \dots + 2021 + 2022 = 2022 \cdot 2023 : 2 = 1011 \cdot 2023 = 2\,045\,253$.

Друго решење: Ако се у низу испишу 2024 јединице: $1\,1\,1\,\dots\,1\,1\,1$ и између јединица, а постоје 2023 празна места, поставе две преграде, онда сваки положај преграда дефинише једно решење датог проблема. Простор (збир јединица) од почетка низа до прве преграде једнак је првој вредности, простор између преграда (збир јединица) једнак је другој вредности, а простор (збир јединица) од друге преграде до краја низа једнак је трећој вредности. Прва преграда се може поставити на 2023 празна места, а друга на преостала 2022 празна на места. То значи да је укупан број решења $2023 \cdot 2022 : 2$, а дељење са 2 је учињено пошто се, кад преграде замене места, добије потпуно исто решење.

322. Нека су тражени непарни бројеви $(2n + 1), (2n + 3), \dots, (2n + 2k - 1)$ и има их тачно k . Њихов збир је $2n \cdot k + (1 + 3 + \dots + 2k - 1) = 2n \cdot k + k^2 = k(2n + k) = 2024$. Јасно је да су бројеви k и $2n + k$ исте парности и да морају бити парни. Тада је k делилац броја 2024 који је дељив са 2 или 4, али није дељив са 8, тј. $k \in \{2, 4, 22, 44, 46, 92, 506, 1012\}$, па се ради о збировима:

- (1) $k = 2, 2n + 2 = 1012, n = 505$. Збир је $1011 + 1013 = 2024$;
- (2) $k = 4, 2n + 4 = 506, n = 251$. Збир је $503 + 505 + 507 + 509$;
- (3) $k = 22, 2n + 22 = 92, n = 35$. Збир је $71 + 73 + \dots + 111 + 113$;
- (4) $k = 44, 2n + 44 = 46, n = 1$. Збир је $3 + 5 + \dots + 87 + 89 = 2024$;
- (5) $k = 46, 2n + 46 = 44, n = -1$. Збир је $(-1) + 1 + \dots + 87 + 89$;
- (6) $k = 92, 2n + 92 = 22, n = -35$. Збир је $(-35) + \dots + 111 + 113$;
- (7) $k = 506, 2n + 506 = 4, n = -251$. Збир је $(-501) + \dots + 509 = 2024$;
- (8) $k = 1012, 2n + 2 = 1012, n = -505$. Збир је $(-1009) + \dots + 1013$.

323. Све Питагорине троуглове генеришу следеће формуле:
 $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ и $c = m^2 + n^2$, где су m и n природни бројеви за које важи неједнакост $m > n$.
 а) Ако је $a = 2mn = 2024$, онда је $mn = 1012$ и једна од могућих ситуација је $m = 44$, $n = 23$. Тада је $a = 2024$, $b = 44^2 - 23^2 = 1407$ и $c = 44^2 + 23^2 = 2465$.
 б) Ако је $c = m^2 + n^2 = 2024$, добијена једначина нема решења у скупу природних бројева (види задатак 313).
324. Обим Питагориног троугла је $a + b + c = 2mn + m^2 - n^2 + m^2 + n^2 = 2mn + 2m^2$. Ако је $2mn + 2m^2 = 2m(m + n) = 2024$, онда се добија једнакост $m(m + n) = 1012$. Ако је $m = 23$, онда је $m + n = 44$, па је $n = 21$. Странице једног од могућих правоуглих троуглова су: $a = 2mn = 966$, $b = m^2 - n^2 = 88$ и $c = m^2 + n^2 = 970$.
325. Површина Питагориног троугла је $ab : 2 = 2mn(m^2 - n^2) : 2 = mn(m^2 - n^2) = 2024$. Тада је $mn(m - n)(m + n) = 2024$. Како је $m + n$ највећи од чинилаца у добијеном производу, како су $m + n$ и $m - n$ исте парности и $m > n$, могуће су следеће ситуације:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m + n$	2024	1012	506	253	184	92	88	46	44	23	22	11
$mn(m - n)$	1	2	4	8	11	22	23	44	46	88	92	184

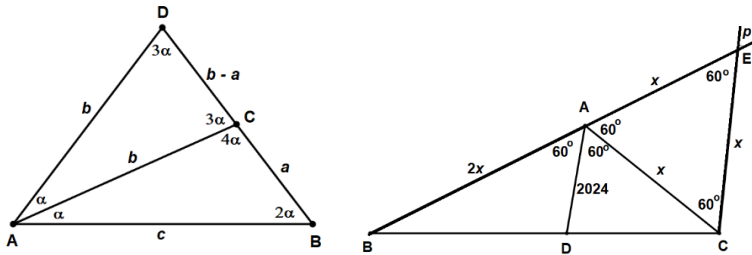
- Случајеви 1, 4, 5, 7, 10, 12 се елиминишу јер бојеви нису исте парности. Код осталих случајева се решавањем система једначина $m + n = a$, $m - n = b$, $mn = 2024 : ab$ долази до закључка да нема решења и не остоји Питагорин троугао чија је површина 2024.
326. Ако су три странице тангентног четвороугла једнаке 2022, 2023 и 2024, онда је четврта страница тангентног четвороугла једнака 2023 (ако су наспрамне странице четвороугла 2022 и 2024), 2021 (ако су наспрамне странице 2022 и 2023) и 2025 (ако су наспрамне странице 2023 и 2024). Међутим, сваки од изложених случајева има бесконачно много различитих тангентних четвороуглова, јер се зависно од величине дијагонале добија бесконачно четвороуглова.
327. Ако је обим тангентног четвороугла 2024, онда само ромбова чија страница има дужину $2024 : 4 = 506$ има бесконачно много, јер је довољно да једна од дијагонала ромба има дужину d која је мања од $506 + 506 = 1012$. Тада постоји само бесконачно много једнакоккраких троуглова чије странице имају дужину 506, d и 506. Слично разматрање важи и за било који тангентни четвороугао чије су странице $(x, y, 1012 - x, 1012 - y)$, где су $x, y \in \mathbb{N}$.

328. Нека тангентни четвороугао ABCD чији је обим 2024 и полуобим 1012 има целобројне странице чије су дужине страница $AB = x$, $BC = 1012 - x$, $CD = 1012 - x$, $DA = x$ и дијагонала $AC = 1011$. Како је $x + 1012 - x = 1012 > 1011$, то троугао ABC увек постоји. Како је $1 \leq x \leq 1011$ таквих тангентних четвороуглова (очигледно делтоида) има тачно 506: (1, 1011, 1011, 1), (2, 1010, 1010, 2), ... (506, 506, 506, 506), (при чему су подударни четвороуглови посматрани не као два, већ као један четвороугао).
329. Може. На пример квадрат, чија је страница $2024 : 4 = 506$. Докажимо да је то и једини такав четвороугао. Ако четвороугао има сва четири права угла он је правоугаоник чије странице имају дужину a и b . Зато што је тангентни је $2a = 2b$, па је $a = b$. Доказ 2: Нека тангентни четвороугао ABCD чији је обим 2024 има целобројне странице чије су дужине $AB = x$, $BC = y$, $CD = 1012 - x$, $1012 - y$. Како су троуглови ABC, BCD, CDA, DAB правоугли из Питагорине теореме се добија да је дијагонала $AC^2 = x^2 + y^2 = (1012 - x)^2 + (1012 - y)^2$, па је $x + y = 1012$. Слично, дијагонала $BD^2 = x^2 + (1012 - y)^2 = y^2 + (1012 - x)^2$, тј. $x = y$, па је $x = y = 506$, $1012 - x = 506$ и $1012 - y = 506$, што доказује да је то квадрат, јер су му по условима задатка сва четири угла права.
330. Види задатак 328.
331. Нека су странице квадра a , b и c . Тада је површина квадра једнака $2(ab + bc + ca) = 2024$, па је $ab + bc + ca = 1012$. Ако је $c = 2$, онда је $ab + 2b + 2a = 1012$. Тада је $ab + 2b + 2a + 4 = 1012 + 4 = 1016$ и $(a + 2)(b + 2) = 8 \cdot 127$. Једно од могућих решења су $a + 2 = 8$ и $b + 2 = 127$, па је $a = 6$ и $b = 125$. Дакле, такав квадар постоји.
332. Како је $44^2 = 1936 < 1937 < \dots < 2023 < 2024 < 2025 = 45^2$, то је и $44 = \sqrt{1936} < \sqrt{1937} < \dots < \sqrt{2023} < \sqrt{2024} < \sqrt{2025} = 45$. Следи да за њихове реципрочне вредности важе следећи низ неједнакости $\frac{1}{45} = \frac{1}{\sqrt{2025}} < \frac{1}{\sqrt{2024}} < \frac{1}{\sqrt{2023}} < \dots < \frac{1}{\sqrt{1937}} < \frac{1}{\sqrt{1936}} = \frac{1}{44}$. У датој неједнакости има тачно $2024 - 1935 = 89$ сабирака па је $\frac{89}{45} < \frac{1}{\sqrt{2024}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1937}} + \frac{1}{\sqrt{1936}} < \frac{89}{44}$. Добија се релација $\frac{89}{45} < \frac{1}{\sqrt{1936}} + \frac{1}{\sqrt{1937}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}} < \frac{89}{44} < \frac{90}{44} = \frac{45}{22}$.

333. Ако на једној од две паралелне праве има m , а на другој n тачака, онда те тачке одређују тачно $mn + 2 = 2024$ праве. То значи да је $mn = 2022 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 337$ и парови бројева (m, n) који одређују тачно 2024 праве су: $(1, 2022)$, $(2, 1011)$, $(3, 674)$, $(6, 337)$, $(337, 6)$, $(674, 3)$, $(1011, 2)$ и $(2022, 1)$. Дакле, таквих парова има тачно 8.
334. Ако се уоче две паралелне праве p и q на којима има 43, односно 47 тачака, онда су тим правима и уоченим тачакама одређене $43 \cdot 47 + 2 = 2021 + 2 = 2023$ различите праве. Ако се уочи још једна тачка ван равни одређене са те 2023 праве, добиће се $1 + 2023 = 2024$ равни. У овом случају $n = 1 + 43 + 47 = 91$.
Друго решење: Нека су a и b две мимоилазне праве. Ако се на правој a уочи m ($m > 1$) тачака, а на правој b уочи $(2024 - m)$ тачака, онда права a са тачкама праве b одређује $2024 - m$ равни и права b са тачкама праве a одређује x равни. Тада 2024 тако уочене тачке одређује $m + 2024 - m = 2024$ равни.
Постоје и друге могућности да се добију 2024 равни.
335. Ако је $3x + 10y = 2024$, онда је једно целобројно решење дате једначине $(8, 200)$, а опште решење једначине у скупу целих бројева $x = 8 - 10k$, $y = 200 + 3k$ (k је неки цео број). Да би решења припадала скупу природних бројева мора бити $x > 0$ и $y > 0$, што значи да је $8 - 10k > 0$ и $200 + 3k > 0$. Следи да је $-200/3 < k < 8/10$ тј. $-66 \leq k \leq 0$, па једначина у скупу $\mathbb{N}$ има 67 решења.
336. Из $||x - 1| - 3| = 2024$ следи да је $|x - 1| - 3 = 2024$ или је $|x - 1| - 3 = -2024$. Из прве једнакости је $|x - 1| = 2027$, а из друге је $|x - 1| = -2021$. Друга једначина нема решења, јер је апсолутна вредност сваког реалног броја ненегативна, а прва једначина има два решења 2028 и -2026 .
337. Ако је x негативно, неједначина је еквивалентна са $|x| \leq 2024$ и $x \in [-2024, 0)$.
Ако је $x \geq 0$, неједначина је еквивалентна са $3|x| = 3x \leq 2024$, тј. $|x| \leq 2024/3$ и $x \in [0, 2024/3]$.
Унија добијених интервала је решење $[-2024, 2024/3]$.
338. Ако је $x < 0$, дата неједначина је еквивалентна са $|x| = 2024$, ако је k непарно и $0 = 2024$, ако је k парно. Према томе за сваки непаран природан број k једначина ће имати целобројно решење $x = -2024$.

Ако је $x \geq 0$, дата неједначина је еквивалентна са $|x| = 2024$, па ће решење једначине бити $2024 : k$ и оно је целобројно за сваки природан број који је делилац броја 2024. Дакле за $k \in \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024\}$.

339. Ако се на продужетку странице BC (преко темена C) изабере тачка D таква да је $\angle CAD = \alpha$, онда су углови троугла ACD редом α , 3α и 3α , па је троугао ACD јенакокрак и $AC = AD = b$ (слика лево). Троугао ABD има углове 2α , 2α и 3α , па је и он једнакокрак и $AD = BD = b$. Следи да је дуж $CD = BD - BC = b - a$. Како је AC симетрала угла BAD, онда на основу теореме о симетрали угла важи пропорција $AB : AD = BC : CD$, односно $c : b = a : (b - a)$. Следи да је $cb - ca = ab$, тј. $ab + ac = bc$ и $a(b + c) = bc$. Тада је $\frac{bc}{b + c} = a = 2024$, што је и требало доказати.



340. Нека је $AC = x$ и $AB = 2 \cdot AC = 2x$ (слика десно). Ако се кроз тачку C конструише прва p паралелна са симетралом AD, онда се продужетак дужи BA (преко темена A) и права p секу у тачки E. У троуглу ACE, $\angle CAE = 60^\circ$, као спољашњи угао троугла ABC, а $\angle ACE = 60^\circ$, јер има паралелене краке са $\angle CAD = 60^\circ$. Тада је троугао ACE једнакостраничан и $AC = AE = CE = x$. Троуглови ABD и BCE су слични (имају све углове једнаке), па из сличности следи пропорција: $AB : BE = AD : CE$, тј. $2x : 3x = 2024 : x$. Из добијене једнакости је $x = 3 \cdot 2024 : 2 = 3036$, па је $AC = 3036$, а $AB = 2 \cdot 3036 = 6072$.

341. Ако се уведе смена променљиве и x замени са $y + 2013$, дата једначина $\frac{x+6}{2019} + \frac{x+7}{2020} + \frac{x+8}{2021} = \frac{x+9}{2022} + \frac{x+10}{2023} + \frac{x+11}{2024}$ постаје $\frac{y+2019}{2019} + \frac{y+2020}{2020} + \frac{y+2021}{2021} = \frac{y+2022}{2022} + \frac{y+2023}{2023} + \frac{y+2024}{2024}$.

Тада је $\frac{y}{2019} + 1 + \frac{y}{2020} + 1 + \frac{y}{2021} + 1 = \frac{y}{2022} + 1 + \frac{y}{2023} + 1 + \frac{y}{2024} + 1$.

У једначини $y \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \right) = 0$

број који је у загради је већи од 0, па према томе и различит од 0 и једначина има јединствено решење $y = 0$. Тада је решење дате једначине $x = y + 2013 = 2013$.

342. Из $\frac{x-2024}{x-2} + \frac{x-2023}{x-3} + 2 = 0$ следи $\frac{x-2024}{x-2} + 1 + \frac{x-2023}{x-3} + 1 = 0$.

Тада је $\frac{x-2024+x-2}{x-2} + \frac{x-2023+x-3}{x-3} = 0$. Добија се да

је $(2x-2026) \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) = 0$, па је $2x-2026 = 0$ и $x = 1013$.

међутим то није и једино решење дате једначине, јер се из једнакости $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} = 0$ се добија и друго решење једначине $x = 5 : 2 = 2,5$.

343. Једна од могућих неједначина је $(x-2024)\sqrt{2024-x} \geq 0$ и њено једино решење је 2024, јер је $x-2024 \geq 0$, а због дефинисаности неједначине мора бити $2024-x \geq 0$. Пресек скупова $x \geq 2024$ и $x \leq 2024$, је број 2024.

344. Једна од могућих једначина је $\frac{x^2-9}{\sqrt{x-2024}} = \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x-2024}}$.

Једнакост је испуњена увек када постоји једначина, а она постоји само када је $x-2024 > 0$, тј. $x > 2024$.

345. Нека су дати бројеви $n+1, n+2 \dots n+13$ и нека је изостављен број $n+k$ ($1 \leq k \leq 13$). Тада важи једнакост $n+1+n+2+\dots+n+13-(n+k) = 2024$, која је еквивалентна са $13n+91-n-k = 2024$ или $12n = k+1933$. Бројеви n и k се добијају из релације $1+1933 \leq 12n \leq 13+1933$. Следи да је $1934 \leq 12n \leq 1946$, па се добија да је $161\frac{1}{6} \leq n \leq 162\frac{1}{6}$.

То значи да је $n = 162$, и $k = 12n - 1933 = 1944 - 1933 = 11$. Дакле ради се о бројевима 163, 164, ... 174, 175, а изостављени број је $162 + 11 = 173$.

346. а) Познато је да је $n \equiv S(n)$ по модулу 9. Нека је $n \equiv a \pmod{9}$. Тада је $n + S(n) \equiv a + a = 2a \pmod{9}$. Како је $2024 \equiv 8 \pmod{9}$, то је $a \equiv 4$, па је a и једнако 4, што значи да је n облика $9k + 4$. У обзир долазе бројеви 2020, 2011, 2002, 1993, 1984, ... Како је $2020 + 4 = 2024$, $2011 + 4 = 2015$, $2002 + 4 = 2008$, $1993 + 22 = 2015$, $1984 + 22 = 2006$... то је једино решење број 2020, јер је $2020 + S(2020) = 2020 + 4 = 2024$ (види задатак 208).

б) Важе конгуенције $n \equiv S(n) \equiv S(S(n)) \pmod{9}$. Нека је $n \equiv b \pmod{9}$. Тада је $n + S(n) + S(S(n)) \equiv b + b + b = 3b \pmod{9}$. Како је $2024 \equiv 8 \pmod{9}$, то $3b$ може бити 8, 17, 26, 35 ... Како $3b$ мора бити дељиво са 3 и мање од 27, то значи да b није природан број и дата једнакост је немогућа.

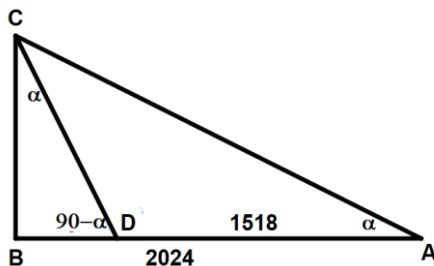
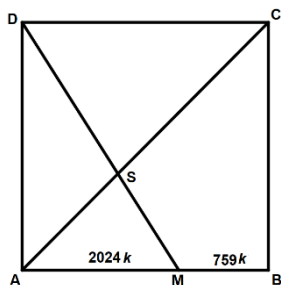
$$347. \text{ Ако је } M = \frac{10^{4048} + 2}{10^{2024} + 1}, \text{ онда је } M = \frac{10^{4048} + 10^{2024} - 10^{2024} - 1 + 3}{10^{2024} + 1} = \\ = \frac{10^{2024}(10^{2024} + 1) - (10^{2024} + 1) + 3}{10^{2024} + 1}, \text{ па } n \leq 10^{2024} - 1 + \frac{3}{10^{2024} + 1},$$

што је мање од $n + 1$, па је $n = 10^{2024} - 1$.

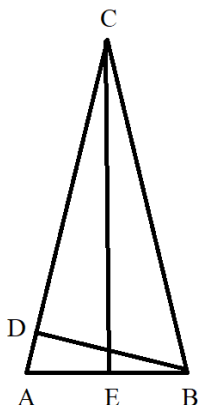
348. Како су катете правоуглог троугла $AC = 3 \cdot 506 = 1518$ и $BC = 4 \cdot 506 = 2024$, то је хипотенуза $AB = 5 \cdot 506 = 2530$. Како симетрала правог угла дели хипотенузу на делове пропорционалне катетама то су дужи $AM = \frac{3}{7} \cdot 2530 = \frac{7590}{7}$ и $BM = \frac{4}{7} \cdot 2530 = \frac{10120}{7}$.

349. Коефицијент сличности троуглова је 2, па ће се површине односити као $2^2 : 1^2 = 4$ и тражена површина троугла $A'B'C'$ једнака је $2024 : 4 = 506 \text{ cm}^2$.

350. Нека се дужи AC и DM секу у тачки S . Троуглови AMS и CDS су слични, јер имају све углове једнаке. Из сличности је $MS : SD = AM : CD = 2024k : (2024k + 759k)$. Из ове једнакости следи да је $MS : SD = 2024k : 2783k = (11 \cdot 184k) : (11 \cdot 253k) = 184 : 253 = (23 \cdot 8) : (23 \cdot 11) = 8 : 11$.



351. Правоугли троуглови ABC и BCD су слични, јер поред правог угла имају и један угао који је једнак α . Из сличности је $AB : BC = BC : BD$, тј. $2024 : BC = BC : (2024 - 1518)$. Добија се да је $BC^2 = AB \cdot BD = 2024 \cdot 506 = 4 \cdot 506 \cdot 506$. Тада је $BC = 1012$ m.
352. Ако је Е средиште странице АВ (подножје висне која одговара основици), онда су правоугли троуглови ACE и ABD слични. Из сличности је $AC : AE = AB : AD$, тј. $2024 : 506 = 1012 : AD$, па је $AD = 506 \cdot 1012 : 2024 = 253$. Тада је $AD : CD = 253 : (2024 - 253) = 253 : 1771 = 1 : 7$. Следи да је $CD = 7 \cdot AD$.



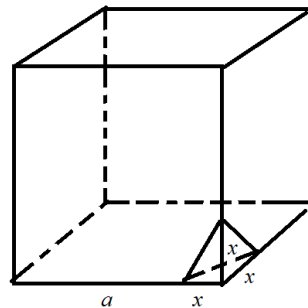
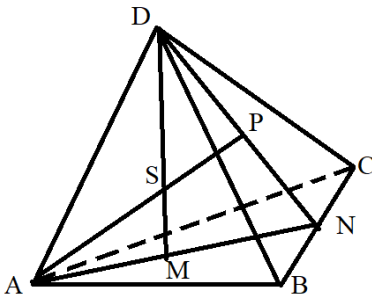
353. Троугао је правоугли па је $a^2 + b^2 = c^2$ и $a < c$ и $b < c$. Тада важи следећа неједнакост $a^{2024} + b^{2024} = a^2 \cdot a^{2022} + b^2 \cdot b^{2022} < a^2 \cdot c^{2022} + b^2 \cdot c^{2022} = c^{2022} (a^2 + b^2) = c^{2022} \cdot c^2 = c^{2024}$.
354. Збир S коефицијената полинома $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ једнак је вредности израза $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$, а то је вредност полинома за $x = 1$. Дакле, збир коефицијената полинома $(x^2 + x + 1)^{2024}$ једнак је $S = (1 + 1 + 1)^{2024} = 3^{2024}$.

355. Како је $7^4 = 49 \cdot 49 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$, то је $7^{2024} = (7^4)^{506} \equiv 1^{506} \equiv 1 \pmod{100}$, и број 7^{2024} завршава цифрама 01. Следи да се број $7^{2024} - 1$ завршава цифрама 00.
356. Ако је $x + y = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$, онда је и $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1$, па је $xy = 0$, што значи да је или $x = 0$, а $y = 1$ или $y = 0$, а $x = 1$. У оба случаја је $x^{2024} + y^{2024} = 1 + 0 = 1$.
357. Ако је $10 \cdot f(x) + f(10x) = x + 2024$, онда се за $x = 0$ добија да је $10 \cdot f(0) + f(0) = 0 + 2024 = 2024$. Следи да је $11 \cdot f(0) = 2024$, па је $f(0) = 2024 : 11 = 184$.
358. Ако је $f(x + 2024) = 2x - 2024$, онда се сменом $x + 2024 = y$, тј. $x = y - 2024$ добија да је $f(y) = 2x - 2024 = 2(y - 2024) - 2024$. Дакле, $f(x) = 2x - 6072$.
359. Ако се из дате пирамиде издвоји троугао AND који је одређен ивицом пирамиде AD и двема бочним висинама пирамиде AN и ND, онда тај троугао као своје висине садржи и две висине пирамиде $H = AP = DM$. Нека се висине пирамиде секу у тачки S. Тада су троуглови AMS и DPS подударни и нека су дужи SM и SP су једнаке и једнаке x .

Како је висина пирамиде $DM^2 = H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$ добија се да

је $H = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Тада је $x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (H - x)^2$, па је $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Тада је $DS : SM = (H - x) : x = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{12}\right) : \frac{a\sqrt{6}}{12} = 3 : 1$.



360. Нека ивица коцке има дужину a , а одсечци на ивицама те пирамиде имају дужину x . Тада је запремина коцке једнака a^3 , а запремина једне пирамиде једнака $\frac{x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^3}{6}$. Страница коцке $a = x + x\sqrt{2} + x$. Следи да је $x = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$. Запремина тела је $a^3 - 8 \cdot \frac{x^3}{6} = a^3 - \frac{8x^3}{6} = \frac{7(\sqrt{2}-1)}{3}a^3 = \frac{7(\sqrt{2}-1)}{3}2024^3$.
361. Како је $2^{10} = 1024 \equiv 24 \pmod{100}$, то је $2^{20} \equiv 24^2 = 576 \equiv 76 \pmod{100}$. Добија се да је $2^{40} = (2^{20})^2 \equiv 76^2 = 5776 \equiv 76 \pmod{100}$. Следи да је $2^{2024} = (2^{40})^{50} \cdot 2^{24} \equiv 76^{50} \cdot 2^{24} \equiv 76 \cdot 76 \cdot 16 \equiv 76 \cdot 16 = 1216 \equiv 16 \pmod{100}$. То значи да се број 2^{2024} завршава цифрама 1 и 6, тј. његов двоцифрени завршетак је 16.
362. Из $3^3 = 27$ следи да је $3^3 \equiv (-1) \pmod{7}$, а $3^{2024} = (3^3)^{674} \cdot 3^2 \equiv (-1)^{674} \cdot 9 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$. Слично је $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$, па је $4^{2024} = (4^3)^{674} \cdot 4^2 \equiv 1^{674} \cdot 16 \equiv 2 \pmod{7}$. То значи да важи релација $3^{2024} + 4^{2024} \equiv 2 + 2 \equiv 4 \pmod{7}$.
363. Нека су странице траженог правоугаоника $2a$ и $2b$, а полупречник круга једнак R . Тада је површина правоугаоника $P = 4ab$, $R^2 = a^2 + b^2$ и $b^2 = R^2 - a^2$. Следи да је $b = \sqrt{R^2 - a^2}$, па је $P = 4a\sqrt{R^2 - a^2} = 4\sqrt{a^2(R^2 - a^2)} \leq 4 \frac{a^2 + R^2 - a^2}{2} = 2R^2 = 2 \cdot 2024^2$ (неједнакост између геометријске и аритметичке средине). Једнакост важи када је $a^2 = R^2 - a^2$ и тада $2a^2 = R^2$, тј. $a = b = 1012\sqrt{2}$. Површина тако добијеног правоугаоника (у суштини је то квадрат) је $P = 4ab = 4a^2 = 2R^2 = 2 \cdot 2024^2$.
364. Ако се квадрира и лева и десна страна тражене неједнакости $\sqrt{2023} + \sqrt{2025} < 2\sqrt{2024}$ добија се еквивалентна неједнакост $2023 + 2\sqrt{2023}\sqrt{2025} + 2025 < 4 \cdot 2024$. Из добијене неједнакости следи да је $2\sqrt{2023} \cdot \sqrt{2025} < 2 \cdot 2024$, па се дељењем са 2 добија $\sqrt{2023} \cdot \sqrt{2025} < 2024$.

Како је $\sqrt{2023} \cdot \sqrt{2025} = \sqrt{2024 - 1} \cdot \sqrt{2024 + 1}$ следи неједнакост $\sqrt{2023} \cdot \sqrt{2025} = \sqrt{2024^2 - 1} < \sqrt{2024^2} = 2024$ чиме је полазна неједнакост доказана.

365. Ако је x позитиван реалан број, онда је $(x + 1)(4x + 1) = 4x^2 + 5x + 1 > 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$. Следи да је $\frac{x+1}{2x+1} > \frac{2x+1}{4x+1}$. Тражена неједнакост се добија ако је $x = 2^{2023}$.

366. Нека је $A = (x - 2022)(x - 2023)(x - 2024)(x - 2025) + 1,0001$. Ако је $x - 2022 = y$, онда је $A = y(y - 1)(y - 2)(y - 3) + 1,0001 = (y^2 - 3y)(y^2 - 3y + 2) + 1,0001$. Трансформацијом претходне једнакости добија се $A = (y^2 - 3y)^2 + 2(y^2 - 3y) + 1 + 0,0001 = (y^2 - 3y + 1)^2 + 0,0001 > 0$.

ТАБЛИЦА ПРОСТИХ БРОЈЕВА ДО БРОЈА 5087

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889
1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053
2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129
2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213

2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287
2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357
2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423
2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531
2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617
2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741
2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819
2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999
3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257
3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331
3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511
3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571
3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821
3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989
4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231
4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297
4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493
4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583
4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751
4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003
5009	5011	5021	5023	5039	5051	5059	5077	5081	5087

Аутори: *др Војислав Андрић*
др Валентина Гоговска

ЗАДАЦИ У ВЕЗИ СА БРОЈЕМ 2024

Издавач: *Математички клуб „Диофант“*
Ваљево, Поп Лукина 38

За издавача: *Војислав Андрић*

Рецензенти: *Љубица Киселички*
Јованка Свркота
Верица Марковић

Уредник: *Иванка Томић*

Дизајн корица: *Душан Арсенић*

ISBN: ISBN

Тираж: 500 примерака

Штампа: *Штампарија Ћук, Земун*

CIP – каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)(079.1)

АНДРИЋ, Војислав, 1953-

Задачи у вези са бројем 2024 / Војислав
Андрић, Валентина Гоговска. - Ваљево :
Математички клуб „Диофант“, 2024 (Земун :
Ћук). - 96 стр. : илустр. ; 25 cm

Тираж 500. - Напомене уз текст.

ISBN 978-86-6148-004-1

1. Гоговска, Валентина, 1973- [аутор]

COBISS.SR-ID 158243593