О БРОЈУ 1089

Ратко Тошић, Нови Сад

У броју МЛ L-4 пренели смо кратак чланак „Рецепт за успех у животу“ из МЛ III – 4, 5 из 1969. године. Како желимо да се детаљније позабавимо проблемом из тог чланка, преносимо његов садржај у целини:

Један радник, који се није могао снаћи у свом послу, оде код лекара да тражи помоћ. Потужи му се на своју невољу. Лекар га прегледа, па му рече: „Као што је лав цар међу животињама, тако је и лек, којег ћу Вам преписати, цар међу лековима. Врло је ефикасан, али и чудан“.

Затим седе за сто и написа рецепт: ЦАР ЈЕ ЧУДАН. Дајући тај рецепт раднику, лекар му објасни у коју апотеку треба да иде да би му на основу тог рецепта саставили лек.

Радник је ту апотеку лако пронашао. Апотекар коме се обратио погледа рецепт и рече раднику: „У сваки лек улазе поједини састојци у потребној количини. Зато узмите оловку, па испод сваког слова у Вашем рецепту напишите цифре редом од 1 до 9 и 0. Сада одаберите ма која три слова из рецепта , па их замените одговарајућим цифрама. Сваки лек мора да се меша. Зато добијеном броју обрните редослед цифара, па од већег броја одузмите мањи. Добијеној разлици поново обрните редослед цифара, па је саберите са новодобијеним бројем. Тако сте добили дозу лека за један дан. Пошто месец има 30 дана помножите добијени број са 30. Ето то Вам је лек и он ће Вам једини помоћи у животу!“.

„Ја Вас ништа не разумем“- одговори радник.

„Замените цифре у добијеном броју одговарајућим словима, па ће Вам све бити јасно“- заврши апотекар.

О ком чудесном леку се ради?

Читаоци који су се позабавили тим чланком могли су доћи до закључка да је чудесни лек о коме се говори у чланку: РАЧУН.

Остаје да се разјасни зашто увек добијамо ту исту реч, без обзира на избор три слова на почетку рачунања.

Подсетимо се прво рецепта који је дат у чланку и демонстрирајмо га на једном примеру.

Кад испод слова испишемо редом цифре, добијамо запис

Ц	А	Р	Ј	Е	Ч	У	Д	А	Н
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Изаберимо на пример слова А, Е и У и применимо рецепт из чланка. Изабраним словима одговарају цифре 2, 5 и 7, од којих формирамо троцифрени број 257. Број који се добија кад цифре испишемо обрнутим редом је 752. Разлика тих бројева је 495 (752 – 257 = 495). Исписујући обрнутим редом цифре броја 495, добијамо број 594. Сабирањем бројева 495 и 594 добијамо број 1089. Множењем броја 1089 са 30 добијамо број 32670. Ако сада сваку цифру добијеног броја заменимо одговарајућим словом, добијамо реч РАЧУН.

Одлучујући моменат у овој процедури је добијање броја 1089. Читалац који је испробао неколико случајева, тј. експериментисао са различитим тројкама слова, могао је приметити да увек после прва два корака добијамо баш тај број 1089. То је последица следећег тврђења, које ћемо формулисати у општем случају:

Нека је A произвољан троцифрени број код кога нису све цифре једнаке, A′ број који се добија кад цифре броја A испишемо обрнутим редоследом, $B = |A - A'|$ апсолутна вредност разлике бројева A и A′, B′ број који се добија кад се цифре броја B испишу обрнутим редом. Тада је $B + B' = 1089$.

Напомена: За бројеве X и X' који се један из другог добијају тако што се цифре испишу обрнутим редом кажемо да су *узајамно супротни*.

Доказ тврђења. Нека је $A = \overline{xyz}$. Тада је $A' = \overline{zyx}$ и

$$B = |A - A'| = |100x + 10y + z - 100z - 10y - x| = |99(x - z)| = 99|x - z|.$$

Видимо да је број B дељив са 99, дакле, са 9 и 11. То значи да је збир цифара броја B дељив са 9 и да је друга цифра једнака збиру прве и треће. То је могуће само ако је друга цифра деветка. Дакле, $B = \overline{a9b}$, где је a + b = 9. Тада је $B' = \overline{b9a}$, па је

$$B + B' = 100(a + b) + 180 + (a + b) = 101(a + b) + 180 = 101 \cdot 9 + 180 = 909 + 180 = 1089.$$

Напомена: Иако смо тврђење формулисали за троцифрене бројеве A, оно важи и за природне бројеве са мање од три цифре, које онда формално посматрамо као троцифрене, пишући нуле уместо једне или две недостајуће цифре. На пример, ако је $A = 38$, пишемо формално $A = 038$, у ком случају је $A' = 830$. Исто тако, за $A = 420$ је $A' = 024$.

Пример. За $A = 038$, $A' = 830$ имамо да је $B = 830 - 38 = 792$, $B' = 792 + 297 = 1089$.

Број 1089 има још неке интересантне особине. На пример,

$$1089 = 33^2 = 65^2 - 56^2,$$

тј. добија се као решење ребуса $AB^2 - BA^2 = CDEF$.

Исто тако, 1089 је један од два четвороцифрена броја који је прави делитељ њему супротног броја.

Заиста, потражимо број $\overline{abcd}$ за који је $\dfrac{\overline{dcba}}{\overline{abcd}} = k$, за неки природан број $k > 1$.

Број k је очигледно једноцифрен. Извршимо анализу по цифри a – првој цифри траженог броја.

За $a = 1$, треба да важи $k \cdot \overline{1bcd} = \overline{dcb1}$. Како се производ dk завршава цифром 1, постоје три могућности:

1. $d = 3$, $k = 7$;
2. $d = 7$, $k = 3$;
3. $d = k = 9$.

Прва два случаја су немогућа, јер је $7 \cdot \overline{1bc3} > \overline{3cb1}$ и $3 \cdot \overline{1bc7} < \overline{7cb1}$.

У трећем случају тражимо решење за $9 \cdot \overline{1bc9} > \overline{9cb1}$. Лако се види да је b = 0, јер је $9 \cdot \overline{11c9} > 10000$ за $c > 0$, а $9 \cdot 1109 = 9981$.

Сада тражимо решење за $9 \cdot \overline{10c9} = \overline{9c01}$. Како после множења са последњом цифром имамо пренос 8 ($9 \cdot 9 = 81$), производ $9c$ завршава се цифром 2, што је могуће само у случају $c = 8$ ($9 \cdot 8 = 72$). На тај начин добијамо једино решење $\overline{abcd} = 1089$.

Даљом анализом, за a > 1, налазимо једини други четвороцифрени број са особином да је прави делитељ њему супротног броја. То је број 2178 ($4 \cdot 2178 = 8712$).

Задаци за самостални рад

1. За број који је прави делитељ свог супротног броја кажемо да је *чудан*.
а) Докажи да су 1089 и 2178 једини четвороцифрени чудни бројеви.
б) Да ли постоје чудни бројеви са мање од 4 цифре?

2. Докажи да за сваки природан број $n > 4$ постоји n-цифрени чудни број.

3. Докажи да постоје бар три осмоцифрена чудна броја.

4. Докажи да постоје бар три деветоцифрена чудна броја.

5. Докажи да постоји бар пет дванаестоцифрених чудних бројева.

Статијата прв пат е објавена во списанието
МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ, Београд