Седьмой Турнир, 1985-1986

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 ноября 1985 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Восемь футбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). При этом не было ничьих. Доказать, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.
Фольклор

Задача 2.(1+3+1)
Игра "кошки-мышки". Кошка ловит мышку в лабиринтах А, Б, В. Кошка ходит первой, начиная с узла, отмеченного буквой "К". Затем ходит мышка (из узла "М"), затем опять кошка и т. д. Из любого узла кошка и мышка ходят в любой соседний узел. Если в какой-то момент кошка и мышка оказываются в одном узле, кошка ест мышку.
Сможет ли кошка поймать мышку в любом из случаев А, Б, В?

```
*-*-*-*       *-*-*         *-*-*
| | | |       | | |\        | | |\
*-*-M-*       *-*-M-*       *-*-M-*
| | | |       | | | |       | | | |
*-K-*-*       *-K-*-*       *-K-*-*
| | | |       | | | |        \| | |
*-*-*-*       *-*-*-*         *-*-*
  А(1)          Б(3)          В(1)
```
А. Сосинский

Задача 3.(4)
Учитель продиктовал классу задание, которое каждый ученик выполнил в своей тетради. Вот это задание: "Нарисуйте две концентрические окружности радиусов 1 и 10. К малой окружности проведите три касательных так, чтобы точки их пересечения A, B и C лежали внутри большой окружности. Измерьте площадь S треугольника ABC и площади S_1, S_2 и S_3 трёх образовавшихся "секторов" с вершинами в точках A, B и C. Найдите $S_1+S_2+S_3-S$."
Доказать, что у всех учеников (если они правильно выполнили задание) получились одинаковые результаты.
А. Толпыго

Задача 4.(4)
Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того, как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 часа 30 мин.
Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее, чем на 1 мин. 51 сек.
Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин.?
С. Фомин

Задача 5.(10)
Двое бросают монету: один бросил её 10 раз, другой - 11 раз.
Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Формулировка той же задачи для тех, кто не знает понятия "вероятность":
Рассматриваются всевозможные числа из 21 цифры, все цифры которых равны либо 1, либо 2.
Какова среди этих чисел доля таких, у которых на последних 11 местах стоит больше единиц, чем на первых 10?
С. Фомин

Задача 6.(10)
Последовательность чисел x_1, x_2, ... такова, что $x_1=1/2$ и для всякого натурального k: $x_{k+1}=x_k^2+x_k$. Найдите целую часть суммы $1/(x_1+1) + 1/(x_2+1) + ... + 1/(x_{100}+1)$.
А. Анджанс

Задача 7.(3+5)
Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 30*30, и в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, однако, что
1) любая фигура с любого поля бьёт не более 20 полей и
2) если фигуру сдвинуть на несколько полей, то битые поля соответственно сдвигаются (может быть, исчезают за пределы поля).
Докажите, что
а)(3) любая фигура F бьёт данное поле X не более, чем с 20 полей;
б)(3+5) можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.
А. Толпыго

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 ноября 1985 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Дан выпуклый четырёхугольник и точка M внутри него. Доказать, что сумма расстояний от точки M до вершин четырёхугольника не превосходит
$P+D_1+D_2$, где P - периметр, D_1 и D_2 - длины диагоналей четырёхугольника.
Фольклор

Задача 2.(3)
Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того, как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 часа 30 мин.
Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее, чем на 1 мин. 51 сек.
Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин.?
С. Фомин

Задача 3.(3)
Двое бросают монету: один бросил её 10 раз, другой - 11 раз.
Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Формулировка той же задачи для тех, кто не знает понятия "вероятность":
Рассматриваются всевозможные числа из 21 цифры, все цифры которых равны либо 1, либо 2.
Какова среди этих чисел доля таких, у которых на последних 11 местах стоит больше единиц, чем на первых 10?
С. Фомин

Задача 4.(7)
Последовательность чисел x_1, x_2, ... такова, что $x_1=1/2$ и для всякого натурального k: $x_{k+1}=x_k^2+x_k$.
Найдите целую часть суммы $1/(x_1+1) + 1/(x_2+1) + ... + 1/(x_{100}+1)$.
А. Анджанс

Задача 5.(8+4)
а)(8) Точка O лежит внутри выпуклого N-угольника $A_1A_2A_3... A_N$. Рассматриваются углы A_iOA_j при всевозможных парах (i,j) (i, j - различные натуральные числа от 1 до N).
Доказать, что среди этих углов найдётся по крайней мере N-1 не острых (прямых, тупых или развёрнутых) углов.
б)(4) Та же задача для выпуклого многогранника, имеющего N вершин.
В. Болтянский

Задача 6.(10)
В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Известно, что $\angle BEA=45^o$.
Докажите, что $\angle EHC=45^o$.
И. Шарыгин

Задача 7.(10)
Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 100*100, и в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьёт не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей, мы ничего не знаем).
Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.
А. Толпыго

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 16 марта 1986 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Через вершины A и B треугольника ABC проведены две прямые, которые разбивают треугольник на четыре фигуры (три треугольника и один четырёхугольник). Известно, что три из этих фигур имеют одинаковые площади. Докажите, что четырёхугольник - среди них.
Г. Гальперин, А. Савин

Задача 2.(6)
Натуральное число n записано в десятичной системе счисления. Известно, что если какая-то цифра входит в эту запись, то n делится нацело на эту цифру (0 в записи не встречается).
Какое максимальное число различных цифр может содержать эта запись?
С. Фомин

Задача 3.(4)
Улицы города расположены в трёх направлениях, так что все кварталы - равные между собой равносторонние треугольники. Правила уличного движения таковы, что через перекресток можно проехать либо прямо, либо повернув влево или вправо на 120^o в ближайшую улицу. Поворачивать разрешается только на перекрестках. Две машины выехали друг за другом из одной точки в одном направлении и едут с одинаковой скоростью, придерживаясь этих правил.
Может ли случиться, что через некоторое время они на какой-то улице (не на перекрестке) встретятся?
Н. Константинов

Задача 4.(5)
Дан квадрат ABCD. На стороне AB взята точка K, на стороне CD - точка L, на отрезке KL - точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC, лежит на диагонали AC.
В. Дубровский

Задача 5.(6)
20 футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
С. А. Генкин

Задача 6.(8)
(Сизифов труд.) На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берёт любой камень и переносит его на ближайшую сверху свободную ступеньку (то-есть, если следующая ступенька свободна то на неё, а если занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500, и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Его цель - положить камень на верхнюю ступеньку.
Может ли Аид ему помешать?
С. Елисеев Р

Задача 7.(3+3+3+3)
30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,
а)(3) четырёх вечеров недостаточно,
б)(3) пяти вечеров также недостаточно,
в)(3) а десяти вечеров достаточно,
г)(3) и даже семи вечеров тоже достаточно.
Фольклор

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 16 марта 1986 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
При каком натуральном K величина $K^2/1{,}001^k$ достигает максимального значения?
Фольклор

Задача 2.(4)
20 футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре.
Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
С. Генкин

Задача 3.(4)
На рёбрах произвольного (не обязательно правильного) тетраэдра указали направления.
Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нуль-вектору?
Фольклор

Задача 4.(4)
Функция F задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеет место равенство:
$F(x+1)F(x)+F(x+1)+1=0$.
Докажите, что функция f не может быть непрерывной.
А. Плоткин

Задача 5.(10)
В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла BAD. K и L - точки её пересечения с прямыми BC и CD соответственно. (Известно, что ABCD - не ромб).
Докажите, что центр окружности, проведённой через точки C, K и L, лежит на окружности, проведённой через точки B, C и D.
И. Шарыгин

Задача 6.(8)
Дана невозрастающая последовательность чисел $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots\geq a^{2k+1}\geq 0$.
Докажите неравенство:
$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\ldots+a_{2k+1}^2\geq(a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2k+1})^2$.
Л. Курляндчик

Задача 7.(3+2+2+3)
30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,
а)(3) четырёх вечеров недостаточно,
б)(2) пяти вечеров также недостаточно,
в)(2) а десяти вечеров достаточно,
г)(3) и даже семи вечеров тоже достаточно.
Фольклор