

Регионален натпревар 2025

I година

1АБ. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што

$$xyz(x + y + z) = 2024.$$

а) Докажи дека

$$(x^2 + \frac{2024}{y^2})(y^2 + \frac{2024}{z^2})(z^2 + \frac{2024}{x^2}) = (x + y)^2(y + z)^2(z + x)^2. \quad (1)$$

б) Дали постои барем една тројка природни броеви (x, y, z) кои го задоволуваат равенството (1).

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2024}{y^2} &= x^2 + \frac{xyz(x+y+z)}{y^2} = x^2 + \frac{xz(x+y+z)}{y} = \frac{x^2y + xz(x+y+z)}{y} \\ &= \frac{x(zy + zx + zy + z^2)}{y} = \frac{x(x(y+z) + z(y+z))}{y} = \frac{x(x+y)(y+z)}{y}. \end{aligned}$$

Аналогно се добива

$$y^2 + \frac{2024}{z^2} = \frac{y(y+x)(x+z)}{z}, \quad z^2 + \frac{2024}{x^2} = \frac{z(x+y)(y+z)}{x}.$$

Конечно, ако ги помножиме горните равенства, го добиваме равенството (1).

б) Лесно се гледа за $x=1, y=1, z=44$ важи $xyz(x+y+z) = 2024$, па затоа важи и равенството (1).

2А. Нека a и b се цели броеви такви што $a^2 + 2b$ е квадрат на цел број. Докажи дека $a^2 + b$ може да се запише како збир на квадрати на два цели броја.

Решение. Нека $a^2 + 2b = k^2, k \in \mathbb{Z}$. Тогаш $b = \frac{k^2 - a^2}{2}$ е цел број, што значи дека броевите a и k се со иста парност. Значи,

$$a^2 + b = a^2 + \frac{k^2 - a^2}{2} = \frac{k^2 + a^2}{2} = \frac{2k^2 + 2a^2}{4} = \frac{(k+a)^2 + (k-a)^2}{4} = \left(\frac{k+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{k-a}{2}\right)^2.$$

Останува уште да забележиме дека, од тоа што броевите a и k се со иста парност, следува дека $\frac{k+a}{2}$ и $\frac{k-a}{2}$ се цели броеви.

2Б. Докажи дека $44 \mid 19^{19} + 69^{69}$.

Решение. Имаме, $19 \equiv -1 \pmod{4}$ и $69 \equiv 1 \pmod{4}$, од каде следува дека $19^{19} \equiv (-1)^{19} \pmod{4}$ и $69^{69} \equiv 1^{69} \pmod{4}$. Значи,

$$19^{19} \equiv -1 \pmod{4} \text{ и } 69^{69} \equiv 1 \pmod{4},$$

па затоа $19^{19} + 69^{69} \equiv 0 \pmod{4}$, т.е. $4 \mid 19^{19} + 69^{69}$.

Понатаму, $19 \equiv -3 \pmod{11}$ и $69 \equiv 3 \pmod{11}$, од каде следува дека $19^{19} \equiv (-3)^{19} \pmod{11}$ и $69^{69} \equiv 3^{69} \pmod{11}$. Од последните две равенства и од тоа што $243 \equiv 1 \pmod{11}$ следува

$$\begin{aligned} 19^{19} + 69^{69} &\equiv 3^{69} - 3^{19} = 3^{69} - 3^{19} = 3^{19}(3^{50} - 1) = 3^{19}((3^5)^{10} - 1) \\ &= 3^{19}(243^{10} - 1) \equiv 3^{19}(1^{10} - 1) = 0 \pmod{11}, \end{aligned}$$

т.е. $11 \mid 19^{19} + 69^{69}$.

Конечно, бидејќи $\text{NZD}(4,11)=1$ добиваме дека $44 \mid 19^{19} + 69^{69}$.

ЗАБ. На таблата се запишани неколку различни природни броеви. Ако најмалиот се зголеми 32 пати, збирот на броевите запишани на таблата ќе биде еднаков на 477. Ако најголемиот се зголеми 14 пати, тогаш збирот на броевите запишани на таблата е исто така еднаков на 477. Кои броеви може да бидат запишани на таблата?

Решение. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се природните броеви запишани на таблата и $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, за $n \geq 2$. Според условот на задачата имаме

$$32x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 477,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 14x_n = 477,$$

од каде следува $31x_1 = 13x_n$. Броевите 13 и 31 се заемно прости, па затоа мора да важи $x_1 = 13k$, $x_n = 31k$, $k \in \mathbb{N}$. Ако $k \geq 2$, тогаш

$$32x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n > 32x_1 = 32 \cdot 13k \geq 32 \cdot 13 \cdot 2 > 477,$$

што не е можно. Значи, $k = 1$, па $x_1 = 13$, $x_n = 31$. Значи,

$$13 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 14 \cdot 31 = 477,$$

т.е. $x_2 + \dots + x_{n-1} = 30$. Притоа, тие се поголеми од 13, а помали од 31.

Ако е останат само еден број, тогаш тој мора да е еднаков на 30, па во овој случај на таблата се запишани броевите 13, 30 и 31.

Ако се останати два броја, тогаш тоа се само броевите 14 и 16. Нивниот збир е еднаков на 30, па во овој случај на таблата се запишани броевите 13, 14, 16 и 31.

Ако се останати повеќе од три двоцифрени броеви, тогаш нивниот збир е поголем од $3 \cdot 13 = 39$.

Значи, на таблата може да бидат запишани броевите 13, 30, 31 или 13, 14, 16, 31.

4А. Даден е триаголник ABC . Нека точките L и M се пресеци на симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C со правата AB , соодветно. Ако $\overline{CL} = \overline{CM}$, докажи дека $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4R^2$ каде R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC .

Решение. Нека $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$. Да забележиме дека од тоа што CL и CM се симетрали, важи

$$\angle LCM = \angle LCB + \angle BCM = \frac{\gamma}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ.$$

Од условот, следува дека $\triangle CML$ е рамнокрак правоаголен, од каде следува

$$\angle CLM = 45^\circ, \angle ALC = 135^\circ.$$

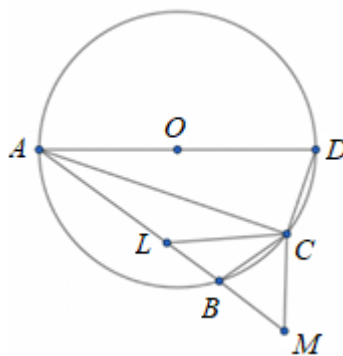
Имајќи во предвид дека збир на агли во триаголник е 180° , од $\triangle ALC$, $\triangle BLC$ добиваме $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 45^\circ$ и $\beta + \frac{\gamma}{2} = 135^\circ$, па е $\beta - \alpha = 90^\circ$.

Нека D е точка од опишаната кружница на $\triangle ABC$, таква што $\overline{BC} = \overline{CD}$. Тогаш, како агли над тетиви со еднаква должина $\angle CAD = \alpha$. Јасно, $ABCD$ е тетивен, од каде $\angle ADC = 180^\circ - \beta$. Значи,

$$\angle ACD = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - \beta) = \beta - \alpha = 90^\circ.$$

Тогаш од Талесовата теорема следува дека AD е дијаметар и конечно од Питагорова теорема

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 = 4R^2.$$



4Б. Дадени се два правоаголни триаголника PST и RST со заедничка хипотенуза ST . Катетите PT и RS се сечат во точката Q . Ако $\overline{PS} = 6$, $\overline{PT} = 17$, $\overline{RT} = 1$, пресметај ја плоштината на триаголникот SQT .

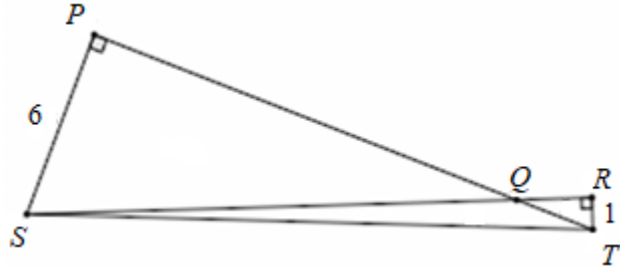
Решение. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот PST добиваме $\overline{ST}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PT}^2 = 6^2 + 17^2 = 325$. Сега од Питагоровата теорема

примената на триаголникот RST добиваме $\overline{RS} = \sqrt{\overline{ST}^2 - \overline{RT}^2} = \sqrt{324} = 18$.
 Да ги означиме плоштините на триаголниците SQT, PSQ, RQT со P_1, P_2, P_3 , соодветно. Тогаш,

$$P_1 + P_2 = P_{PST} = \frac{6 \cdot 17}{2} = 51,$$

$$P_1 + P_3 = P_{RST} = \frac{1 \cdot 18}{2} = 9.$$

Понатаму, триаголници PSQ и RTQ се правоаголници и $\angle SQP = \angle TQR$, па затоа тие се слични.



Уште повеќе, нивниот коефициент на сличност е $k = \frac{\overline{PS}}{\overline{RT}} = 6$, па затоа

$P_2 : P_3 = k^2 = 36$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = 51 \\ P_1 + P_3 = 9 \\ P_2 : P_3 = 36 \end{cases}$$

од кој наоѓаме $P_1 = \frac{39}{5}$.

II година

1A. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}.$$

Решение. За секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1) - 2n}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

од каде следува дека

$$1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}. \quad (1)$$

Сега, од (1) добиваме

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}} = \\ & = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + 1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + 1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ & = 98 + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = 98 + \frac{49}{100} = \frac{9849}{100}. \end{aligned}$$

1Б. Даден е двоцифрен број запишан со исти цифри, кој го има следното својство: ако го quadriраме, добиваме четирицифрен број кај кој првите две цифри се исти и се еднакви на цифрите на двоцифрениот број намалени за еден, а последните две цифри се повторно исти и се еднакви на половината од цифрите на двоцифрениот број.

Најди го тој број. Образложи го одговорот!

Решение. Нека дадениот двоцифрен број е $x = \overline{aa} = 10a + a = 11a$. Тогаш со негово quadriрање добиваме четирицифрен број од видот

$$\overline{bbcc} = 1000b + 100b + 10c + c = 1100b + 11c, \quad b = a - 1, \quad a = 2c.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} 121a^2 &= 1100b + 11c, \\ 121 \cdot (2c)^2 &= 1100(2c - 1) + 11c, \\ 44c^2 - 201c + 100 &= 0, \\ c_{1,2} &= \frac{201 \pm \sqrt{201^2 - 4 \cdot 44 \cdot 100}}{88}, \\ c_{1,2} &= \frac{201 \pm 151}{88} \\ c_1 &= \frac{25}{44}, \quad c_2 = 4. \end{aligned}$$

Конечно, $a = 8$ и бараниот број е $x = 88$.

2А. Нека x, y, z се природни броеви такви што

$$\begin{cases} (x+y)(y+z)(z+x) = 1680, \\ xy + yz + zx = 96. \end{cases} \quad (1)$$

Опреди ја најмалата можна вредност на изразот $100x + 10y + z$.

Решение. Равенствата во (1) се симетрични, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x \leq y \leq z$. Од првото равенство во (1) добиваме $(xy + xz + yz + x^2)(y + z) = 1680$ и со замена од второто равенство наоѓаме

$$(96 + x^2)(y + z) = 1680. \quad (2)$$

Понатаму, од второто равенство во (1) добиваме $96 = xy + yz + zx \geq 3x^2$, односно $x^2 \leq 32$. Но, x, y, z се природни броеви, па затоа $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Ако $x = 1$, тогаш $y + z = \frac{1680}{97}$ не е природен број.
- Ако $x = 2$, тогаш $y + z = \frac{1680}{100}$ не е природен број.
- Ако $x = 3$, тогаш $y + z = 16$, па од второто равенство добиваме $96 = x(y + z) + yz = 3 \cdot 16 + yz$, т.е. $yz = 48$. Значи, y, z се решенија на квадратната равенка $t^2 - 16t + 48 = 0$, т.е. $y = 4, z = 12$.
- Ако $x = 4$, тогаш $y + z = 15$, па од второто равенство добиваме $96 = x(y + z) + yz = 4 \cdot 15 + yz$, т.е. $yz = 36$. Значи, y, z се решенија на квадратната равенка $t^2 - 15t + 36 = 0$, т.е. $y = 3, z = 12$, но за ова решение не важи $x \leq y \leq z$.
- Ако $x = 5$, тогаш $y + z = \frac{1680}{121}$ не е природен број.

Од претходните разгледувања следува дека решенија на системот (1) се $x = 3, y = 4, z = 12$ и сите пермутации. Јасно, најмалата вредност на изразот $100x + 10y + z$ се добива за $x < y < z$ и притоа

$$100x + 10y + z = 300 + 40 + 12 = 352.$$

2Б. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0, \\ (x-3)(z+2) = 0, \\ x + yz = 9. \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка на системот следува $x = 1$ или $y = 2$.

а) Ако $x = 1$, тогаш од втората равенка следува $(1-3)(z+2) = 0$, т.е. $z = -2$. Конечно, од третата равенка добиваме $1 - 2y = 9$, т.е. $y = -4$. Значи, во овој случај решение на системот е $(x, y, z) = (1, -4, -2)$.

б) Ако $y = 2$, тогаш системот го добива видот

$$\begin{cases} (x-3)(z+2) = 0, \\ x + 2z = 9. \end{cases}$$

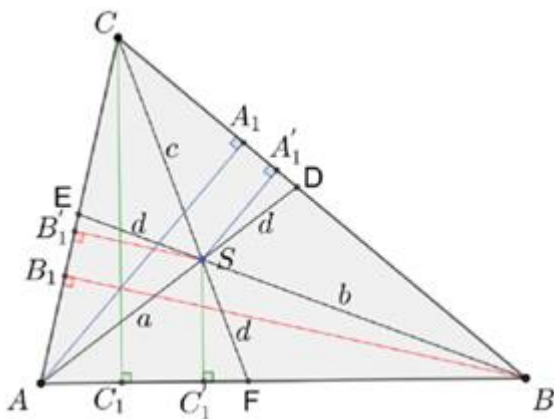
Од првата равенка добиваме $x = 3$ или $z = -2$.

Ако $x = 3$, тогаш од $3 + 2z = 9$ добиваме $z = 3$ и во овој случај решение е $(x, y, z) = (3, 2, 3)$.

Ако $z = -2$, тогаш $x = 13$ и во овој случај решение е $(x, y, z) = (13, 2, -2)$.

ЗАБ. Нека S е внатрешна точка на триаголникот ABC и нека правите AS, BS, CS ги сечат правите BC, CA, AB во точките D, E, F , соодветно. Нека $\overline{AS} = a, \overline{BS} = b, \overline{CS} = c$ и $\overline{SD} = \overline{SE} = \overline{SF} = d$. Ако $a + b + c = 43$ и $d = 3$, определи ја вредноста на изразот abc .

Решение. Нека A_1 и A_1' се подножјата на нормалите повлечени од точките A и S на правата BC , B_1 и B_1' се подножјата на нормалите повлечени од точките B и S на правата AC , C_1 и C_1' се подножјата на нормалите повлечени од точките C и S на правата AB . Од слично-



ста на триаголниците AA_1D и $SA_1'D$ следува $\frac{d}{a+d} = \frac{\overline{SA_1'}}{\overline{AA_1}} = \frac{\frac{\overline{SA_1'} \cdot \overline{BC}}{2}}{\frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{BC}}{2}} = \frac{P_{BCS}}{P_{ABC}}$.

Аналогно се добива $\frac{d}{b+d} = \frac{P_{ACS}}{P_{ABC}}$ и $\frac{d}{c+d} = \frac{P_{ABS}}{P_{ABC}}$. Ги собираме последните три равенства и добиваме

$$\frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d} = \frac{P_{BCS}}{P_{ABC}} + \frac{P_{ACS}}{P_{ABC}} + \frac{P_{ABS}}{P_{ABC}} = \frac{P_{ABC}}{P_{ABC}} = 1.$$

Ако во последното равенство замениме $d = 3$ и искористие $a + b + c = 43$ добиваме

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1$$

$$3((a+3)(b+3) + (b+3)(c+3) + (c+3)(a+3)) = (a+3)(b+3)(c+3)$$

$$3ab + 3bc + 3ca + 18a + 18b + 18c + 81 = abc + 3ab + 3bc + 3ca + 9a + 9b + 9c + 27$$

$$9(a+b+c) + 54 = abc$$

$$abc = 9 \cdot 43 + 54$$

$$abc = 441.$$

4АБ. Определи ги целобројните параметри a, b, c такви што равенката $(x-a)(x-6) + 3 = (x+b)(x+c)$ има бесконечно многу реални решенија.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned}x^2 - (a+6)x + 6a+3 &= x^2 + (b+c)x + bc, \\(a+b+c+6)x &= 6a+3-bc.\end{aligned}$$

Според тоа, почетната равенката има бесконечно многу решенија ако и само ако последната равенка има бесконечно многу решенија, т.е. ако и само ако $a+b+c+6=0$ и $6a+3-bc=0$. Од првата равенка имаме $a=-b-c-6$ и со замена во втората равенка, по средувањето добиваме $(6+b)(6+c)=3$. Сега, бидејќи a, b, c се цели броеви, од последното равенство следува:

- 1) $6+b=1, 6+c=3$, т.е. $b=-5, c=-3$, и затоа $a=-b-c-6=2$,
- 2) $6+b=3, 6+c=1$, т.е. $b=-3, c=-5$, и затоа $a=-b-c-6=2$,
- 3) $6+b=-1, 6+c=-3$, т.е. $b=-7, c=-9$, и затоа $a=-b-c-6=10$,
- 4) $6+b=-3, 6+c=-1$, т.е. $b=-9, c=-7$, и затоа $a=-b-c-6=10$.

III година

1АБ. Нека за функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ важи $|f(x)|\leq 1$, за секој $x\in[-1,1]$. Докажи дека $|a|\leq 2$.

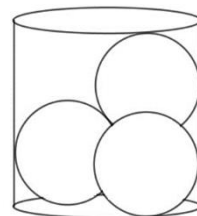
Решение. За $x=0$ добиваме $|f(0)|\leq 1$, т.е. $|c|\leq 1$. Понатаму, за $x=-1$ добиваме $|f(-1)|\leq 1$, т.е. $|a-b+c|\leq 1$, а за $x=1$ добиваме $|f(1)|\leq 1$, т.е. $|a+b+c|\leq 1$. Според тоа,

$$|2a| = |a+b+c+a-b+c-2c| \leq |a+b+c| + |a-b+c| + 2|c| \leq 1+1+2=4,$$

т.е. $|a|\leq 2$.

2АБ. Три идентични сфери, секоја со радиус a , се вметнати во цилиндар на таков начин што:

- секоја сфера ја допира кривата површина на цилиндарот,
- секоја сфера ги допира другите две сфери,
- две сфери ја допираат долната основа на цилиндарот, додека третата ја допира горната основа,
- висината на цилиндарот е $3a$.



Одреди го радиусот на основата на цилиндарот.

Решение. Нека центрите на трите сфери ги означиме со A, B и C , и тоа A и B се центрите на сферите кои ја допираат долната основа, а C е центарот на сферата која ја допира горната основа.

Забележуваме дека тие формираат рамностран триаголник ABC , со должина на страна $2a$.

Темињата A и B се наоѓаат на растојание a од долната основа, додека темето C на растојание a од горната основа.

Нека со C' ја означуваме проекцијата на темето C врз рамнината која е на растојание a од основата на цилиндарот (т.е. A, B и C' лежат на иста рамнина). Точката C е на растојание a од горната основа, а точката C' е на растојание a од долната основа, па како висината на цилиндарот е $3a$, добиваме $\overline{CC'} = a$. Сега, триаголниците $AC'C$ и $BC'C$ се правоаголници, па

од Питагоровата теорема следува $\overline{AC'} = \overline{BC'} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$. Нека средината на отсечката AB ја означиме со M . Тогаш, триаголникот ABC' е рамнокрак, па како $\overline{AC'} = a\sqrt{3}$ и $\overline{AB} = 2a$ неговата висина е $\overline{C'M} = a\sqrt{2}$.

Според тоа, $P_{ABC'} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}$. Сега, ако r е радиусот на опишаната

кружница околу триаголникот ABC' , тогаш $\frac{2a \cdot (a\sqrt{3})^2}{4r} = P_{ABC'} = a^2\sqrt{2}$, па затоа $r = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Конечно, радиусот на основата на цилиндарот е $R = r + a = (\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1)a$.

3А. Збирот на квадратите на страните на даден триаголник е M , а збирот на котангенсите на неговите внатрешни агли е N . Изрази ја плоштината на триаголникот преку M и N .

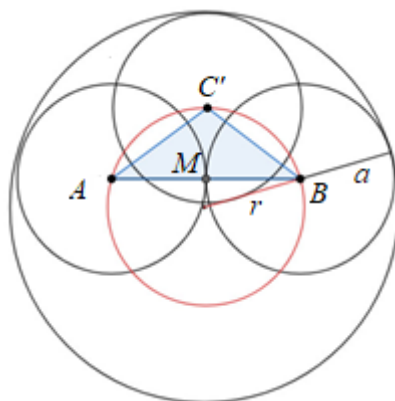
Решение. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$, а α, β, γ се неговите внатрешни агли. Тогаш

$$a^2 + b^2 + c^2 = M \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = N.$$

Од косинусната теорема имаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Од последните равенства, добиваме



$$2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 + c^2 = M. \quad (1)$$

За плоштината P на триаголникот имаме

$$P = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2},$$

па затоа $bc = \frac{2P}{\sin \alpha}$, $ca = \frac{2P}{\sin \beta}$, $ab = \frac{2P}{\sin \gamma}$. Заменуваме во (1) и добиваме

$$M = \frac{4P \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{4P \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{4P \cos \gamma}{\sin \gamma} = 4P(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = 4PN,$$

што значи $P = \frac{M}{4N}$.

3Б. Нека за аглите $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta, \cos \beta = \operatorname{tg} \gamma, \cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha.$$

Пресметај го $\sin \alpha$

Решение. Имаме $\cos \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$, $\cos \beta = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$, $\cos \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, па затоа

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1} - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha}} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} - 1 = \frac{2 - 3 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}. \end{aligned}$$

Воведуваме замена $t = \cos^2 \alpha$ и добиваме $t = \frac{2-3t}{2t-1}$, од каде наоѓаме $t^2 - t + 1 = 0$. Последната равенка ја решаваме по t и добиваме $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Сега, од $t = \cos^2 \alpha \geq 0$ следува $\cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, па затоа

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

Конечно, од $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ следува $\sin \alpha > 0$, па затоа $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4А. Определи ги сите цели броеви x такви што $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ исто така е цел број.

Решение. Нека n е цел број таков што $\log_2(x^2 - 4x - 1) = n$. Тогаш $x^2 - 4x - 1 = 2^n$, од каде добиваме $x = 2 \pm \sqrt{5 + 2^n}$. Според тоа, $x \in \mathbb{Z}$ ако и само ако постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $5 + 2^n = k^2$. Јасно, $n \in \mathbb{N}$, што значи дека

$5+2^n$ е непарен природен број, од каде следува дека k е непарен природен број. Нека $k=2m-1, m \in \mathbb{N}$. Тогаш $(2m-1)^2=5+2^n$, од каде добиваме $m(m-1)=1+2^{n-2}$. Ако $n=1$, тогаш $1+2^{n-2}=\frac{3}{2}$, што не е можно бидејќи $m(m-1)$ е парен цел број. Ако $n=2$, тогаш $x=2 \pm \sqrt{5+2^2}=2 \pm 3$, т.е. $x=-1$ или $x=5$. Ако $n>2$, тогаш $1+2^{n-2}$ е непарен број, што не е можно бидејќи $m(m-1)$ е парен цел број.

4Б. Определи ги сите природни броеви n такви што $3, \log_2 n, \log_4 n$ се должини на страни на триаголник.

Решение. Јасно, $n \geq 2$. Понатаму, $3=\log_2 8$ и $\log_4 n = \frac{1}{2} \log_2 n$, па од неравенството на триаголник добиваме

$$3 < \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 n, \quad \frac{1}{2} \log_2 n < \log_2 n + 3, \quad \log_2 n < \frac{1}{2} \log_2 n + 3. \quad (1)$$

Од првото неравенство во (1) следува $\log_2 n > 2$, т.е. $n > 4$. Од второто неравенство во (1) следува $-6 < \log_2 n$, т.е. $n > \frac{1}{64}$. Од третото неравенство во (1) следува $\log_2 n < 6$, т.е. $n < 64$.

Конечно, решение на задачата се сите природни броеви n такви што $4 < n < 64$.

IV година

1АБ. За која вредност на параметарот a корените на равенката

$$x^3 + ax^2 + 48x - 27 = 0. \quad (1)$$

формираат геометриска прогресија.

Решение. Нека корените на равенката u, v, w формираат геометриска прогресија. Од Виетовите формули следува

$$u + v + w = -a, \quad uv + vw + wu = 48 \quad \text{и} \quad uvw = 27.$$

Од условот на задачата следува $v^2 = uw$, па со замена во $uvw = 27$ добиваме $v^3 = 27$, т.е. $v = 3$. Сега $v = 3$ е корен на равенката (1), па затоа $3^3 + 3^2 a + 48 \cdot 3 - 27 = 0$, т.е. $a = -16$.

2А. Нека AB и AC се тетиви на кружница со радиус R . Точката M припаѓа на правата AB , а нејзиното растојание од правата AC е еднакво на

должината $\overline{AC}$. Точката N припаѓа на правата AC , а нејзиното растојание од правата AB е еднакво на должината $\overline{AB}$. Докажи дека $\overline{MN} = 2R$.

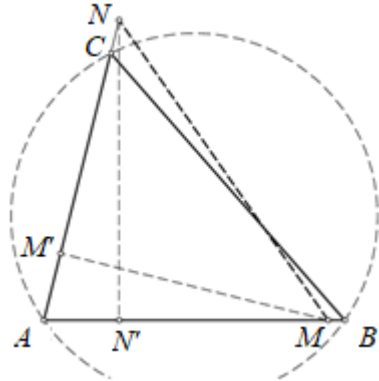
Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$ и нека M' и N' се проекциите на точките M и N на правите AC и AB . Тогаш

$$\overline{AM} = \frac{\overline{MM'}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} \text{ и } \overline{AN} = \frac{\overline{NN'}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin \alpha}.$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}, \text{ т.е. } \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

од каде следува дека триаголниците ABC и AMN се слични, со коефициент на сличност $\frac{1}{\sin \alpha}$. Сега, $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\sin \alpha}$, од каде следува $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = 2R$.



2Б. Докажи дека секој број од видот

$$A_n = (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 35) + 36, \quad n \in \mathbb{N}$$

е точен квадрат.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{10-1}{10-1} (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 35) + 36 \\ &= \frac{10^{n+1}-1}{9} (10^{n+1} + 35) + 36 \\ &= \frac{1}{9} (10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} - 35 + 324) \\ &= \frac{1}{9} (10^{2(n+1)} + 2 \cdot 17 \cdot 10^{n+1} + 17^2) \\ &= \left(\frac{10^{n+1} + 17}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Конечно, од $10 \equiv 1 \pmod{3}$ и $17 \equiv -1 \pmod{3}$ следува $10^{n+1} + 17 \equiv 0 \pmod{3}$, од каде следува дека A_n е точен квадрат.

3А. Докажи дека збирот на сите (позитивни) делители на природниот број $n > 2$ е помал од $n\sqrt{n}$

Решение. Да го означиме збирот на сите позитивни делители на природниот број n со $\sigma(n)$.

1) Нека $n = 2^a$, $a \geq 2$, $a \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^a) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{a-1} + 2^a = 2^{a+1} - 1 \\ &< 2^{a+1} \leq 2^{a+\frac{a}{2}} = 2^a \sqrt{2^a} = n\sqrt{n}.\end{aligned}$$

2) Нека $n > 2$ е природен број што има непарен делител поголем од 1.

Очигледно $\sigma(3) = 1 + 3 = 4 < 3\sqrt{3}$.

Да претпоставиме дека за секој природен број k , таков што $3 \leq k < n$ важи $\sigma(k) < k\sqrt{k}$. Ќе докажеме дека $\sigma(n) < n\sqrt{n}$. Од претпоставката дека n има непарен делител поголем од 1, следува дека постои непарен прост број p таков што $n = mp$ за некој $m \in \mathbb{N}$. Можни се следниве случаи:

- Ако $m = 1$, т.е. $n = p$, тогаш $\sigma(p) = 1 + p = p(1 + \frac{1}{p}) < 2p < p\sqrt{p}$, за $p > 3$.

- Ако $m = 2$, т.е. $n = 2p$, тогаш

$$\sigma(2p) = 1 + 2 + p + 2p = 3 + 3p < 2p\sqrt{2p}$$

- Ако $m \geq 3$, тогаш според индуктивната претпоставка е исполнето $\sigma(m) < m\sqrt{m}$. Бидејќи произволен делител на n има облик d или dp , каде d е делител на m , добиваме

$$\sigma(n) = \sigma(m) + \sigma(m)p < \sigma(m)\sigma(p) < m\sqrt{m} \cdot p\sqrt{p} = mp\sqrt{mp} = n\sqrt{n}.$$

3Б. Димитар се обидува да се сети на лозинката на својот компјутер. Запомнил дека се работи петцифрен број со различни цифри, во кој првата и последната цифра се разликуваат за 4, а низата од преостанатите три цифри во средината формира двоцифрен или трицифрен број делив со 5. Ако Димитар почне да ги испишува сите такви броеви, колку најмногу броеви треба може да испише за да дојде до точната лозинка. Првата цифра на лозинката не е нула.

Решение. Нека $\overline{xabcy}$, $x, a, b, c, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $x \neq 0$ е точната лозинка. Од условите на задачата следува дека за цифрите x, y, c важи

$$\begin{aligned}(x, y, c) \in \{ & (4, 0, 5), (1, 5, 0), (5, 1, 0), (2, 6, 0), (6, 0, 2), (2, 6, 5), \\ & (6, 2, 5), (3, 7, 0), (7, 3, 0), (3, 7, 5), (7, 3, 5), (4, 8, 0), \\ & (8, 4, 0), (4, 8, 5), (8, 4, 0), (5, 9, 0), (9, 5, 0) \} \end{aligned}$$

За секој од овие избори на x, y, c , цифрата a можеме да ја избереме на 7 начини, а цифрата b на 6 начини. Оттука следува дека постојат вкупно $17 \cdot 7 \cdot 6 = 714$ петцифрени броеви со бараното својство.

4А. Со $[x]$ го означуваме најглемниот цел број помал или еднаков на x .
Опреди ја вредноста на изразот

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} \right].$$

Решение. Од неравенствата

$$\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^3 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{27n^4} > 1 + \frac{1}{n} \text{ и } \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{27n^4} > 1 - \frac{1}{n}$$

добиваме $1 + \frac{1}{3n} > \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}$ и $1 - \frac{1}{3n} > \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}$, од каде следува

$$3\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) < \frac{1}{n} < 3\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}\right)$$

$$3\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < 3\left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}\right).$$

Ако левото неравенство го собереме за $n = 1, 2, 3, \dots, 1000$, добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} > 3\left(\sqrt[3]{1001} - 1\right) > 3(10 - 1) = 27.$$

Ако десното неравенство го собереме за $n = 2, 3, \dots, 1000$, добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} < 3\left(\sqrt[3]{1000} - 1\right) + 1 = 28.$$

Конечно, од последните две равенства следува

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} \right] = 27.$$

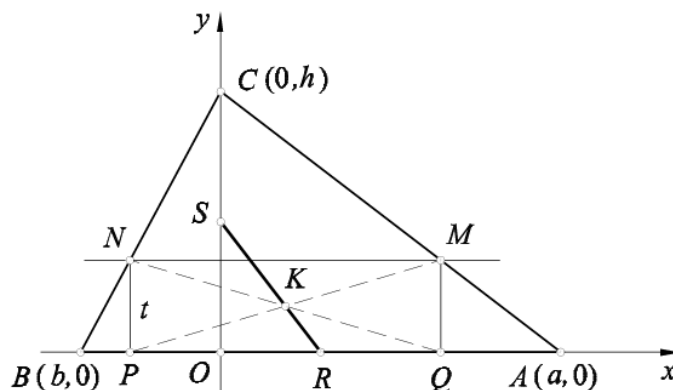
4Б. Во правоаголен координатен систем дадени се точките $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и $C(0, h)$, при што $a, h > 0, b < 0$. Одреди го геометриското место на точките што претставуваат средини (пресек на дијагоналите) на правоаголниците впишани во триаголникот ABC , такви што, две од темињата на правоаголникот лежат на страната AB , а по едно теме лежи на останатите две страни на триаголникот.

Решение. Нека правоаголникот $PQMN$ е впишан во триаголникот ABC .

Равенката на правата AC е $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$, а равенката на правата BC гласи

$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$. Да ја означиме „променливата“ должина на страната PN со t . Според тоа, равенката на правата MN гласи $y = t$. Точката M е пресек на правите AC и MN . Од системот $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1, y = t$ добиваме дека M има координати $\left(\frac{a}{h}(h - t), t\right)$. Точката N е пресек на правите BC и MN . Од систе-

мот $\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$, $y = t$ заклучуваме дека N има координати $(\frac{b}{h}(h-t), t)$. Апсцисата на точката K (средината на правоаголникот) е аритметичка средина од апсцисите на точките M и N , додека ординатата на K е половина од ординатата на M . Оттука следува дека средината на правоаголникот K има координати $x = \frac{a+b}{2h}(h-t)$, $y = \frac{t}{2}$. За да го одредиме геометриското место, треба да одредиме кое множество точки е зададено со овие равенки. Да го елиминираме t . Со замена на $t = 2y$ во равенката за x , по средувањето добиваме $2hx + 2(a+b)y = h(a+b)$, т.е. $\frac{x}{\frac{a+b}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1$.



Последната равенка претставува равенка на права. Бараното геометриско место на точки е дел од таа права. Како што должината на страната PN на правоаголниците расте од 0 до h , така средината на правоаголниците ќе се движи од точката $R(\frac{a+b}{2}, 0)$ до точката $S(0, \frac{h}{2})$. Според тоа, бараното геометриско место на точки е отсечката RS без нејзините крајни точки.