ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло, Припремна варијанта, 1998.

8-9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	**1.** Коцка ивице 20 је разложена на 8000 јединичних коцкица, и у сваку коцкицу уписан је број. Познато је да је у сваком стубцу од 20 коцкица, паралелном ивици коцке, сума бројева једнака 1 (разматрају се стубци сва три правца). У једну коцкицу је уписан број 10. Кроз ту коцкицу пролазе три слоја $1\times20\times20$, паралелна странама коцке. Наћи суму свих бројева који су изван тих слојева.
3	**2.** Квадрат целог броја има облик ...09 (завршава се цифрама 0 и 9). Доказати да је трећа сдесна цифра парна.
4	**3.** Тачке A', B' и C' су унутрашње тачке страница BC, CA и AB троугла ABC, тим редом. Познато је да је $\angle AC'B'=\angle B'A'C$, $\angle CB'A'=\angle A'C'B$ и $\angle BA'C'=\angle C'B'A$. Доказати да су тачке A', B', C' средишта страница троугла.
4	**4.** 12 кандидата за градоначелника су говорили о себи. После неког времена један од њих је рекао: "До сада се слагало једанпут". Други је рекао: "А сада већ двапут". "А сада већ трипут" рекао је трећи, и тако даље до 12-ог, који је рекао: "До сада је слагано 12 пута". После тога водитељ је прекинуо дискусију. Испоставило се да је бар један кандидат тачно избројао колико се пута слагало пре њега. Колико су укупно пута кандидати слагали?
5	**5.** Назовимо крокодилом шаховску фигуру чији се ход (потез) састоји у скоку од m поља по вертикали или по хоризонтали, и потом од n поља у правцу нормалном на претходни. Доказати да је за произвољне m и n могуће тако обојити бесконачну шаховску таблу у две боје (за сваке конкретне m и n посебно бојење), да два поља повезана једним ходом крокодила, увек буду различитих боја.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло, Припремна варијанта, 1998.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 **1.** Дато је 19 тегова масе 1 г, 2 г, 3 г, ... , 19 г. Девет их је од гвожђа, девет од бронзе и један од злата. Познато је да је укупна маса гвозденихх тегова за 90 г већа од укупне масе бронзаних. Наћи масу златног тега.

3 **2.** n папирних кругова полупречника 1 распоређени су у равни тако да њихиви рубови пролазе кроз једну тачку, при чему та тачка лежи унутар области покривене круговима. Та област је многоугао с криволинијским страницама. Наћи његов обим.

4 **3.** На шаховској табли димензија 8×8 означено је 17 поља. Доказати да се од њих могу изабрати два, тако да је коњу потребно бар три скока да стигне са једног од њих на друго.

4 **4.** Разматрају се скупови реалних бројева $\{x_1, x_2, x_3, ... x_{20}\}$, који леже између 0 и 1, таквих да је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{20} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)...(1-x_{20})$. Наћи међу њима скуп за који је производ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{20}$ максималан.

5. Група психолога је направила тест на основу којег свака тестирана особа добија оцену - број Q, која је показател њених умних способности (што је веће Q, већа је и способност). За рејтинг земље узима се аритметичка средина вредности Q свих њених становника.

1 а) Група грађана земље А је емигрирала у земљу Б. Показати да је тада могао да порасте рејтинг обе земље.

3 б) После тога група грађана земље Б (међу којима могу бити и бивши емигранти из А) емигрирала је у земљу А. Да ли је рејтинг обеју земала могао опет да порасте?

2 в) Група грађана земље А емигрирала је у земљу Б, а група грађана земље Б - у земљу В. Као резултат тога рејтинзи сваке од тих земала се повећао. После тога смер миграционих токова се променио у супротан: део становника из В прешао је у Б, а део становника из Б - у А. Испоставило се да су после тога рејтинзи све три земље опет порасли (у односу на оне који су били после првог преласка, али пре почетка другог). (То тврде информационе агенције све три земље.) Да ли је то могуће (ако јесте, како, ако није, зашто)? (Претпоставља се: у разматраном временском периоду Q грађана се није менао, нико није умро и нико се није родио.)

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 1998.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	**1.** Нека су a и b природни бројеви. Доказати да NZS(a,a+5)= NZS(b,b+5) повлачи a=b.
4	**2.** Игор иВаља имају по један бели квадрат 8×8, разложен на пола 1×1. Они су обојили једнаке бројеве пола на својим квадратима у плаву боју. Доказати да је могуће разложити те квадрате на домине 2×1, тако да се и од Игорових и од Валиних домина може сложити по један квадрат 8×8 са истоветном плавом сликом.
5	**3.** Дуж AB пресеца две подударне кружнице и паралелан је њиховој централној линији, при чему све тачке пресека праве AB с кружницама леже између A и B. Кроз тачку A конструисане су тангенте на кружницу која је ближа тачки A, а кроз тачку B тангенте на кружницу која је ближа B. Испоставило се да те четири тангенте образују четвороугао који садржи обе кружнице унутар себе. Доказати да се у тај четвороугао може уписати кружница.
6	**4.** У правилном 25-углу су конструисане све дијагонале. Доказати да не постоје девет дијагонала које пролазе кроз једну унутрашњу тачку 25-угла.
7	**5.** Дато је 20 перли у 10 боја, по две перле сваке боје. Оне су распоређене у 10 кутија. Познато је да се може изабрати по перла из сваке кутије, тако да свака боја буде заступљена. Доказати да је број могућности таквог избора ненулти степен двојке.
7	**6.** Банда разбојника одузела је трговцу кесу с новчићима. Вредност сваког новчића је цео број гроша. Испоставило се да ако се издвоји било који новчић, остали новчићи могу да се поделе међу разбојницима тако да сваки од њих добије исту суму у грошима. Доказати да ако се издвоји један новчић, број преосталих новчића је делив бројем разбојника.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 1998.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1.

2 а) Доказати да NZS(a,a+5)=NZS(b,b+5) (a, b - природни бројеви) повлачи a=b.

3 б) Може ли бити NZS(a,b)=NZS(a+c,b+c) (a, b, c - природни бројеви)?

2. Дуж AB пресеца две подударне кружнице и паралелан је њиховој централној линији, при чему све тачке пресека
4 праве AB с кружницама леже између A и B. Кроз тачку A конструисане су тангенте на кружницу која је ближа тачки A, а кроз тачку B тангенте на кружницу која је ближа B. Испоставило се да те четири тангенте образују четвороугао који садржи обе кружнице унутар себе. Доказати да се у тај четвороугао може уписати кружница.

3. У таблицу је уписано девет бројева:

5
$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3.$$

Познато је да су шест бројева - збирови врста и збирови стубаца - једнаки међу собом:

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3.$$

Доказати да је збир производа врста таблице једнак збиру производа њених стубаца:

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3=a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3.$$

4. За округлим столом је припремљено 12 места за жири с на-
6 знаком имена на сваком месту. Николај Николајевић, који је стигао први, због расејаности није сео на своје него на следеће место у смеру кретања казаљке на часовнику. Сваки члан жирија који је пришао столу после тога, заузео је своје место или је, ако је оно већ било заузето, ишао око стола у смеру кретања казаљке на часовнику и седао на прво слободно место. Добијени распоред чланова жирија зависи од тога којим су редом они прилазили столу. Колико се различитих распореда жирија може добити?

5. Називаћемо "величином" правоуглог паралелепипеда суму
7 његове три димензије - дужине, ширине и висине. Може ли се десити да је у неки правоугли паралелепипед смештен правоугли паралелепипед веће "величине"?

6. Дата је функција $f(x)=(x^2+ax+b)/(x^2+cx+d)$, где триноми
8 x^2+ax+b и x^2+cx+d немају заједничких корена. Доказати да су следећа два тврђења еквивалентна:

1) постоји интервал који не садржи ниједну вредност те функције;

2) $f(x)$ може да се представи у облику:

$$f(x)=f_1(f_2(\ldots f_{n-1}(f_n(x))\ldots)),$$

где свака од функција $f_i(x)$ има један од следећих облика: k_ix+b_i, x^{-1}, x^2.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Припремна варијанта, 8-9. разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 1. Отац и син се клизају на кружној стази. С времена на време отац престигне сина. После тога, пошто је син променио смер кретања у супротни, они су почели да се сусрећу 5 пута чешће. Колико пута отац брже клиза од сина?

4 2. Над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC са спољашње стране је конструисан квадрат ABDE. Дато је: AC=1 cm и BC=3 cm. *У ком односу дели страницу DE бисектриса угла C?*

4 3. На табли је написано неколико природних бројева: a_0, a_1, a_2, ..., a_n. На другој табли пишемо следеће бројеве: b_0 – колико има укупан бројева на првој табли, b_1 – колико је тамо бројева већих од један, b_2 – колико је бројева већих од два, и т.д., док се добијају позитивни бројеви. На томе се завршава – нуле се не пишу. На трећој табли пишемо бројеве c_0, c_1, c_2, ..., добијене на основу бројева на другој табли по истом правилу по коме су бројеви b_0, b_1, b_2, ... добијени на основу бројева на првој табли. Доказати да се скупови бројева на првој и трећој табли поклапају.

5 4. У равни је нацртан црни једнакостранични троугао. Дато је девет троугаоних плочица исте те величине и истог тог облика. Треба их поставити у равни тако да се не прекривају и да свака плочица покрива бар један део црног троугла (бар једну тачку унутар њега). Како то урадити?

5 5. Квадрат је разрезан са 18 правих, од којих су 9 паралелне једној страници квадрата, а 9 – другој, на 100 правоугаоника. Испоставило се да су тачно девет од њих – квадрати. Доказати да се међу тим квадратима налазе два подударна.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Припремна варијанта, 10-11. разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 — 1. У низу се налази 1999 бројева. Први број је једнак 1. Познато је да је сваки број, сем првог и последњег, једнак збиру два суседна. Наћи последњи број.

3 — 2. Над хипотенузом АБ правоуглог троугла АБЦ са спољашње стране је конструисан квадрат АБДЕ. Дато је: АЦ=1 cm и БЦ=3 cm. У ком односу дели страницу ДЕ бисектриса угла Ц?

3 — 3. На табли је написано неколико природних бројева: a_0, a_1, a_2, ... , a_n. На другој табли пишемо следеће бројеве: b_0 – колико има укупан бројева на првој табли, b_1 – колико је тамо бројева већих од један, b_2 – колико је бројева већих од два, и т.д., док се добијају позитивни бројеви. На томе се завршава – нуле се не пишу. На трећој табли пишемо бројеве c_0, c_1, c_2, ... , добијане на основу бројева на другој табли по истом правилу по коме су бројеви b_0, b_1, b_2, ... добијени на основу бројева на првој табли. Доказати да се скупови бројева на првој и трећој табли поклапају.

5 — 4. У равни је нацртан црни квадрат. Дато је седам квадратних плочица исте те величине. Треба их поставити у равни тако да се не прекривају и да свака плочица покрива бар један део црног квадрата (бар једну тачку унутар њега). Како то урадити?

5 — 5. Игра се одвија на квадрату карираног папира 9×9. Играју двоје, наизменично. Онај који започиње игру ставља на слободна поља крстиће, његов партнер – кружиће. Када се сва поља попуне, изброји се број врста и стубаца у којима има више крстића него кружића, – број К, и број врста и стубаца у којима има више кружића него крстића – број N (укупан број врста и стубаца – 18). Разлика V=K-N се сматра добитком играча који почиње игру. Одредити такву вредност В, да

1) први играч може да обезбеди себи добитак не мањи од В, ма како играо други играч;

2) други играч може увек да постигне то да први играч добије добитак не већи од В, ма како играо.

ПРОЛЕЋНО КОЛО
Пробна варијанта

8 – 9 РАЗРЕД

1. Отац и син клижу око округлог клизалишта. С времена на време, отац престигне сина. Када син почне да клиже у супротном правцу, њих двојица се сусрећу пет пута више него када клижу у истом правцу. За колико је отац бржи од сина?

2. Над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC конструисан је у спољашњости квадрат $ABDE$. Познато је да је $AC = 1cm$ и $BC = 3cm$. У ком односу симетрала угла C дели страницу DE?

3. На табли је написано неколико позитивних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Затим су на другу таблу записани следећи бројеви: b_0 – број свих бројева написаних на првој табли, b_1 – број свих бројева различитих од 1 који су написани на првој табли, b_2 – број свих бројева са прве табле који су већи од 2, итд. све док су b-ови позитивни бројеви (нуле се не пишу на таблу). На трећу таблу су записани бројеви c_0, c_1, $c_2, \ldots$, по већ описаним правилима, али примењеним на бројеве који се налазе на другој табли. Доказати да су на првој и трећој табли написани исти бројеви.

4. У равни је нацртан црн једнакостраничан троугао, на који је потребно поставити девет њему подударних троуглова, тако да су свака два дисјунктна и да сваки има бар једну заједничку унутрашњу тачку са црним троуглом. Како је то могуће учинити?

5. Квадрат је подељен на 100 различитих правоугаоника помоћу 9 линија паралелних једном пару страница и 9 линија паралелних другом пару страница. Показало се да се међу овако добијеним правоугаоницима налази тачно 9 квадрата. Доказати да се међу њима налазе два подударна.

10 – 11 РАЗРЕД

1. 1999 бројева је написано у низу. Први број је 1. Познато је да је сваки број, са изузетком првог и последњег, једнак суми њему суседних. Одредити последњи број.

2. Над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC конструисан је у спољашњости квадрат $ABDE$. Познато је да је $AC = 1cm$ и $BC = 3cm$. У ком односу симетрала угла C дели страницу DE?

3. На табли је написано неколико позитивних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Затим су на другу таблу записани следећи бројеви: b_0 - број свих бројева написаних на првој табли, b_1 - број свих бројева различитих од 1 који су написани на првој табли, b_2 - број свих бројева са прве табле који су већи од 2, итд. све док су b-ови позитивни бројеви (нуле се не пишу на таблу). На трећу таблу су записани бројеви c_0, c_1, $c_2, \ldots$, по већ описаним правилима, али примењеним на бројеве који се налазе на другој табли. Доказати да су на првој и трећој табли написани исти бројеви.

4. У равни је нацртан црни квадрат, на који је потребно поставити седам њему подударних квадрата, тако да су свака два дисјунктна и сваки има бар једну заједничку тачку са црним квадратом. Како је то могуће учинити?

5. Два играча играју игру на табли 9×9. Они вуку потезе наизменично. При сваком потезу, први играч уписује крстић у произвољно празно поље, а други играч уписује кружић. Када су сва поља попуњена, одређују се два броја: K - број колона и врста у којима се појављује више крстића него кружића и H - број колона и врста у којима се налази више кружића. Разлика $B = H - K$ је вредност победе првог играча. Одредити B тако да:

(а) први играч може да обезбеди победу не мању од B, без обзира на игру другог играча;

(б) други играч може да обезбеди да победа првог играча не буде већа од B, без обзира на игру првог играча.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Основна варијанта, 8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 1. У банци се налази 500 долара. Дозвољене су две операције: подићи 300 долара или уложити 198 долара. Те операције могу се вршити произвољан број пута, при том нема другог новца, осим оног који је првобитно лежао у банци. Коју је максималну суму могуће узети из банке и како то урадити.

4 2. Нека је O тачка пресека дијагонала паралелограма ABCD. Доказати: ако кружница која пролази кроз тачке A, B и D, додирује праву BC, онда кружница, која пролази кроз тачке B, C и O, додирује праву CD.

4 3. Играју двоје. Први уписује у врсту слева на десно цифру по цифру, произвољно смењујући 0 и 1. Сваки пут, после тога, пошто први упише цифру која је на реду, други размењује међу собом две цифре из већ уписаног низа (када је написана само једна цифра, други пропушта потез). Тако се поступа док цифара не буде укупно 1999. Да ли други може да постигне то, да после његовог последњег потеза распоред цифара буде симетричан у односу на средњу цифру?

6 4. Круг је са $2n$ полупречника разложен на $2n$ једнаких сектора: n плавих и n црвених, који се смењују у произвољном поретку. У плаве секторе, почев од неког, уписују се у смеру супротном смеру кретања казаљке на часовнику бројеви од 1 до n. У црвене секторе, почев од неког, уписују се исти ти бројеви али у смеру кретања казаљке на часовнику. Доказати да се може наћи полукруг у који су уписани сви бројеви од 1 до n.

6 5. Уписана кружница троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама P и Q. Нека је RS средња линија, паралелна AB, T - тачка пресека правих PQ и RS. Доказати да T лежи на бисектриси угла B тог троугла.

9 6. Топ, који прави потезе по вертикали и хоризонтали на суседно поље, у 64 потеза је обишао сва поља шаховске табле 8x8 и вратио се на почетно поље. Доказати да број потеза по вертикали није једнак броју потеза по хоризонтали.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло 1999.
Основна варијанта, 10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

4 1. У мору плива предмет који има облик конвексног полиедра. Може ли се десити да се 90% његове запремине налази испод нивоа воде и да се притом више од половине његове површине налази изнад нивоа воде?

4 2. Нека је ABCD конвексан четвороугао уписан у кружницу с центром у тачки O. Кружнице описане око троуглова ABO и CDO секу се други пут у тачки F. Доказати да кружница која пролази кроз тачке A, F и D, пролази кроз пресечну тачку дужи AC и BD.

5 3. Наћи све парове целих бројева (x,y) за које је задовољен услов: бројеви x^3+y и $x+y^3$ су дељиви са x^2+y^2.

5 4. Круг је са $2n$ полупречника разложен на $2n$ једнаких сектора: n плавих и n црвених, који се смењују у произвољном поретку. У плаве секторе, почев од неког, уписују се у смеру супротном смеру кретања казалке на часовнику бројеви од 1 до n. У црвене секторе, почев од неког, уписују се исти ти бројеви али у смеру кретања казалке на часовнику. Доказати да се може наћи полукруг у који су уписани сви бројеви од 1 до n.

5. За сваки цео ненегативан број k дефинишемо број $M(k)$ на следећи начин: запишемо број k у бинарном облику; ако је број јединица у том запису паран, онда је $M(k)=0$, а ако је непаран - онда је $M(k)=1$ (почетни чланови тог низа су: $0,1,1,0,1,0,0,1,\ldots$).

2 а) Уочимо коначан низ $M(0)$, $M(1)$, ... , $M(1000)$. Доказати да број чланова тог низа, који су једнаки свом десном суседу, није мањи од 320.

5 б) Уочимо коначан низ $M(0)$, $M(1)$, ... , $M(1000000)$. Доказати да број чланова низа, таквих да је $M(k)=M(k+7)$, није мањи од 450000.

8 6. Топ, који прави потезе по вертикали и хоризонтали на суседно поље, у 64 потеза је обишао сва поља шаховске табле 8×8 и вратио се на почетно поље. Доказати да број потеза по вертикали није једнак броју потеза по хоризонтали.

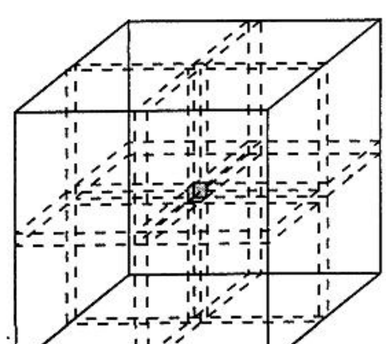
Пробна варијанта, 8. и 9. разред

1. *Коцка ивице 20 разбијена је на 8000 јединичних коцкица, при чему је на свакој коцкици написан неки број. Познато је да је у сваком стубу, састављеном од 20 коцкица и паралелном некој од страна коцке, збир бројева једнак 1. На једној коцкици написан је број 10, при чему је она садржана у три стуба* $1 \times 20 \times 20$ *паралелна странама коцке. Наћи збир свих бројева написаних на коцкицама које не припадају тим стубовима.*

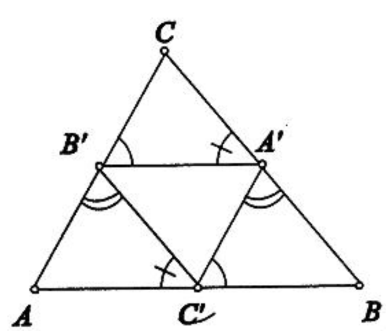
Решење: Будући да је у сваком стубу $1 \times 1 \times 20$ збир бројева једнак 1, следи да је збир бројева у стубу $1 \times 20 \times 20$ једнак 20. На основу формуле укључивања и искључивања, збир у три наведена стуба (слика 1.) је:

$$3 \cdot 20 - 3 \cdot 1 + 10 = 67.$$

Како је збир бројева у коцки 400, следи да је тражени збир једнак $400 - 67 = 333$.



Сл. 1



Сл. 2

2. *Квадрат целог броја има облик* $\ldots 09$ *(последње две цифре су 0 и 9). Доказати да је трећа цифра здесна парна.*

Решење: Ако је квадрат целог броја облика $\ldots 09$, тада се тај цео број може записати у једном од следећа два облика:

1.случај. $x = 10k + 3$. Тада је $(10k + 3)^2 = 100m + 9$, одакле следи да је $k(5k + 3) = 5m$. Даље, бројеви $5k + 3$ и k су различите парности, па је њихов производ дељив са 2, одакле је m паран број, тј. трећа цифра здесна је парна.

2.случај. $x = 10k + 7$. Тада је $(10k + 7)^2 = 100m + 9$, одакле следи да је $(k + 1)(5k + 2) = 5m$. Даље, бројеви $5k + 2$ и $k + 1$ су различите парности, па је њихов производ дељив са 2, одакле је m паран број, тј. трећа цифра сдесна је парна.

3. *У троуглу* ABC *тачке* A', B' *и* C' *се налазе на страницама* BC, CA *и* AB, *редом, при чему ниједна од њих не може бити теме троугла. Ако важе следеће једнакости:*

$$\angle AC'B' = \angle B'A'C, \angle CB'A' = \angle A'C'B, \angle BA'C' = \angle C'B'A,$$

доказати да су A', B' *и* C' *средине страница троугла* ABC.

Решење: Нека је $\angle AC'B' = \angle B'A'C = \beta, \angle CB'A' = \angle A'C'B = \alpha, \angle BA'C' = \angle C'B'A = \gamma$. Тада је $\angle BAC = \pi - (\beta + \gamma), \angle ABC = \pi - (\alpha + \gamma), \angle BCA = \pi - (\beta + \alpha)$, одакле је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, па следи $\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha, \angle ABC = \angle A'B'C' = \beta, \angle BCA = \angle B'C'A' = \gamma$.

Сада се лако показује да су четвороуглови $AC'A'B'$ и $C'BA'B'$ (слика 2.) паралелограми, па је $AC' = B'A' = C'B$, тј. C' је средиште странице AB. Аналогно се показује да су A' и B' средишта страница BC и CA. Тиме је доказ завршен.

4. *Дванаест кандидата за градоначелника говори о себи у заједничком телевизијском представљању. У једном тренутку, један од кандидата је изјавио да је до тог тренутка изречена једна лаж. Други је тада рекао: "А сада две!", потом трећи: "А сада три!" итд., све до дванаестог који је рекао: "А сада дванаест!", чиме је окончана дебата. Ако је бар један од кандидата погодио колико је лажи изречено пре његовог обраћања, одредити колико је лажи укупно изречено.*

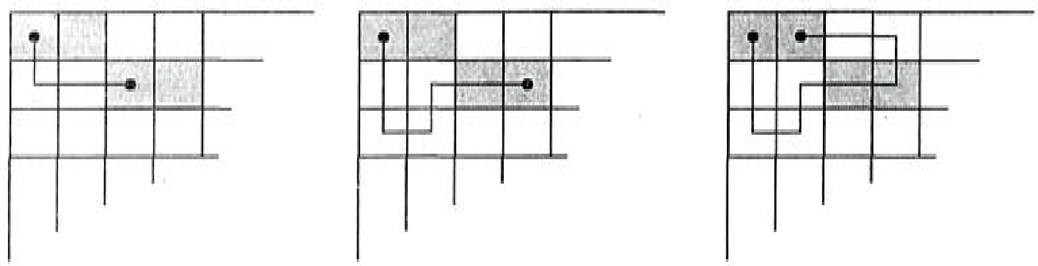
Решење: Како је бар један од кандидата погодио колико је лажи изречено пре његовог обраћања, уочимо првог који је погодио. Нека је то i-ти кандидат. Тада је пре њега изречено i лажи, тј. $i - 1$ кандидата, који су се обратили пре њега, је слагало и изречена је још једна лаж пре тога, одакле следи да је први кандидат говорио истину. Међутим, тада су и сви остали кандидати слагали, јер је број изречених лажи тада увек мањи од броја који наводи било који од преосталих кандидата, па је укупан број изречених лажи дванаест.

5. *Крокодилом називамо шаховску фигуру чији се потез састоји у премештању за* m *поља хоризонтално или вертикално, а затим за* n *поља у правцу нормалном на претходни. Доказати да је за произвољно узете* m *и* n *могуће обојити бесконачну шаховску таблу у црно и бело, тако да крокодил увек са белог поља долази на црно и обрнуто.*

Решење: Разликујемо три случаја, у зависности од парности бројева m и n:

1. случај. Нека су m и n непарни бројеви. Тада бојимо таблу један хоризонтални ред црно, један бело, наизменично (слика 3а). Уколико се крокодил премешта за

m поља хоризонтално, он стаје на поље исте боје као и почетно, а затим се за n поља вертикално премешта на поље друге боје. Уколико се крокодил премешта за m поља вертикално, он стаје на поље друге боје, а премештањем за n поља хоризонтално остаје у том реду, па је услов задатка испуњен.



Сл. 3а Сл. 3б Сл. 3в

2. случај. Нека је m непаран, а n паран. Тада бојимо таблу на стандардан шаховски начин (слика 3б). Премештањем за непаран број поља, крокодил прелази на поље друге боје, а премештањем за паран број поља остаје на пољу исте боје, па је задовољен постављен услов. Слично разматрање вршимо и када је m паран, а n непаран.

3. случај. Нека су m и n парни бројеви. Тада бојимо, наизменично у црно и бело, блокове од $2^k \times 2^k$ поља, где је 2^k највећи степен двојке који дели m и n (слика 3в), тј. $m = 2^k m_1$, $n = 2^k n_1$ и бар један од бројева m_1 и n_1 је непаран, па је случај сведен на претходни.

10. И 11. РАЗРЕД

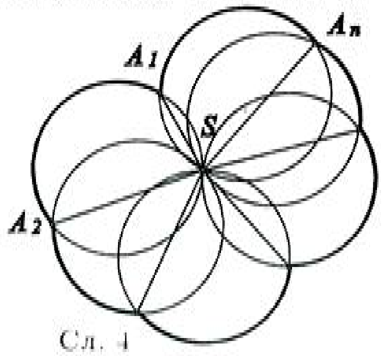
6. *Дато је 19 тегова чије су масе редом $1g, 2g, \ldots 19g$, при чему је међу њима девет жељезних, девет бронзаних и један златан. Ако је укупна маса свих жељезних тегова за $90g$ већа од укупне масе свих бронзаних тегова, наћи масу златног тега.*

Решење: Означимо са X укупну масу жељезних тегова, са Y укупну масу бронзаних тегова и са z масу златног тега. Тада важи: $190 = X + Y + z = 90 + 2Y + z$, одакле је $2Y + z = 100$, па је $45 \leq Y < 50$. Лако се показује да је $Y = 45$, па је $z = 10g$.

7. *На равном столу је поређано n папирних кругова полупречника 1, тако да рубови свих кругова пролазе кроз једну исту тачку, при чему се та тачка налази у унутрашњости области коју покривају кругови. Ако је добијена област криволинијски многоугао, наћи његов обим.*

Решење: Будући да се тачка S кроз коју пролазе сви кругови налази у унутрашњости добијеног криволинијског многоугла, следи да је $n \geq 3$. Сваки од лукова који представљају странице криволинијског многоугла може се изразити преко одговарајућих централних углова, тј. $l_i = \varphi_i r$, за $i = 1, 2, \ldots, n$. С друге стране, сваком од тих централних углова одговара периферијски угао одређен тачком S

и збир свих таквих периферијских углова је 2π (слика 4).



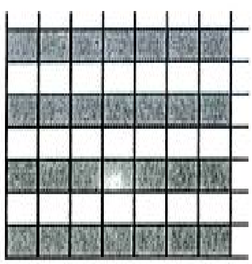
Сл. 4

Следи да је тражени обим

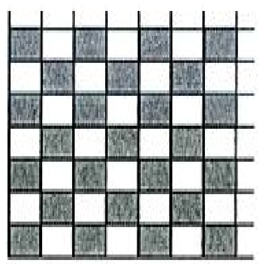
$$O = l_1 + l_2 + \cdots + l_n = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) \cdot r = 4\pi.$$

8. *На шаховској табли 8×8 означено је 17 поља. Доказати да је увек могуће изабрати два означена поља, тако да скакач може стићи с једног на друго у највише три потеза.*

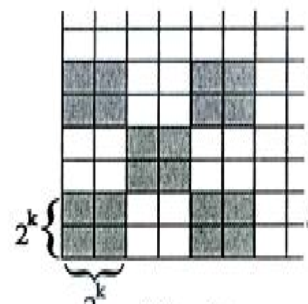
Решење: Изделимо шаховску таблу 8×8 на осам правоугаоника 4×2. Сваки од њих се може поделити на две једнаке фигуре на начин приказан на слици 5а . Лако се показује да се са сваког од поља која образују једну фигуру може стићи на било које друго поље из исте фигуре у највише три потеза (слика 5б).



Сл. 5а



Сл. 5б



Сл. 5в

Како је табла издељена на 16 фигура, на основу Дирихлеовог принципа следи да постоји фигура у којој се налазе два означена поља, па скакач може стићи са једног од та два на друго у највише три потеза.

9. *Међу свим низовима реалних бројева $(x_1, x_2, \ldots, x_{20})$ који задовољавају следеће услове:*

(1) $x_i \in (0,1), i = 1, \ldots, 20$;

(2) $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{20} = (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \cdots \cdot (1 - x_{20})$,

наћи онај за који је производ $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{20}$ максималан.

Решење: Нека је $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{20}$. Тада је $P^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{20}(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \cdots \cdot (1 - x_{20})$. С друге стране, из $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ следи $(1 - x)x \leq \frac{1}{4}$, па је $P^2 \leq \frac{1}{2^{20}}$. Максимална вредност производа се достиже за $x_i(1 - x_i) = \frac{1}{4}$ за све $i = 1, 2, \ldots, 20$, односно, за $x_1 = x_2 = \cdots = x_{20} = \frac{1}{2}$.

10. *Група психолога је саставила тест интелигенције, на основу којег се свакој тестираној особи додељује број Q који означава коефицијент интелигенције*

(што је Q већи, то је особа интелигентнија). Коефицијент интелигенције (IQ) државе одређује се као аритметичка средина коефицијента интелигенције свих њених становника.
(а) Група људи из државе A је емигрирала у државу B. Да ли је могуће да после ове емиграције порасте IQ обе државе?
(б) После тога, група грађана из B (која може да укључује и емигранте из A) емигрирала је у A. Да ли је могуће да IQ обе државе опет порасте?
(в) Група људи из A емигрирала је у B, а група људи из B у трећу државу C. Као последица емиграције, IQ све три државе је порастао. Затим је део људи из C прешао у B, а део људи из B у A. Показало се да је IQ све три државе опет порастао (у односу на оне после прве, али пре друге емиграције). Да ли је то могуће? (Ако јесте, како; ако није, зашто?)
Претпоставља се да се за дато време није променила популација, као и појединачни коефицијенти интелигенције.

Решење: (а) Да. Означимо са A_1, A_2 и B редом збирове коефицијената интелигенције људи који су емигрирали из A у B, остали у A и живели пре емиграције у B, а са n_1, n_2 и m број људи у одговарајућим групама. Да би порастао IQ обе државе морају бити задовољени следећи услови: $\frac{A_2}{n_2} > \frac{A_1+A_2}{n_1+n_2}$ и $\frac{B+A_1}{m+n_1} > \frac{B}{m}$. Лако се показује да је први услов еквивалентан са $\frac{A_2}{n_2} > \frac{A_1}{n_1}$, а други са $\frac{A_1}{n_1} > \frac{B}{m}$. Одавде закључујемо да је наведену емиграцију могуће извршити када је $IQ(A_2) > IQ(B)$.
(б) Не. Означимо са B_1 збир коефицијената интелигенције људи који су емигрирали из B у A, а са m_1 њихов број. Да би опет порастао IQ обе државе морају бити задовољени следећи услови: $\frac{A_2+B_1}{n_2+m_1} > \frac{A_2}{n_2}$ и $\frac{B+A_1-B_1}{m+n_1-m_1} > \frac{B+A_1}{m+n_1}$. Лако се показује да је први услов еквивалентан са $\frac{B_1}{m_1} > \frac{A_2}{n_2}$, а други са $\frac{B_1}{m_1} < \frac{B+A_1}{m+n_1}$. Одавде следи да је $\frac{A_2}{n_2} < \frac{B+A_1}{m+n_1}$, односно, $A_2m + A_2n_1 < Bn_2 + A_1n_2$. Како је, на основу (а), $A_1n_2 < A_2n_1$, следи $A_2m + A_2n_1 < Bn_2 + A_2n_1$, односно, $A_2m < Bn_2$, тј. $\frac{B}{m} > \frac{A_2}{n_2}$. Контрадикција.
(в) Да. Нека у држави A живе особе са коефицијентом интелигенције 121 и 123, у B са 122, 123, 130 и 133, а у C са 121. Тада су одговарајући IQ-ови ових држава 122, 127 и 121, редом. Ако у првој емиграцији из A у B пређе особа са 121, а из B у C особе са 122 и 123, одговарајући IQ-ови ће бити 123, 128 и 122, редом. Након друге емиграције, у којој из C у B прелазе особе са 121 и 122, а затим из B у A особе са 121 и 133, добијамо да су тражени коефицијенти 124, 130 и 123.

Основна варијанта, 8. и 9. разред

11. *Ако су a и b природни бројеви за које важи $NZS(a, a+5) = NZS(b, b+5)$, доказати да је $a = b$.*
Решење: Ако је $5|a$, онда $5|NZS(a, a+5) = NZS(b, b+5)$, па следи $5|b$. Одатле је онда $NZD(a, a+5) = NZD(b, b+5) = 5$, па је:

$$a(a+5) = NZS(a, a+5) \cdot NZD(a, a+5) =$$
$$= NZS(b, b+5) \cdot NZD(b, b+5) = b(b+5),$$

тј. $(a-b)(a+b+5)=0$, што значи $a=b$ јер су a и b природни бројеви.

Аналогно из $5|b$ добијамо $a=b$.

Ако пак ни a ни b нису дељиви са 5, онда је $NZD(a,a+5)=NZD(b,b+5)=1$, па опет

$$a(a+5)=NZS(a,a+5)\cdot NZD(a,a+5)=$$
$$=NZS(b,b+5)\cdot NZD(b,b+5)=b(b+5),$$

и $a=b$.

12. *Игор и Вања имају беле квадратне табле 8×8, издељене на поља 1×1. Ако су и Игор и Вања обојили у плаво једнак број поља на својим квадратима, доказати да је увек могуће разбити те квадрате на домине 2×1, тако да се и од Игоревих и од Вањиних домина може сложити квадрат 8×8 са једном истом плавом сликом.*

Решење: Докажимо да како год да њихове квадрате изделимо на домине 2×1, увек је могуће од Игорових домина сложити један квадрат, од Вањиних други, тако да оба имају исту плаву слику.

Претпоставимо да је Игоров квадрат (произвољно) издељен на домине при чему има x_i плавих (са оба плава поља), y_i двобојних (са једним плавим и једним белим пољем), z_i белих (са оба бела поља) домина. Нека је и Вањин квадрат (произвољно) издељен на домине и нека су x_v, y_v, z_v аналогни бројеви Вањиних домина.

Према услову задатка је:

$$x_i+y_i+z_i=x_v+y_v+z_v=32,$$

$$2x_i+y_i=2x_v+y_v.$$

Нека је рецимо $x_i\geq x_v$ (обрнути случај се разматра аналогно). Означимо са d разлику x_i-x_v. Из горњих једнакости добијамо:

$y_v-y_i=2d$ и $z_i-z_v=d$.

Узмимо сада $2d$ Вањиних двобојних домина (од њих укупно y_v) и од њих сложимо d квадратића 2×2 облика

P	***B***
P	***B***

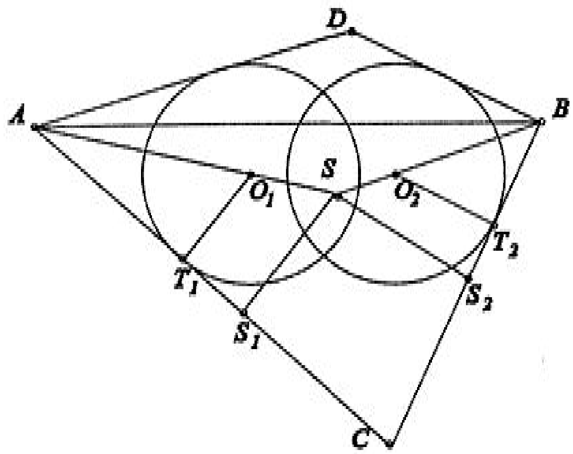
тј. тако да два поља исте боје имају заједничку страницу. Након тога Вања има x_v плавих, y_i двобојних, z_v белих домина и d квадратића наведеног облика.

Слично узмемо $2d$ Игорових домина: d плавих (од њих x_i) и d белих (од њих z_i укупно). Од тих домина опет сложимо d кадратића наведеног облика. Тада и Игору остаје као и Вањи: x_v плавих, y_i двобојних, z_v белих домина и d квадратића.

Сада је јасно да се од Вањиних домина и квадратића може сложити квадрат 8×8 и од Игорових такође, тако да оба имају исту плаву слику.

13. *Дуж AB сече две једнаке кружнице и паралелна је са њиховом линијом центара, при чему све тачке пресека кружница са правом одређеном тачкама A и B леже између ове две тачке. Кроз тачку A су повучене тангенте на* *кружницу ближу тачки A, а кроз B су повучене тангенте на кружницу ближу B. Ако ове четири тангенте образују четвороугао у чијој се унутрашњости налазе обе кружнице, доказати да је тај четвороугао тангентан.*

Решење: Означимо са C и D пресечне тачке поменутих тангенти, а са O_1 и O_2 центре датих кружница као на слици 6.



Сл. 6

Очигледно је AO_1 симетрала угла CAD и BO_2 симетрала угла CBD. Нека је S пресечна тачка правих AO_1 и BO_2 и још нека су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти AC и BC са одговарајућим кружницама, а S_1 и S_2 подножја нормала из S на AC и BC редом.

Очигледно важи $\triangle AO_1T_1 \sim \triangle ASS_1$ и $\triangle BO_2T_2 \sim \triangle BSS_2$, одакле је:

$AO_1 : AS = O_1T_1 : SS_1$ и $BO_2 : BS = O_2T_2 : SS_2$.

По претпоставци задатка праве AB и O_1O_2 су паралелне, па због Талесове теореме имамо $AO_1 : AS = BO_2 : BS$.

Из наведене три пропорције добијамо $O_1T_1 : SS_1 = O_2T_2 : SS_2$, па је $SS_1 = SS_2$ због $O_1T_1 = O_2T_2$ (полупречници датих кружница).

Пошто је $\angle SS_1C = \angle SS_2C = 90°$, следи $\triangle SS_1C \cong \triangle SS_2C$, те важи $\angle SCS_1 = \angle SCS_1$, тј. CS је симетрала угла ACB.

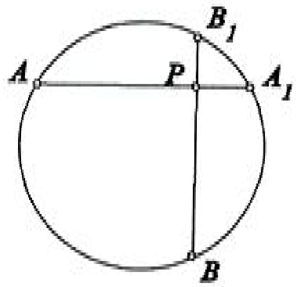
Како симетрале три унутрашња угла четвороугла $ACBD$ пролазе кроз исту тачку S, значи да је S центар уписане кружнице у тај чтвороугао. Дакле четвороугао $ACBD$ је тангентан.

14. *У правилном 25-углу повучене су све дијагонале. Доказати да не постоји девет дијагонала које пролазе кроз исту унутрашњу тачку 25-угла.*

Решење: Опишимо кружницу око датог правилног 25–угла. За произвољну његову дијагоналу назовимо "лучном дужином" те дијагонале, број темена 25–угла која леже на мањем од два лука које она одређује на описаној кружници.

Претпоставимо да постоји 9 дијагонала које имају заједничку унутрашњу тачку. Пошто никоје две од њих не могу имати и заједничко теме, следи да је свака од њих лучне дужине бар 8 (јер је сече 8 других дијагонала, од којих свака има једно теме на мањем луку над уоченом дијагоналом). Како је максимална лучна дужина 11, то према Дирихлеовом принципу имамо бар 3, од уочених 9 дијагонала, које су исте лучне дужине. Међутим оне су онда и исте (обичне дужине.

Доказаћемо да је то немогуће, тј. да три једнаке тетиве једне кружнице, а које нису дијаметри кружнице (ни једна дијагонала правилног 25–угла није дијаметар описане кружнице), не могу имати заједничку унутрашњу тачку.



Сл. 7

Нека су рецимо AA_1 и BB_1 једнаке тетиве исте кружнице и нека се оне секу у тачки P. Претпоставимо да је тачка B_1 на мањем луку тетиве AA_1 (слика 7). Како су периферијски углови над једнаким луковима једнаки, имамо

$$\angle BAB_1 = ABA_1 \text{ и } \angle A_1AB_1 = \angle A_1BB_1.$$

Одузимањем ових једнакости добијамо $\angle BAA_1 = \angle ABB_1$, што значи да је троугао APB једнакокраки, тј. $AP = BP$.

Ако би рецимо и нека трећа тетива CC_1 подударна са прве две такође пролазила кроз тачку P и рецимо да C_1 припада мањем луку над тетивом AA_1, аналогно би добили $AP = CP$. То је немогуће јер би значило да је P центар кружнице описане око троугла ABC, дакле центар полазне кружнице, па би тетиве AA_1, BB_1 и CC_1 биле дијаметри, што је супротно претпоставци.

Тиме је и претпоставка да постоји 9 дијагонала правилног 25–угла које имају заједничку унутрашњу тачку доведена до контрадикције.

15. *Двадесет стаклених перли у десет боја (по две перле од сваке боје), смештено је у десет кутија. Познато је да је могуће изабрати по једну перлу из сваке кутије, тако да буду изабране перле свих боја. Доказати да је број могућности за такав избор једнак степену двојке, различитом од јединице.*

Решење: По услову задатка постоји бар један избор 10 разнобојних перли из 10 разних кутија. Означимо перле које у том избору учествују бројевима 1, 2,... 10, при чему је перла 1 изабрана из прве кутије, перла 2 из друге,..., перла 10 из десете кутије. Преосталих 10 перли означимо са 1', 2',..., 10', тако да су перле j и j' исте боје за $j = 1, 2, \ldots, 10$. Уведимо функцију $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 10\}$ на следећи начин: $f(i) = j$ акко i' лежи у j-тој кутији (заједно са куглицом j), за $i = 1, 2 \ldots, 10$. Међу бројевима $1, f(1), f^2(1), \ldots, f^{10}(1)$, по Дирихлеовом принципу, постоје два једнака. Нека су то $f^k(1)$ и $f^{k+l}(1)$. Тада је $f^l(f^k(1)) = f^k(1)$, тј. за $i_1 = f^k(1)$ важи $f^l(i_1) = i_1$. Означимо са $A_1 = \{i_1, f(i_1), \ldots, f^{l-1}(i_1)\}$. Лако се види да за свако $a_1 \in A_1$ важи $f^l(a_1) = a_1$. Посматрајмо сада скуп $\{1, 2, \ldots, 10\} \backslash A_1$. Ако у њему постоји i_2 тако да је за неко m $f^m(i_2) = i_2$, онда уводимо $A_2 = \{i_2, f(i_2), \ldots, f^{m-1}(i_2)\}$. Сада посматрамо скуп $\{1, 2, \ldots, 10\} \backslash (A_1 \cup$

A_2), па ако постоји i_3 тако да за неко r важи: $f^r(i_3) = i_3$, за A_3 прогласимо скуп $\{i_3, f(i_3), \ldots, f^{r-1}(i_3)\}$. Овај поступак настављамо све док не дођемо у ситуацију да $B = \{1, 2, \ldots, 10\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p)$ *не садржи ниједан елемент* i *за који важи:* $f^x(i) = i$, за неко x. Тако добијамо скупове $A_1, A_2, \ldots, A_p, B$ ($p \geq 1$) који су по паровима дисјунктни, а унија им је цео скуп $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Нека је дат произвољан избор перли који задовољава услов задатка, а различит је од полазног избора. Ако у том избору не учествује перла j_0, онда је из кутије $j_1 = f(j_0)$ изабрана перла j_0', па у избору не учествује ни j_1, одакле следи да је из $j_2 = f(j_1)$ изабрана j_1', итд. Међутим, из $j_n = j_k$ и из чињенице да је из j_n-е кутије изабрана j_{n-1}' перла, а из j_k перла j_{k-1}' , следи $j_{n-1} = j_{k-1}$. Зато постоји n, тако да је $j_0 = j_n$, тј. $f^n(j_0) = j_n = j_0$, односно, $j_0 \notin B$. С друге стране, већ смо видели да ако у неком избору не учествује j_0, онда не учествују ни $f(j_0)$, $f^2(j_o)$, итд., па ако $j_0 \in A_q$ не учествује у избору, онда ни један елемент A_q не учествује у избору. Одавде се види да сваком избору који задовољава услове задатка, одговара скуп оних перли између 1, 2,..., 10 које не учествују у том избору, а тај скуп је унија неколико од скупова $A_1, A_2, \ldots, A_p$. И обрнуто, свакој унији неколико од скупова $A_1, \ldots, A_p$ одговара избор у коме перле из тог скупа не учествују. Зато је укупан број тражених избора једнак броју различитих унија по неколико (или ниједног) од скупова $A_1 \ldots, A_p$, а тај број је 2^p. Из ранијих разматрања је јасно да је $p \geq 1$, па је тврђење задатка доказано.

16. *Банда разбојника је отела кесу новчића од неког трговца. Сваки новчић има вредност целог броја грошева. Показало се да је, без обзира који новчић извукли из кесе, остатак могуће поделити међу разбојницима, тако да сваки добије исту суму у грошевима. Ако је из кесе извучен један новчић, доказати да је број преосталих новчића дељив са бројем разбојника.*

Решење: Означимо са $v_1, v_2, \ldots, v_k$ вредности новчића у грошевима, а са $n_1, n_2, \ldots, n_k$ бројеве новчића са вредностима $v_1, v_2, \ldots, v_k$ редом. Нека је $d = NZD(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, а m број разбојника.

Према услову задатка укупна сума новца $S = n_1v_1 + n_2v_2 + \ldots + n_kv_k$ умањена за вредност произвољног (једног) новчића се може поделити на m једнаких делова, сваки од којих чини неколико новчића (чије су вредности дељиве са d). Одатле сваки од тих m делова чини једну исту суму новца дељиву са d, те је $md|S - v_i$, за $i = 1, 2, \ldots, k$.

Одавде је $md|S - v_1$ и $md|S - v_i$, за $i = 2, 3, \ldots, k$, па одузимањем добијамо

$$m|v_i - v_1, i = 2, 3, \ldots, k. \qquad (1)$$

Како је $S - v_1 = (n_1 - 1)v_1 + n_2v_2 + \ldots + n_kv_k = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1)v_1 + n_2(v_2 - v_1) + n_3(v_3 - v_1) + \ldots + n_k(v_k - v_1)$, из (1) следи

$$md|(n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1)v_1 \Leftrightarrow m|(n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1)\frac{v_1}{d}. \qquad (2)$$

Приметимо да су $\frac{v_1}{d}, \frac{v_2}{d}, \ldots, \frac{v_k}{d}$ цели бројеви такви да је њихов NZD једнак 1. Због (1) m дели разлику свака два од њих, па ако би m и $\frac{v_1}{d}$ имали заједнички делилац већи од 1, онда би тим бројем био дељив и сваки од бројева $\frac{v_2}{d}, \frac{v_3}{d}, \ldots, \frac{v_k}{d}$, па и $NZD(\frac{v_1}{d}, \frac{v_2}{d}, \ldots, \frac{v_k}{d})$, што је немогуће. Дакле m и $\frac{v_1}{d}$ су узајамно прости, те из (2) следи $m|(n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1)$, што је и требало доказати.

10. и 11. разред

17. *(а) Ако су a и b природни бројеви за које важи $NZS(a, a+5) = NZS(b, b+5)$, доказати да је $a = b$.*
(б) Да ли постоје природни бројеви a, b и c, такви да важи
$NZS(a, b) = NZS(a + c, b + c)$?
Решење: (а) Видети једанаести задатак.

(б) Претпоставимо да постоје $a, b, c \in N$ такви да је $NZS(a, b) = NZS(a + c, b + c)$. Нека је p прост број и нека $p^\alpha | NZD(a, b)$. Тада важи

$$(p^\alpha | a \wedge p^\alpha | b) \Rightarrow p^\alpha | a - b \Rightarrow p^\alpha | (a + c) - (b + c).$$

Ако $(a+c)$ није дељиво са p^α, онда није ни $(b+c)$ (јер њихова разлика јесте), па ни $NZS(a+c, b+c)$, а то би била контрадикција са чињеницом да $NZS(a, b)$ јесте дељив са p^α. Дакле мора бити $(a + c)$, па и $(b + c)$ дељиво са p^α, тј. $p^\alpha | NZD(a + c, b + c)$.

Аналогно се показује да из $p^\alpha | NZD(a + c, b + c)$, следи $p^\alpha | NZD(a, b)$. Дакле $p^\alpha | NZD(a + c, b + c) \Leftrightarrow p^\alpha | NZD(a, b)$.

Како ово важи за сваки прост број p и сваки ненегативан цео број α, то је $NZD(a + c, b + c) = NZD(a, b)$.

Сада имамо $ab = NZD(a, b) \cdot NZS(a, b) = NZD(a+c, b+c) \cdot NZS(a+c, b+c) = (a + c)(b + c)$, тј. $c(a + b + c) = 0$, а то је немогуће за $a, b, c \in N$.

Тиме смо претпоставку, да постоје природни бројеви a, b, c за које је $NZS(a + c, b + c) = NZS(a, b)$, довели до контрадикције.

18. *Дуж AB сече две једнаке кружнице и паралелна је са њиховом линијом центара, при чему све тачке пресека кружница са правом одређеном тачкама A и B леже између ове две тачке. Кроз тачку A су повучене тангенте на кружницу ближу тачки A, а кроз B су повучене тангенте на кружницу ближу B. Ако ове четири тангенте образују четвороугао у чијој се унутрашњости налазе обе кружнице, доказати да је тај четвороугао тангентан.*
Решење: Видети тринаести задатак.

19. *У таблицу је уписано девет бројева на следећи начин:*

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

Познато је да су суме елемената по врстама и колонама међусобно једнаке, тј.

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 =$$
$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3.$$

Доказати да је сума производа елемената по врстама једнака суми производа елемената по колонама, тј.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 =$$
$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_3 \cdot c_3.$$

Решење: Лако се проверава да је за произвољне x, y, z испуњено:

$$xyz = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) + \frac{1}{6}(x + y + z)^3$$

Користећи овај идентитет и услов $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = s$, добијамо

$a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 = \frac{1}{3}(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + c_1^3 + c_2^3 + c_3^3) - \frac{1}{2}s(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \frac{1}{2}s^3$.

Због $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = s$, аналогно добијамо $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3 = \frac{1}{3}(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 + a_3^3 + b_3^3 + c_3^3) - \frac{1}{2}s(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) + \frac{1}{2}s^3$,

одакле следи тражено.

20. *Око округлог стола је постављено дванаест столица за чланове жирија, при чему је на свакој столици било написано име члана. Расејани Николај Николајевич је стигао први и, уместо на своју, сео је на суседну столицу, гледано у правцу кретања казаљке на сату. Сваки члан жирија, који је стигао после њега, заузимао је или своју столицу, или прву слободну столицу у правцу кретања казаљке на сату, уколико је његова била заузета. Настали распоред чланова жирија зависи од редоследа њиховог приласка столу. На колико различитих начина се могу разместити чланови жирија?*

Решење: Нумеришимо чланове жирија бројевима $1, 2, \ldots, 12$ почевши од Николаја Николајевича, па редом којим би трбало да седе око стола. На исти начин нумеришимо и њима одговарајуће столице. Сваком распореду који се добија на начин описан у задатку придружимо скуп оних чланова који нису на својим местима. Овакво пресликавање је "1-1".

Заиста, нека је рецимо скуп $\{1, 2, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, такав да је $1 < 2 < a_1 < \ldots < a_k$, поменутим пресликавањем придружен неком распореду чланова за округлим столом. У том распореду очигледно 1 седи на месту 2. Након што 1 заузме место 2, пристижу нови чланови и сваки седа на своје место све док не стигне 2. Онда 2 заузима прво слободно место, означимо га са b. То значи да члан b неће седити на свом месту, тј. $b \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, али и то да су сви чланови између 2 и b стигли пре 2 и сели на своја места. Одатле закључујемо $b = a_1$, тј. 2 седи на месту a_1.

Аналогно закључујемо да a_1 седи на месту a_2, a_2 на месту a_3, итд., a_k на месту 1.

Дакле скупом $\{1, 2, a_1, \ldots, a_k\}$ једнозначно је одређен распоред седења (тако да је баш то скуп чланова који нису на својим местима), што значи да је поменуто пресликавање "1-1".

Оно је и "на" јер скуп $\{1, 2, a_1, \ldots, a_k\}$ одговара распореду који се добија ако чланови пристижу следећим редом: прво 1, затим сви чланови осим оних из скупа $\{1, 2, a_1, \ldots, a_k\}$, онда редом $2, a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Показали смо да је поменуто пресликавање "1-1" и "на"; следи да је тражени број распореда чланова жирија једнак броју подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 12\}$ који садрже 1 и 2, а овај број је једнак 2^{10}.

21. *Под "размером" правоуглог паралелопипеда подразумевамо збир његових димензија - дужине, ширине и висине. Да ли постоји правоугли паралелопипед у који се може сместити правоугли паралелопипед веће "размере"?*

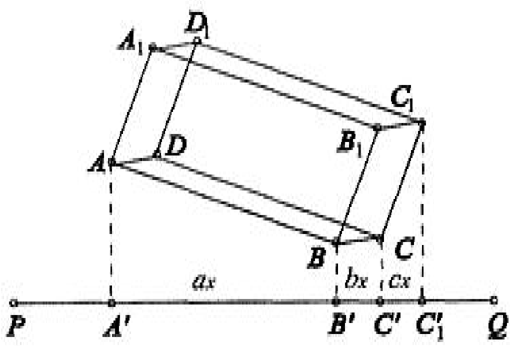
Решење: Не постоји.

Нека је дат произвољан квадар са ивицама дужина x, y, z и нека је унутар њега садржан квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са ивицама $AB = a, AD = b, AA_1 = c$. Три ивице спољашњег квадра које полазе из истог темена можемо посматрати као координатне осе, па важи $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, где су a_x, a_y, a_z дужине ортогоналних пројекција дужи $AB = a$ на ивице спољашњег квадра. Аналогно важи $b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ и $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$, уз аналогне ознаке.

Одавде је $a \leq a_x + a_y + a_z$, $b \leq b_x + b_y + b_z$, $c \leq c_x + c_y + c_z$, што даје:

$$a + b + c \leq a_x + b_x + c_x + a_y + b_y + c_y + a_z + b_z + c_z \qquad (1).$$

Нека је PQ ивица спољашњег квадра дужине x. Означимо са $A', B', C', D', A_1', B_1', C_1', D_1'$ ортогоналне пројекције темена унутрашњег квадра на праву PQ. Јасно је да све те тачке леже баш на дужи PQ. Из $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ следи $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$, па сигурно једна од тачака C' или D' не припада унутрашњости дужи $A'B'$.



Сл. 8

Рецимо да је ситуација баш као на слици 8., тј. да C' не лежи унутар дужи $A'B'$. Пошто су и вектори $\overrightarrow{A'A_1'}$ и $\overrightarrow{C'C_1'}$ једнаки, следи да или A_1' или C_1' не лежи унутар дужи $A'C'$. Нека као на слици C_1' не лежи унутар дужи $A'C'$ (у супротном је $A_1'C' = a_x + b_x + c_x$). Тада је

$$A'C_1' = A'B' + B'C' + C'C_1' = a_x + b_x + c_x.$$

Због $A'C_1' \leq PQ = x$, имамо: $a_x + b_x + c_x \leq x$.
Аналогно је $a_y + b_y + c_y \leq y$ и $a_z + b_z + c_z \leq z$, те је

$$a_x + b_x + c_x + a_y + b_y + c_y + a_z + b_z + c_z \leq x + y + z.$$

Заједно са (1) ово коначно даје: $a + b + c \leq x + y + z$,
што је и требало доказати.

22. *Дата је функција $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$, таква да триноми x^2+ax+b и x^2+cx+d немају заједничке корене. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:*

(i) постоји бројни интервал који не садржи ни једну вредност дате функције:
(ii) $f(x)$ се може представити у облику:

$$f(x) = f_1(f_2(\dots f_{n-1}(f_n(x))\dots)),$$

где се свака од функција $f_i(x)$ може записати у једном од следећих облика: k_ix+b_i, x^{-1}, x^2.

Решење: $(i) \Rightarrow (ii)$ Претпоставимо да постоји бројни интервал I_1 који не садржи ни једну вредност дате функције. Тада за све y из тог интервала једначина

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d} = y \Leftrightarrow (y-1)x^2 + (yc-a)x + (yd-b) = 0 \qquad (1)$$

нема решења, па за њену дискриминанту важи:

$$D(y) = (yc-a)^2 - 4(y-1)(yd-b) < 0.$$

Пошто је $f(x)$ непрекидна на сваком интервалу J, који не садржи нуле тринома x^2+cx+d, следи да постоји интервал $I_2 = f(J)$, за све y из којег, (1) има решење, тј. да важи $D(y) \geq 0$. Како је $D(y)$ квадратна функција по y, постоје $y_1 \neq y_2$ нуле те функције.

Уочимо да је:
$f(x) = \frac{1}{\frac{-1}{y_2-y_1}h(x)+\frac{1}{y_2-y_1}} + y_1$, за $h(x) = \frac{(y_2-1)x^2+(y_2c-a)x+(y_2d-b)}{(y_1-1)x^2+(y_1c-a)x+(y_2d-b)}$.

Међутим, $h(x)$ је облика $\pm(\frac{px+q}{rx+s})^2$, јер смо изабрали баш такве y_1 и y_2. Лако се види да се функција $\frac{px+q}{rx+s}$ увек може представити као композиција функција облика $kx+b$ и x^{-1}, одакле следи да $f(x)$ задовољава услов (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Претпоставимо да је $f(x) = f_1(f_2(\dots(f_n(x))\dots))$, где су $f_i(x)$ једног од три наведена облика. Лако се види да се као коначна композиција функција облика $kx+b$ и x^{-1} може добити само функција облика $\frac{px+q}{rx+s}$, тј. не може се добити $f(x)$. Због тога бар једна од функција $f_i(x)$ је x^2. Нека је рецимо $f_m(x) = x^2$.

Очигледно $f_m(f_{m+1}(\dots(f_n(x))\dots))$ задовољава услов (i), јер цео интервал $(-\infty, 0)$ не садржи вредност те функције. Лако се види да функције које су једног од наведена три облика очувавају услов (i), тј. ако $h(x)$ задовољава (i) и $f_i(x)$ је једног од наведених облика, онда и $f_i(h(x))$ задовољава исти услов.

Одавде индуктивно следи да и $f(x)$ задовољава (i).