

XLIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Запиши ги сите броеви чиј производ на цифри е еднаков на 56.

Решение. Едноцифрените делители на бројот 56 се броевите: 1, 2, 4, 7 и 8. Меѓу нив има две различни тројки броеви чиј производ е еднаков на 56 и тоа: $1 \cdot 7 \cdot 8 = 56$ и $2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$. Според тоа, бараните броеви се: 178, 187, 718, 781, 817, 871 и 247, 274, 427, 472, 724, 742.

Задача 2. Во некои полињата на табелата се запишани знаците $\blacktriangle$, $\blacksquare$, $\bullet$ и $\heartsuit$, при што на исти знаци соодветствуваат исти броеви. Во секој ред и под секоја колона е запишан збирот на броевите кои соодветствуваат на знаците кои се наоѓаат во соодветниот ред, односно колона. Определи ги броевите кои соодветствуваат на знаците $\blacktriangle$, $\blacksquare$, $\bullet$ и $\heartsuit$.

$\blacktriangle$	$\blacksquare$		$\bullet$	14
$\blacksquare$	$\heartsuit$	$\blacksquare$		16
$\heartsuit$	$\blacktriangle$	$\bullet$	$\blacktriangle$	23
$\bullet$	$\blacksquare$	$\bullet$	$\blacktriangle$	15
20	24	7	17	

Решение. *Прв начин.* Во првата колона се наоѓаат сите знаци, а во првата редица не е запишан знакот $\heartsuit$, па затоа на овој знак соодветствува бројот $20 - 14 = 6$. Понатаму, од втората редица следува дека на знакот $\blacksquare$ соодветствува бројот $(16 - 6) : 2 = 5$. Сега, од третата колона следува дека на знакот $\bullet$ соодветствува бројот $(7 - 5) : 2 = 1$, а од четвртата колона следува дека на знакот $\blacktriangle$ соодветствува бројот $(17 - 1) : 2 = 8$.

Втор начин. Првата и втората колона се разликуваат по тоа што $\bullet$ е заменето со $\blacksquare$ и на тој начин збирот се зголемил за $24 - 20 = 4$. Сега, ако во третата колона $\blacksquare$ го замениме со $\bullet$, ќе добиеме три знаци $\bullet$ и збирот е се намли за 4, т.е. ќе биде $7 - 4 = 3$. Значи, знакот $\bullet$ соодветствува на бројот $3 : 3 = 1$. Понатаму, од четвртата колона добиваме дека знакот $\blacktriangle$ соодветствува на бројот $(17 - 1) : 2 = 8$, од третата колона следува дека знакот $\blacksquare$ соодветствува на бројот $7 - 2 \cdot 1 = 5$ и од парвата колона следува дека знакот $\heartsuit$ соодветствува на бројот $20 - (1 + 5 + 8) = 6$.

Забелешка. Постојат и други начини за решавање на задачата, бидејќи истата е преопределена (треба да определиме четири знаци кои задоволуваат четири линеарни равенки, а ни се дадени осум линеарни равенки).

Задача 3. Елена нацртала правоаголник на кој едната страна е подолга од другата страна за 5 cm. Потоа, над двете пократки страни на правоаголникот таа нацртала по два рамностранни триаголници (такви што страните им се со еднакви должини), како на цртежот. Ако периметарот (обиколката) на добиената форма е 94 cm, колкав е периметарот на правоаголникот?



Решение. Нека должината на страната на рамностранните триаголници (изразена во сантиметри) е x .

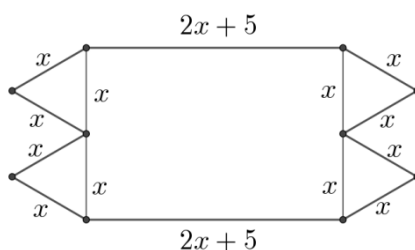
Тогаш должината на пократката страна на правоаголникот е $x + x = 2x$, а должината на подолгата страна е $2x + 5$. Понатаму, периметарот на добиената форма е еднаков на

$$2(4x + 2x + 5) = 12x + 10,$$

па затоа $12x + 10 = 94$, од каде следува

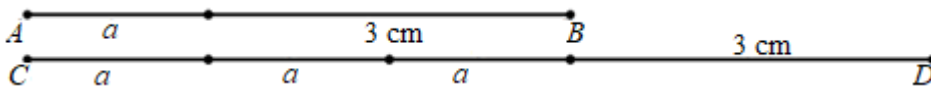
$x = 7$ cm. Конечно, периметарот на правоаголникот е

$$L = 2(2x + 2x + 5) = 8x + 10 = 8 \cdot 7 + 10 = 56 \text{ cm}.$$



Задача 4. Должините на две отсечки се разликуваат за 3 cm. Ако секоја отсечка ја скратиме за 3 cm, тогаш едната од добиените отсечки ќе биде три пати подолга од другата. Определи ги должините на дадените отсечки.

Решение. Нека пократката отсечка е AB , а подолгата отсечка е CD (види цртеж).



Според условот на задачата имаме $\overline{CD} = \overline{AB} + 3$ и $\overline{CD} - 3 = 3(\overline{AB} - 3)$. Ако од првото равенство замениме во второто, добиваме

$$\overline{AB} + 3 - 3 = 3(\overline{AB} - 3), \text{ т.е. } \overline{AB} = 3\overline{AB} - 9.$$

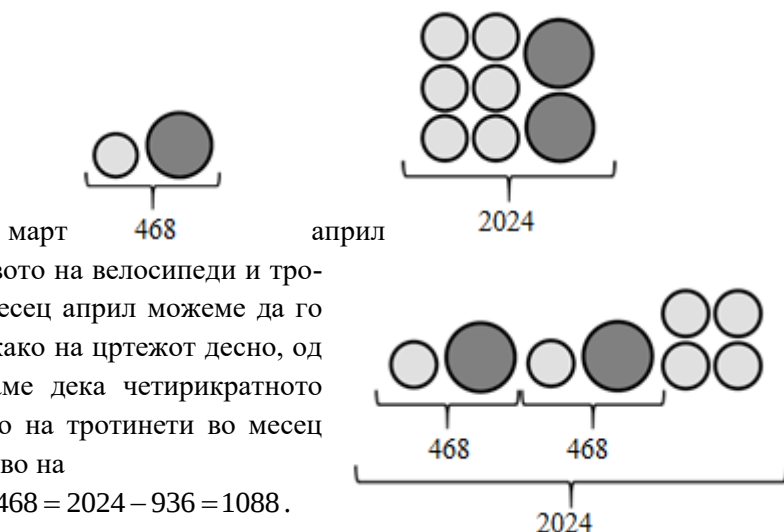
Значи, $2\overline{AB} = 9$, односно $\overline{AB} = 4,5$ cm. Конечно, $\overline{CD} = 4,5 + 3 = 7,5$ cm.

V одделение

Задача 1. Во една фабрика се произведуваат велосипеди и тротинети.

Во месец март биле произведени вкупно 468 велосипеди и тротинети. Во месец април биле произведени 2 пати повеќе велосипеди и 6 пати повеќе тротинети отколку во месец март. Ако во месец април бели произведени вкупно 2024 велосипеди и тротинети, колку велосипеди и колку тротинети биле произведени во месец март?

Решение. *Прв начин.* Со  да го означиме бројот на тротинетите, а со  да го означиме бројот на велосипедите произведени во месец март. Тогаш од условот на задачата имаме



Производството на велосипеди и тротинети во месец април можеме да го прикажеме како на цртежот десно, од каде добиваме дека четирикратното производство на тротинети во месец март е еднакво на

$$2024 - 2 \cdot 468 = 2024 - 936 = 1088.$$

Значи, во месец март се произведени $1088 : 4 = 272$ тротинети, па затоа бројот на велосипедите произведени во овој месец е $468 - 272 = 196$.

Втор начин. Ако со x го означиме бројот на тротинетите произведени во месец март, тогаш во овој месец се произведени $468 - x$ велосипеди. Сега, во месец април се произведени $6x$ тротинети и $2(468 - x)$ велосипеди, па затоа $6x + 2(468 - x) = 2024$, од каде последователно добиваме

$$6x + 936 - 2x = 2024, \quad 4x = 1088, \quad x = 272.$$

Значи, во месец март се произведени 272 тротинети и $468 - 272 = 196$ велосипеди.

Задача 2. Ѓорѓи запишал трицифрен број со три различни непарни цифри. Ги помножил цифрите на бројот и добил нов број. Потоа ги помножил цифрите на новодобиениот број. Продолжил со множење на цифрите

на секој нов број се додека не добил едноцифрен број. Колку трицифрени броеви постојат, запишани со три различни непарни цифри, од кои со опишаната постапка се добива бројот нула? Кои се тие броеви?

Решение. Можните броеви се формирани со три различни цифри од цифрите 1, 3, 5, 7 или 9. Во првиот чекор ги добиваме броевите:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15 & \quad 1 \cdot 3 \cdot 7 = 21 & \quad 1 \cdot 3 \cdot 9 = 27 & \quad 1 \cdot 5 \cdot 7 = 35 & \quad 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45 \\ 1 \cdot 7 \cdot 9 = 63 & \quad 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 & \quad 3 \cdot 5 \cdot 9 = 135 & \quad 3 \cdot 7 \cdot 9 = 189 & \quad 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315. \end{aligned}$$

Во вториот чекор ги добиваме броевите

$$\begin{aligned} 1 \cdot 5 = 5 & \quad 2 \cdot 1 = 2 & \quad 2 \cdot 7 = 14 & \quad 3 \cdot 5 = 15 & \quad 4 \cdot 5 = 20 \\ 6 \cdot 3 = 18 & \quad 1 \cdot 0 \cdot 5 = 0 & \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15 & \quad 1 \cdot 8 \cdot 9 = 72 & \quad 3 \cdot 1 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

Продолжувајќи ја постапката со двоцифрените броеви (едноцифрените ги препишуваме), прво добиваме

$$\begin{aligned} 5 & \quad 2 & \quad 1 \cdot 4 = 4 & \quad 1 \cdot 5 = 5 & \quad 2 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 8 = 8 & \quad 0 & \quad 1 \cdot 5 = 5 & \quad 7 \cdot 2 = 14 & \quad 1 \cdot 5 = 5 \end{aligned}$$

и на крајот имаме

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 4 & 5 & 0 & \\ 8 & 0 & 5 & 1 \cdot 4 = 4 & 5 & \end{array} \quad \text{т.е.} \quad \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 4 & 5 & 0 & \\ 8 & 0 & 5 & 4 & 5 & \end{array}$$

Според тоа, на опишаниот начин бројот 0 може да се добие само од броевите запишани со цифрите 1, 5, 9 и од броевите запишани со цифрите 3, 5, 7. Во првиот случај тоа се броевите: 159, 195, 591, 519, 951, 915, а во вториот случај тоа се броевите: 357, 375, 573, 537, 735, 753. Значи, вкупно имаме $6 + 6 = 12$ броеви со саканото својство.

Задача 3. На еден спортски камп учествувале 400 деца. Една десеттина од нив биле фудбалери. Вкупниот број на кошаркарите и одбојкарите е двојно поголем од бројот на фудбалерите, при што кошаркарите биле за 20 повеќе од одбојкарите. Останатите биле ракометари и пливачи, при што ракометарите биле 3 пати повеќе од пливачите. Колку фудбалери, кошаркари, одбојкари, пливачи и ракометари имало на кампот?

Решение. На кампот имало $\frac{1}{10} \cdot 400 = 40$ фудбалери. Понатаму, вкупно имало $2 \cdot 40 = 80$ кошаркари и одбојкари. Ако со x го означиме бројот на одбојкарите, тогаш бројот на кошаркарите е $x + 20$. Значи, $x + x + 20 = 80$, од каде добиваме $x = 30$. Според тоа, на кампот имало 30 одбојкари и $30 + 20 = 50$ кошаркари.

Од условот на задачата следува дека вкупниот број ракометари и пливачи е $400 - (40 + 80) = 280$. Ако со y го означиме бројот на пливачи-

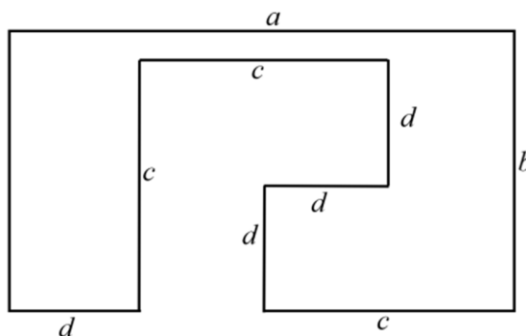
те, тогаш бројот на ракометарите е $3y$. Значи, $y + 3y = 280$, од каде добиваме $y = 70$. Конечно, на кампот имало 70 пливачи и $280 - 70 = 210$ ракометари.

Задача 4. Пресметај ги периметарот и плоштината на дадената фигура ако

$$a = 16 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}.$$

Решение. Прво да забележиме дека $c = 2d$. Периметарот на дадената фигура е

$$\begin{aligned} L &= a + 2b + 3c + 4d \\ &= a + 2b + 3c + 2c \\ &= a + 2b + 5c \\ &= 16 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 8 = 76 \text{ cm}. \end{aligned}$$



Плоштината на фигурата може да се пресмета како плоштина на правоаголник со страни a и b намалена за плоштината на три квадрати со страни $d = c : 2 = 4 \text{ cm}$. Значи,

$$P = a \cdot b - 3d \cdot d = 16 \cdot 10 - 3 \cdot 4 \cdot 4 = 160 - 48 = 112 \text{ cm}^2.$$

VI одделение

Задача 1. Пресметај го збирот на сите дробки од видот $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$), ако $m < n$ и производот на броителот и именителот на секоја од дробките е еднаков на 30 .

Решение. Од $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ и условот $m < n$ следува дека дробките чиј збир треба да го определиме се $\frac{1}{30}, \frac{2}{15}, \frac{3}{10}, \frac{5}{6}$. Имаме,

$$\frac{1}{30} + \frac{2}{15} + \frac{3}{10} + \frac{5}{6} = \frac{1+4+9+25}{30} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10} = 1,3.$$

Задача 2. Правилен многуаголник со страна $1m$ има вкупно 464 дијагонали. Пресметај го периметарот на овој многуаголник.

Решение. Имаме $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, од каде следува $\frac{n(n-3)}{2} = 464$, односно $n(n-3) = 928$. Но,

$928 = 2 \cdot 464 = 2 \cdot 2 \cdot 232 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 116 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 58 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 29 = 32 \cdot 29$, па затоа $n(n-3) = 32 \cdot 29 = 32 \cdot (32 - 3)$, од каде добиваме $n = 32$. Конечно,

периметарот на многуаголникот е $L = 32a = 32 \cdot 1\text{ m} = 32\text{ m}$.

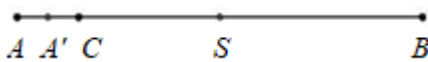
Задача 3. Теодор купил чевли со $\frac{2}{7}$ од паритие што ги имал. Потоа, со 40% од остатокот купил пантолони. Откако купил чевли и пантолони, тој купил и маица со $\frac{1}{3}$ од парите кои што му останале. По сите купувања на Теодор му преостанале 2600 денари. Колку пари имал Теодор на почетокот?

Решение. *Прв начин.* Сумата која му преостанала на крајот е еднаква на $\frac{2}{3}$ од сумата која Теодор ја имал пред да ја купи маицата. Значи, пред да ја купи маицата Теодор имал $2600 : \frac{2}{3} = 2600 \cdot \frac{3}{2} = 3900$ денари. Овие 3900 денари се 60% од сумата која Теодор ја имал пред да ги купи пантлоните. Значи, пред да ги купи пантлоните тој имал $3900 : \frac{60}{100} = 3900 \cdot \frac{100}{60} = 6500$ денари. Овие 6500 денари се $\frac{5}{7}$ од парите кои Теодор ги имал пред да ги купи чевлите. Значи, на почетокот Теодор имал $6500 : \frac{5}{7} = 6500 \cdot \frac{7}{5} = 9100$ денари.

Втор начин. Нека x е почетната сума која ја имал Теодор. Тој за купување на чевлите поттрошил $\frac{2}{7}x$ денари и му останале $\frac{5}{7}x$ денари. Понатаму, за купување на панталоните поттрошил $40\% \cdot \frac{5}{7}x = 0,4 \cdot \frac{5}{7}x = \frac{2}{7}x$ денари и му останале $\frac{5}{7}x - \frac{2}{7}x = \frac{3}{7}x$ денари. Бидејќи за маицата поттрошил $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}x = \frac{1}{7}x$ денари, на крајот му останале $\frac{3}{7}x - \frac{1}{7}x = \frac{2}{7}x$ денари. Значи, $\frac{2}{7}x = 2600$, од каде добиваме $x = 2600 \cdot \frac{7}{2} = 9100$ денари.

Задача 4. Отсечката $\overline{AB}$, $\overline{AB} = 192\text{ cm}$ е поделена на отсечки со еднаква должина така што една крајна точка на првата отсечка е точката A , а една крајна точка на последната отсечка е B . Растојанието од средината на првата отсечка до средината на отсечката $\overline{AB}$ е 90 cm . На колку отсечки е поделена отсечката $\overline{AB}$.

Решение. Нека S е средината на отсечката $\overline{AB}$ и A' е средината на првата отсечка $\overline{AC}$. Тогаш $\overline{AS} = 192 : 2 = 96\text{ cm}$ и $\overline{A'S} = 90\text{ cm}$. Затоа



$$\overline{AA'} = \overline{AS} - \overline{A'S} = 96 - 90 = 6 \text{ cm}.$$

Според тоа, $\overline{AC} = 2\overline{AA'} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}$, што значи дека отсечката AB е поделена на $192:12=16$ делови.

VII одделение

Задача 1. Марко имал определена сума на пари, со кои купил две тетратки со различна големина и различна цена. Познато е дека 4,5% од цената на поголемата тетратка е еднаква на 8,5% од цената на помалата тетратка. По купување на тетратките на Марко му останале 72 денари, што е еднакво на разликата на цената на поголемата и цената на помалата тетратка. Колку пари имал Марко на почеток?

Решение. Цената на големата тетратка да ја означиме со x , а цената на малата тетратка со y . Од условите на задачата следува $\frac{4,5}{100}x = \frac{8,5}{100}y$ и $x - y = 72$, од каде добиваме $x = \frac{17}{9}y$ и $x - y = 72$. Со замена од првата во втората равенка добиваме $\frac{17}{9}y - y = 72$, од каде следува $y = 81$. Според тоа, $x = 81 + 72 = 153$. Значи, Марко на почетокот имал $163 + 81 + 72 = 306$ денари.

Задача 2. Група работници за 4 дена ја провериле сообраќајната сигнализација на еден магистрален пат. Првиот ден провериле вдолж $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден трипати повеќе од првиот ден, третиот ден за 60 km повеќе од вториот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри од патот колку што провериле првиот и вториот ден заедно. Определи ја должината на магистралниот пат.

Решение. Нека со x ја означиме должината на магистралниот пат. Од условот на задачата следува дека првиот ден работниците провериле $\frac{1}{17}x$, вториот ден проверила $\frac{3}{17}x$, третиот ден $\frac{3}{17}x + 60$ и четвртиот ден $\frac{1}{17}x + \frac{3}{17}x = \frac{4}{17}x$. Според тоа,

$$\begin{aligned} \frac{1}{17}x + \frac{3}{17}x + \frac{3}{17}x + 60 + \frac{4}{17}x &= x \Leftrightarrow \frac{11}{17}x + 60 = x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - \frac{11}{17}x &= 60 \Leftrightarrow \frac{6}{17}x = 60 \Leftrightarrow x = 170. \end{aligned}$$

Значи, должината на патот е 170 km.

Задача 3. Во месец март 2025 година, Калина ќе наполни онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината од нејзиното раѓање. Која година е родена Калина?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи годината на раѓање на Калина е најмногу четирицифрен број, таа има помалку од $4 \cdot 9 = 36$ години. Тоа значи дека Калина е родена во овој или минатиот век.

Ако Калина е родена минатиот век, тогаш годината на нејзиното раѓање е $\overline{19xy}$. Оттука следува дека $2025 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$, па затоа $2025 - 1900 - 10x - y = 10 + x + y$, т.е. $11x + 2y = 115$, каде $x, y \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$. Сега, ако $x \leq 8$, тогаш $11x + 2y \leq 88 + 18 = 106 < 115$, а за $x = 9$, добиваме $99 + 2y = 115$, т.е. $y = 8$. Значи, Калина е родена 1998 година.

Ако Калина е родена овој век, тогаш годината на нејзиното раѓање е $\overline{20xy}$. Оттука следува равенството $2025 - \overline{20xy} = 2 + 0 + x + y$, па затоа $2025 - 2000 - 10x - y = 2 + x + y$, т.е. $11x + 2y = 23$, каде $x, y \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$. Сега, ако $x \geq 3$, тогаш $11x + 2y \geq 33 > 23$. Понатаму,

- за $x = 0$, добиваме $2y = 23$, што не е можно,
- за $x = 1$, добиваме $2y = 12$, т.е. $y = 6$ и
- за $x = 2$, добиваме $2y = 1$, што не е можно.

Значи, Калина е родена 2016 година.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека Калина е родена 1998 или 2016 година.

Втор начин. Нека Калина е родена во $\overline{xyzt}$ година. Од условот на задачата следува $2025 = \overline{xyzt} + x + y + z + t$ т.е. $1001x + 101y + 11z + 2t = 2025$, каде $x, y, z, t \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$. Сега,

- за $x = 0$ добиваме $1001x + 101y + 11z + 2t \leq 1026 < 2025$,
- за $x \geq 3$ добиваме $1001x + 101y + 11z + 2t \geq 3003 > 2025$,
- за $x = 1$ добиваме $101y + 11z + 2t = 1024$. Сега, ако $y \leq 8$, тогаш $101y + 11z + 2t \leq 925 < 1024$, а за $y = 9$ наоѓаме $11z + 2t = 115$, од каде како при првиот начин на решавање добиваме $z = 9, t = 8$, т.е. Калина е родена во 1998 година.
- за $x = 2$ добиваме $101y + 11z + 2t = 23$. Сега, е јасно дека $y = 0$, па затоа $11z + 2t = 23$, од каде како при првиот начин на решавање добиваме $z = 1, t = 6$, т.е. Калина е родена во 2016 година.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека Калина е родена 1998 или 2016 година.

Задача 4. Во $\triangle ABC$ симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се сечат во точката S . Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$ ако $\angle ASC = 110^\circ$ и $\angle BAC$ е трипати поголем од $\angle ABC$.

Решение. Нека $x = \angle SAC$ и $y = \angle SCA$ се внатрешните агли на $\triangle ASC$. Тогаш

$$\begin{aligned}x + y &= \angle SAC + \angle SCA \\&= 180^\circ - \angle ASC = 70^\circ.\end{aligned}$$

Понатаму,

$$\angle BAC = 2x \text{ и } \angle ACB = 2y,$$

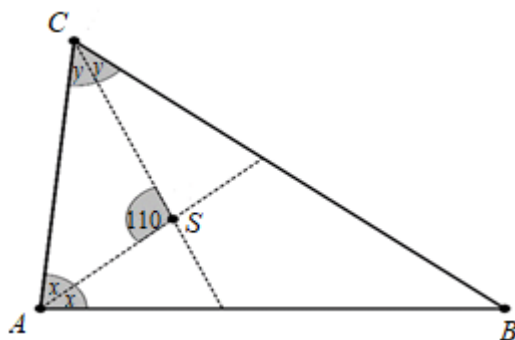
па затоа од $\triangle ABC$ следува

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 2x - 2y \\&= 180^\circ - 2(x + y) = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ.\end{aligned}$$

Конечно,

$$\angle BAC = 3\angle ABC = 3 \cdot 40^\circ = 120^\circ \text{ и}$$

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$



VIII одделение

Задача 1. Во една фабрика за чоколади дневното производство се пакува во идентични кутии. Притоа, во секоја кутија има точно определен еднаков број на чоколади. Еден ден, заради проблеми со набавката на стандардните кутии, останале незапакувани 600 чоколади. Останатите чоколади од тој ден биле запакувани во 180 еднакви, но помали кутии, па во секоја кутија имало по 5 чоколади помалку од вообичаеното. Доколку за пакување се користеле стандардните кутии, потребни се 10 кутии помалку и ќе останале незапакувани само 60 чоколади. Определи го бројот на чоколади произведени тој ден, ако немало незапакувани чоколади од претходните денови!

Решение. Нека x е бројот на чоколадите што вообичаено се пакува во една кутија. Во секоја од помалите 180 кутии биле запакувани по $x - 5$ чоколади, па затоа вкупниот број чоколади е $180(x - 5) + 600$. Од друга

страна, ако се користеле стандардни кутии, тогаш биле потребни 170 кутии, па затоа вкупниот број чоколади е $170x + 60$. Значи,

$$180(x - 5) + 600 = 170x + 60,$$

од каде добиваме $x = 36$.

Конечно, тој ден се произведени $170 \cdot 36 + 60 = 6180$ чоколади.

Задача 2. Определи ги сите прости броеви p такви што и $p + 16$ и $p + 20$ се прости броеви.

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p + 16 = 18$ и $p + 20 = 22$ се сложени броеви. За $p = 3$, броевите $p + 16 = 19$ и $p + 20 = 23$ се прости. Понатаму, ако p е прост број поголем од 3, тогаш $p = 3k + 1$ или $p = 3k + 2$, за некој природен број k . Ако $p = 3k + 1$, тогаш $p + 20 = 3k + 1 + 20 = 3(k + 7)$ е сложен број, а ако $p = 3k + 2$, тогаш $p + 16 = 3k + 2 + 16 = 3(k + 6)$ е сложен број. Конечно, единствено решение е $p = 3$.

Задача 3. Нека a , b и c се три различни природни броеви така што $2024 - a$, $2024 - b$ и $2024 - c$ се полни квадрати на природни броеви и

$$(2024 - a)(2024 - b)(2024 - c) = 2025. \quad (1)$$

Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот $a + b + c$.

Решение. Нека a, b, c се различни природни броеви. Од условот на задачата следува дека постојат различни природни броеви m, n, p такви што

$$2024 - a = m^2, \quad 2024 - b = n^2 \quad \text{и} \quad 2024 - c = p^2.$$

Ако ги собереме последните три равенства, по средувањето добиваме

$$a + b + c = 3 \cdot 2024 - (m^2 + n^2 + p^2).$$

Од друга страна од (1) добиваме $m^2 n^2 p^2 = 2025$. Сега, бидејќи m^2, n^2, p^2 се различни броеви можни се само две претставувања

$$2025 = 1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 15^2.$$

Ако $m^2 n^2 p^2 = 1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2$, тогаш $m^2 + n^2 + p^2 = 1^2 + 5^2 + 9^2 = 107$, па затоа $a + b + c = 3 \cdot 2024 - 107 = 5965$.

Ако $m^2 n^2 p^2 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 15^2$, тогаш $m^2 + n^2 + p^2 = 1^2 + 3^2 + 15^2 = 235$, па затоа $a + b + c = 3 \cdot 2024 - 235 = 5837$.

Конечно, најмалата вредност на изразот $a + b + c$ е 5837, а најголемата негова вредност е 5965.

Задача 4. Нека E и F се точки на страните AB и BC на квадратот со $ABCD$ со страна 1 cm и нека $\angle DCF = 70^\circ$ и $\angle EDF = 45^\circ$. Определи ги $\angle FED$ и периметарот на $\triangle BFE$.

Решение. Нека $\overline{CF} = x, \overline{AE} = y$.

Имаме:

$$\angle FDC = 90^\circ - \angle DFC = 20^\circ$$

$$\angle EDA = 90^\circ - \angle EDF - \angle FDC = 25^\circ$$

$$\angle DEA = 90^\circ - \angle EDA = 65^\circ.$$

Нека G е точка на продолжението на полуправата BA таква што $\overline{AG} = \overline{CF} = x$. За триаголниците

GAD и FCF имаме: $\overline{AG} = \overline{CF}$,

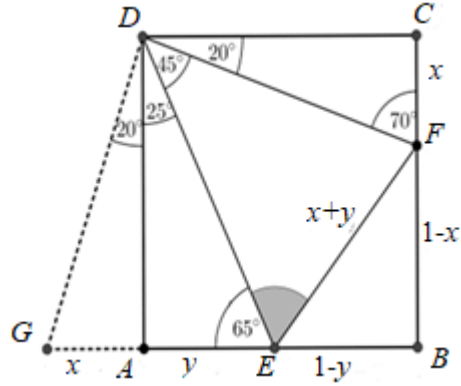
$$\overline{AD} = \overline{CD} \text{ и } \angle GAD = \angle FCD,$$

па затоа тие се складни. Според тоа, $\overline{DG} = \overline{DF}$ и $\angle GDA = \angle FDC = 20^\circ$. Значи, $\angle GDE = \angle GDA + \angle ADE = 45^\circ$.

Сега $\overline{DE} = \overline{DE}$, $\overline{DG} = \overline{DF}$ и $\angle GDE = \angle EDF$, па затоа $\triangle GDE \cong \triangle FDE$.

Значи, $\angle FED = \angle GED = \angle AED = 65^\circ$ и $\overline{EF} = \overline{GE} = x + y$.

Конечно, $L_{\triangle BFE} = \overline{EF} + \overline{EB} + \overline{BF} = x + y + 1 - y + 1 - x = 2\text{ cm}$.



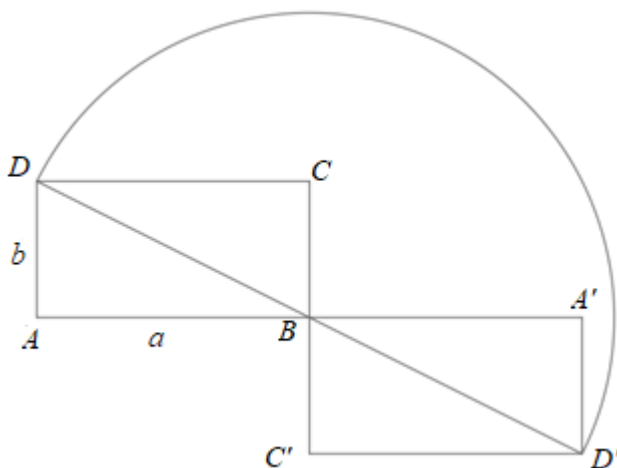
IX одделение

Задача 1. Правоаголник $ABCD$ со целобројни должини на страни и плоштина 99 cm^2 ротира во рамнината во која лежи околу едно негово теме за 180° и при ротацијата тој опишува фигура. Вака добиената фигура има плоштина $k\text{ cm}^2$. Определи ја најмалата можна вредност на k .

Решение. Нека a и b се целобројни должини на страните на правоаголникот. Го ротираме правоаголникот (на пример во насока на стрелките на часовникот) за 180° околу темето B . Плоштината на добиената фигура е збир од плоштината на полукругот со радиус $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2}$ и плоштините на триаголниците ABD и $C'D'B$, т.е.

$$m = \frac{1}{2}\pi \overline{BD}^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) + ab,$$

$$m = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) + 99.$$



Според тоа, бараната плоштина ќе биде минимална кога изразот $a^2 + b^2$ прима минимална вредност. Сега, бидејќи a и b се природни броеви, од $ab = 99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11$ заклучуваме дека изразот $a^2 + b^2$ прима минимална вредност за $a = 9, b = 11$ или $a = 11, b = 9$. Тогаш $a^2 + b^2 = 11^2 + 9^2 = 202$ и најмалата вредност на m е $m = 101\pi + 99$.

Задача 2. Нека A е множеството од сите двоцифрени природни броеви n , за кои со бришење на последната цифра се добива број кој е делител на n . Колку елементи има множеството A ?

Решение. Нека $n = 10a + b$ е број од множеството A . Ако ја избришеме последната цифра b , ќе остане само цифрата a , па затоа важи $a | n = 10a + b$, од каде следува $a | b$.

Ако $b = 0$, тогаш секој двпцифрен број чија цифра на единиците е 0 го задоволува условот на задачата, т.е. припаѓа на множеството A . Тоа се броевите: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Ако $b \neq 0$, тогаш од $a | b$ следува дека други броеви кои го задоволуваат условот на задачата се: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88 и 99.

Според тоа, множеството A има 32 елементи.

Задача 3. Во едно истражување неколку ученици се прашани дали ја сакаат црвената боја. Точно 2% од момчињата одговориле дека ја сакаат и точно 59% од девојчињата одговориле дека ја сакаат. Во вкупниот број ученици пак, точно 17% од сите ученици ја сакаат црвената боја. Определи

го најмалиот можен број ученици во ова истражување.

Решение. Нека x е бројот на момчињата кои учествувале во истражувањето и y е бројот на девојчињата кои учествувале во истражувањето. Според условот на задачата $\frac{2}{100}x = 0,02x$ момчиња, $\frac{59}{100}y = 0,59y$ девојчиња, односно $\frac{17}{100}(x+y) = 0,17(x+y)$ од сите деца ја сакаат црвената боја. Затоа $0,02x + 0,59y = 0,17(x+y)$, од каде добиваме $2x + 59y = 17(x+y)$, односно $15x = 42y$. Значи, $x:y = 14:5$. Според тоа, постои природен број k таков што $x = 14k$, $y = 5k$, па затоа $x+y = 19k$.

Понатаму, $0,17(x+y) = \frac{17 \cdot 19k}{100}$ треба да е природен број, од каде бидејќи $\text{NZD}(17 \cdot 19, 100) = 1$ добиваме дека $100 | k$. Притоа најмалата вредност се добива за $k = 100$, што значи дека најмалиот број учесници во истражувањето е $x+y = 19 \cdot 100 = 1900$.

Притоа, $x = 1400$, $0,02x = 28$, $y = 500$, $0,59y = 295$ и $0,17(x+y) = 323$.

Задача 4. Две кружници k_1 и k_2 , со радиуси 1 cm и 3 cm , соодветно се допираат во точката A . Заедничката тангента која не ја содржи точката A ги допира кружниците k_1 и k_2 во точките B и C , доодветно. Пресметај го збирот $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$.

Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на кружниците k_1 и k_2 , соодветно и нека S е пресечната точка на тангентата која минува низ точката A и тангентата која минува низ точките B и C . Тогаш од својствата на тангентните отсечки следува $\overline{SB} = \overline{SA} = \overline{SC}$, што значи дека триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето A . Сега, од Питагоровата теорема следува $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$.

Низ центарот O_1 повлекуваме права паралелна на правата BC , која правата O_2C ја сече во точката P . Тогаш

$$\overline{BC} = \overline{O_1P}, \quad \overline{O_2P} = \overline{O_2C} - \overline{O_1B} = 2\text{ cm} \quad \text{и} \quad \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A} + \overline{AO_2} = 4\text{ cm}.$$

Понатаму триаголникот O_1O_2P е правоаголен, па затоа

$$\overline{O_1P}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_2P}^2 = 4^2 - 2^2 = 12\text{ cm}.$$

Конечно,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2\overline{BC}^2 = 2\overline{O_1P}^2 = 24\text{ cm}.$$

