29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 21. октобар 2007. год.

8—9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Колико се највише белих и црних жетона може ставити на шаховску таблу тако да на свакој хоризонтали и на свакој вертикали белих жетона буде тачно два пута више него црних? (Један жетон заузима само једно поље)

2. (4 поена) На папиру су записани број 1 и неки број x који није цео. У једном потезу (кораку) може се на папиру написати збир или разлика било која два већ написана броја, или да се напише број реципрочан било ком од већ написаних бројева. Такође је допуштено на папиру записати број који се тамо већ налази, као и сабрати број сам са собом. Може ли се после извесног броја потеза на папиру појавити број x^2?

3. (4 поена) Средиште једне од страница троугла и подножја висина спуштених на друге две странице тог троугла су темена једнакостраничног троугла. Мора ли у том случају и полазни троугао бити једнакостраничан?

4. (5 поена) У таблицу 29×29 уписани су бројеви 1, 2, 3, ... , 29, сваки тачно по 29 пута. Испоставило се да је збир бројева изнад главне дијагонале три пута већи од збира бројева испод те дијагонале. Нађите број који је уписан у централно поље те таблице. (Главна дијагонала — то је дијагонала која спаја горњи леви угао таблице са доњим десним углом)

5. (5 поена) Мађионичар завезаних очију даје једном гледаоцу 5 карата с бројевима од 1 до 5. Гледалац две карте задржава (сакрива) код себе, а три даје мађионичаревом помоћнику. Помоћник показује гледаоцу две од те три карте, а гледалац каже мађионичару бројеве тих карата (којим год хоће редом). После тога мађионичар погађа бројеве карата које је задржао (сакртио) гледалац. Како треба да се договоре мађионичар и помоћник, да би трик увек успео?

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 21. октобар 2007. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) На свакој од сто слика приказани су једна одрасла особа и једно дете које је нижег раста од одрасле особе. Од свих њих треба саставити једну велику слику. При томе је допуштено променити размеру сваке слике, тј. поделити висину одраслог и висину детета истим целим бројем (при чему се за разне слике размера може мењати различито). Доказати да је могуће урадити (тј. променити размеру сваке слике) тако да после тога на великој (збирној) слици ма која одрасла особа (с било које слике) буде виш аод ма ког детета (на било којој од слика).

2. (4 поена) На папиру су записана три позитивна броја: x, y и 1. У једном потезу (кораку) може се на папиру написати збир или разлика било која два већ написана броја или, пак, број реципрочан било ком од већ написаних бројева. Такође је допуштено на папиру записати број који се тамо већ налази, као и сабрати број сам са собом. Може ли се после извесног броја потеза на папиру добити:

а) број x^2? (2 поена)
б) број xy? (2 поена)

Разуме се, могу се разматрати разни случајеви (на пример, ако је x=1, задатак је решен; али је остало да се реши када је x≠1, итд.).

3. (4 поена) Дата је права и две тчке A и B, које су са исте стране те праве и на једнаком растојању од ње. Како помоћу шестара и лењира наћи на правој тачку C, такву да производ AC·BC буде најмањи?

4. (4 поена) Мађионичар завезаних очију даје једном гледаоцу 29 карата с бројевима од 1 до 29. Гледалац две карте задржава (сакрива) код себе, а остале даје мађионичаревом помоћнику. Помоћник показује гледаоцу две од тих карата, а гледалац каже мађионичару бројеве тих карата (у ком год хоће редоследу). После тога мађионичар погађа бројеве карата које је задржао (сакрио) гледалац. Како треба да се договоре мађионичар и помоћник, да би трик увек успео?

5. Квадрат странице 1 cm разрезан је на три конвексна многоугла. Може ли се десити да дијаметар (пречник) свакога од њих није већи од:

а) 1 cm; (1 поен)

б) 1,01 cm; (2 поена)

в) 1,001 cm? (2 поена)

(Дијаметар многоугла је максимално растојање између два његова темена)

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 28. октобар 2007. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (5 поена) На страници CD ромба $ABCD$ узета је тачка K тако да је $AD=BK$. Нека је F пресечна тачка дијагонале BD и симетрале странице BC. Докажите да тачке A, F и K леже на једној правој.

2. **а)** (3 поена) Пера и Васа замислили су по три природна броја. Пера је за свака два од својих бројева написао на табли њихов највећи заједнички делилац. Васа је за свака два од својих бројева на табли написао њихов најмањи заједнички садржалац. Испоставило се да да је Пера на табли написао исте бројеве као и Васа (могуће другим редом). Докажите да су сви написани бројеви на табли различити.

б) (3 поена) Да ли ће тврђење из претходног задатка остати да важи ако Пера и Васа у почетку замисле по четири природна броја?

3. (6 поена) Миша стоји у центру кружног терена (ливадице) полупречника 100 метара. Сваког минута он чини корак дугачак 1 метар. Пре сваког корака он саопштава у ком смеру ће да коракне. Каћа има право да га натера да промени смер у супротан. Може ли миша поступати тако да у неком моменту свакако изађе са тог терена, или га Каћа може увек у томе спречити?

4. (7 поена) Дата је трака са $1 \times N$ поља (квадратића). Двојица играју овакву игру. Играч који је први на потезу ставља крстић у једно од слободних поља, а други играч ставља нулу. И тако наизменично. Није допуштено у суседна поља ставити два крстиће или две нуле. Губи онај ко не може да учини потез (да стави свој знак). Који од играча може увек да победи (ма како да игра његов супарник)?

5. (8 поена) Имамо колекцију (гарнитуру) од неколико тегова и на сваком је назначена његова маса. Познато је да су колекција маса и колекција натписа исте, али је могуће да су неки натписи побркани (погрешно стављени). Теразије представља хоризонтална дуж (полуга), која има ослонац у свом средишту. При мерењу тегови се вешају у произвољним тачкама полуге, после чега теразије остају у равнотежи или скрећу на једну или другу страну (тј. нарушава се равнотежа: један крај полуге се подиже, а други спушта). Може ли се увек једним мерењем проверити да ли су сви натписи тачни или не? (Теразије ће бити у равнотежи ако је збир момената тегова који су десно од средине полуге једнак збиру момената тегова који су лево, а у противном, скренуће надоле тамо где је збир момената већи. Моменат тега је производ ms масе тега m и растојања s од њега до средиишта полуге).

6. Мађионичару су везали очи, а гледалац је поређао у низ N једнаких новчића, при чему је сам одлучивао да ли ће са горње стране бити "круна" или "писмо". Мађионичарев помоћник је онда замолио гледаоца да на листу папира напише ма који број од 1 до N и покаже га свим присутним. Видевши тај број, помоћник показује гледаоцу на један од новчића у низу и моли га да преврне тај новчић, што овај учини.. Затим мађионичару одвезују очи, а он погледа на низ новчића и без грешке одређује број који је гледалац написао.

а) (4 поена) Докажите да, ако мађионичар и његов помоћник имају метод који омогућава мађионичару да гарантовано открије број за $N=a$, онда они имају метод и за $N=2a$.

б) (5 поена) Нађите све вредности N за које мађионичар с помоћником има такав метод (начин за погађање).

7. (9 поена) Влада је решио да постане велики писац. Ради тога је он сваком слову нашег језика придружио реч која садржи то слово. Затим је написао реч придружену слову "А". Даље је уместо сваког слова написао придружену му реч (правећи размак између речи); затим је у тако насталом тексту поново уместо сваког слова написао придружену му реч, и тако укупно 40 пута. Владин текст почиње овако: "Конвој бродова на успаваним морима". Докажите да се тај склоп речи среће у Владином тексту бар још једном.

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 28. октобар 2007. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.
Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. **а)** (2 поена) Пера и Васа замислили су по три природна броја. Пера је за свака два од својих бројева написао на табли њихов највећи заједнички делилац. Васа је за свака два од својих бројева на табли написао њихов најмањи заједнички садржалац. Испоставило се да је Пера на табли написао исте бројеве као и Васа (могуће другим редом). Докажите да су сви написани бројеви на табли различити.

б) (2 поена) Да ли ће тврђење из претходног задатка остати да важи ако Пера и Васа у почетку замисле по четири природна броја?

2. (6 поена) Дијагонале тетивног четвороугла (тј. четвороугла уписаног у кружницу) секу се у тачки P. Нека су K, L. M, N - средишта страница тог четвоироугла. Докажите да су полупречници описаних кружница око троуглова PKL, PLM, PMN и PNK једнаки.

3. (6 поена) Одредите све растуће аритметичке прогресије с коначним бројем чланова, чији је збир једнак 1, а сваки члан је облика $1/k$, где је k природан број.

4. (6 поена) Имамо колекцију (гарнитуру) од неколико тегова и на сваком је назначена његова маса. Познато је да су колекција маса и колекција натписа исте, али је могуће да су неки натписи побркани (погрешно стављени). Теразије представља хоризонтална дуж (полуга), која има ослонац у свом средишту. При мерењу тегови се вешају у произвољним тачкама полуге, после чега теразије остају у равнотежи или скрећу на једну или другу страну (тј. нарушава се равнотежа: један крај полуге се подиже, а други спушта). Да ли је увек могуће једним мерењем проверити да ли су сви натписи тачни или не? (Теразије ће бити у равнотежи ако је збир момената тегова који су десно од средине полуге једнак збиру момената тегова који су лево, а у противном, скренуће надоле тамо где је збир момената већи. Моменат тега је производ ms масе тега m и растојања s од њега до средишта полуге).

5. Мађионичару су везали очи, а гледалац је поређао у низ N једнаких новчића, при чему је сам одлучивао да ли ће са горње стране бити "круна" или "писмо". Мађионичарев помоћник је онда замолио гледаоца да на листу папира напише ма који број од 1 до N и покаже га свим присутним. Видевши тај број, помоћник показује гледаоцу на један од новчића у низу и моли га да преврне тај новчић, што овај учини. Затим мађионичару одвезују очи, а он погледа на низ новчића и без грешке одређује број који је гледалац написао.

а) (4 поена) Докажите да, ако мађионичар и његов помоћник имају метод који омогућава мађионичару да гарантовано открије број за $N=a$ и за $N=b$, онда они имају метод и за $N=ab$.

б) (4 поена) Нађите све вредности N, за које мађионичар с помоћником има такав метод (начин за погађање).

6. (8 поена) У равни су нацртана два конвексна многоугла P и Q. За сваку страницу многоугла P, многоугао Q можемо поставити између две праве паралелне тој страници. Означимо са h најмање растојање које може бити између тих правих, а са l дужину странице, па израчунамо производ $l\,h$. Сумирајући те производе по свим страницама многоугла P, добићемо неку величину (P,Q). Докажите да је $(P,Q)=(Q,P)$.

7. Пред Аљошом се налази 100 затворених кутија, а у свакој од њих је или црвена или плава коцкица. Аљоша има рубље (руска новчана јединица, 1 рубља – 100 копејки). Он прилази ма којој затвореној кутији, објављује боју коцкице у њој (по његовом мишљењу) и ставља неку суму (то не мора бити цео број копејки, али не може бити више од суме коју он има у том тренутку). Кутија се отвара и Аљошина сума се увећава или смањује, зависно од тога да ли је он погодио или није боју коцкице у кутији. Игра се наставља све док се не отворе све кутије. Која је највећа сума коју Аљоша може себи да гарантује, ако је њему познато да:

а) (3 поена) плавих коцкица има тачно 1;

б) (5 поена) плавих коцкица има тачно n.

(Напомена: Аљоша може да стави и 0, тј. може бесплатно да отвори кутију и види боју коцкице.)

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 24. фебруар 2008. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) У конвексном шестоуглу ABCDEF наспрамне сатранице су међусобно паралелне (AB са DE, BC са EF и CD са FA), а такође је $AB=DE$. Докажите да је $BC=EF$ и $CD=FA$.

2. (5 поена) У равни је нацртано 10 једнаких дужи и означене су све њихове пресечне тачке. Показало се да свака пресечна тачка дели ма коју дуж која кроз њу пролази у размери 3:4. Колики је највећи могући број означених пресечних тачака?

3. (5 поена) Имамо 30 картица и на свакој је написан број: на дест картица – број a, на десет другхих – број b, а на десет преосталих – број c (бројеви a, b, c су сви различити). Познато је да за ма којих пет картица можемо изабрати још пет, тако да збир бројева на тих десет картица буде једнак нули. Докажите да је један од бројева a, b, c једнак нули.

4. (6 поена) Нађите све природне бројеве n за које је $(n+1)!$ дељиво са $1!+2!+...+n!$ ($k!$ је производ свих природних бројева од 1 до закључно са k).

5. (6 поена) Поља табле 10×10 обојена су црвеном, плавом и белом бојом. Ма која два поља са заједничком страницом обојена су разним бојама. Познато је да црвених поља има 30.

а) (2 поена) Докажите да је могуће увек изрезати 30 правоугаоника, од којих се сваки састоји од два поља – белог и плавог.

б) (2 поена) Наведите пример бојења те табле, када је могуће изрезати 40 таквих правоугаоника (и објасните зашто је он одговарајући).

в) (2 поена) Наведите пример бојења табле, када није могуће изрезати више од 30 таквих правоугаоника (и објасните зашто је он одговарајући).

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 24. фебруар 2008. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) Имамо 30 картица и на свакој је написан број: на десет картица – број *a*, на десет другхих – број b, а на десет преосталих – број c (бројеви a*, b, c* су сви различити). Познато је да за ма којих пет картица можемо изабрати још пет, тако да збир бројева на тих десет картица буде једнак нули. Докажите да је један од бројева a*, b, c* једнак нули.

2. (5 поена) Може ли најмањи заједнички садржалац целих бројева 1, 2, 3, ..., n бити 2008 пута већи од најмањег заједничког садржаоца целих бројева 1, 2, 3, ..., m ?

3. (5 поена) У троуглу *ABC* угао *A* је прав, *M* је средиште дужи *BC, H* – подножје висине из темена *A*. Права која пролази кроз тачку *M* и нормална је на *AC*, по други пут сече описану кружницу око троугла *AMC* у тачки *P*. Докажите да дуж *BP* полови дуж *AH*.

4. (5 поена) Дати су конвексан многоугао и квадрат. Познато је да, ма како поставили две копије многоугла унутар квадрата, постојаће тачка која припада и једном и другом од тих многоуглова. Докажите да, ма како поставили три копије многоугла унутар квадрата, постаојаће тачка која им припада.

5. (6 поена) Дата је таблица (на слици десно) у којој можемо замењивати места врстама, а тако|е и колонама (у било ком поретку). Колико различитих таблица можемо добити из дате таблице на такав начин?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Сложенија варијанта, 9. март 2008. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. Број N представља производ два суседна природна броја. Докажите да:

а) (2 поена) том броју можемо дописати са десне стране две цифре тако да се добије тачан квадрат;

б) (2 поена) ако је $N>12$, то се може учинити на јединствен начин.

2. (5 поена) На страницама AB и BC троугла ABC изабране су редом тачке K и M тако да је $KM \| AC$. Дужи AM и KC секу се у тачки O. Зна се да је $AK=AO$ и $KM=MC$. Докажите да је $AM=KB$.

3. (6 поена) Дата је карирана трака, издељена на квадратиће, ширине 1 квадратић и бесконачна на обе стране. Два поља те траке су клопке (замке), а између њих је N поља и на једном од њих налази се скакавац. При сваком потезу ми изговарамо природан број, после чега скакавац скаче за толики број поља лево или десно (по свом избору). За које N можемо изговорати бројеве тако да сигурно утерамо скакавца у једну од клопки, ма где он на почетку био између њих и ма како бирао правце својих скокова? (Ми све време видимо где се налази скакавац.)

4. (6 поена) Неколико (коначан број) тачака у равни обојено је у четири боје, при чему има тачака од сваке боје. Никоје три од тих тачака не леже на истој правој Докажите да се могу наћи три различита троугла (који се могу и сећи), таква да су им темена различитих боја и да унутар њих нема обојених тачака.

5. (7 поена) У кружном распореду стоји 99 деце и свако од њих у почетку има лопту. Сваког минута свако дете (које има лопту) баца лопту једном од својих суседа. При томе, ако две лопте дођу до једног детета, онда се једна од тих лопти избацује из игре неповратно. Кроз које најмање време код деце може остати само једна лопта?

6. (7 поена) Постоје ли природни бројеви $a, b, c, d,$ такви да је

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1, \quad \frac{a}{d}+\frac{c}{d}=2008?$$

7. (8 поена) Конвексни четвороугао $ABCD$ нема паралелних страница. Углови које странице тог четвороугла образују са дијагоналом AC (у неком поретку) су једнаки $16^\circ, 19^\circ, 55^\circ$ и 55°. Колики може бити оштар угао између дијагонала AC и BD?

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Сложенија варијанта, 9. март 2008. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. Од папира је изрезан троугао чији је један угао α. Затим је тај троугао разрезан на неколико троуглова. Може ли се догодити да сви углови свих добијених троуглова буду мањи од

а) (3 поена) у случају када је $\alpha = 70^0$;

б) (3 поена) у случају када је $\alpha = 80^0$?

2. (6 поена) На бројевној правој у тачки Р налази се "тачкасти" скакавац. Тачке 0 и 1 су клопке (замке). При сваком свом "потезу" ми изговарамо неки позитиван број, после чега скакавац скаче лево или десно (по свом избору) на растојање које је једнако том броју. За која P можемо изговарати бројеве, тако да гарантовано можемо сатерати скакавца у једну од клопки? (Ми све време видимо где се налази скакавац.)

3. (6 поена) Полином степена $n > 1$ има n различитих корена (нула) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Његов први извод има корене y_1, y_2, $y_3, \dots, y_{n-1}$. Докажите неједнакост

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

4. (7 поена) Пеђа и Васа нацртали су по један конвексан четвороугао без паралелних страница. Сваки од њих је у свом четвороуглу повукао по једну дијагоналу и одредио углове које та дијагонала образује са страницама његовог четвороугла. Пеђа је добио бројеве α, α, β и γ. (у неком поретку), а Васа исте те вредности (могуће и у неком другом поретку). Докажите да се дијагонале Пеђиног четвороугла секу под истим углом као и дијагонале Васиног четвороугла.

5. (8 поена) Сви природни бројеви написани су у неком поретку (сваки број по једном). Може ли се обавезно наћи неколико бројева (више од једног), који су написани редом један за другим (почев од неког места), а чији је збир прост број?

6. (8 поена) Једанаесторици мудраца завезали су очи и свакоме су ставили на главу капу која је обојена једном од 1000 боја. После тога су им одвезали очи и сваки је видео све капе осим своје. Затим истовремено сваки показује осталима једну од две картице - белу или црну. А после тога, сви треба истовремено да кажу боју своје капе. Да ли је то могуће? Мудраци се могу унапред (пре него што су им завезали очи) договарати како да поступају. Мудрацима је познато у којих 1000 боја могу бити капе.

7. (8 поена) Дате су две кружнице и три праве. Свака права на кружницама исеца тетиве исте дужине. Пресечне тачке правих граде троугао. Докажите да кружница описана око тог троугла пролази кроз средиште дужи која спаја средишта датих кружница.

29-й Международный математический Турнир городов

2007/08 учебный год

Решения задач

Осенний тур

Тренировочный вариант, младшие классы

1.1. [3] Какое наибольшее число белых и черных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на любой горизонтали и на любой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем черных?

Ответ. 48 фишек.

Решение. Число фишек на каждой вертикали кратно 3, значит, их не больше 6, а на всей доске – не более 48. Пример расстановки 48 фишек: 32 белые фишки ставим на белые поля, а 16 черных – вдоль главной «черной» диагонали и вдоль двух параллельных диагоналей «длины» 4.

1.2. [4] На бумажке записаны 1 и некоторое нецелое число x. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке число x^2?

Решение. Можно. Например, так (числа записаны в порядке их появления):

$$\frac{1}{x},\ x+1,\ \frac{1}{x+1},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x},\ x^2+x,\ (x^2+x)-x=x^2.$$

1.3. [4] Середина одной из сторон треугольника и основания высот, опущенных на две другие стороны, образуют равносторонний треугольник. Верно ли, что исходный треугольник тоже равносторонний?

Ответ: неверно.

Первое решение. Рассмотрим произвольный остроугольный треугольник ABC, где $\angle B = 60°$. Пусть AH и CK – высоты, M – середина AC. В прямоугольных треугольниках AHC и AKC медианы HM и KM равны половине гипотенузы, поэтому треугольники CMH *и* AMK *равнобедренные*. Угол AMH – внешний угол треугольника CMH, и значит равен $2\angle C$, а угол CMK – внешний угол треугольника AMK, и значит равен $2\angle A$, откуда

$$\angle HMK = \angle AMH + \angle CMK - 180° = 2(\angle A + \angle C) - 180° = 2\cdot 120° - 180° = 60°.$$

Второе решение. На полуокружности с диаметром AC и центром M отметим точки K и H так, чтобы дуга KH составляла 60°и прямые AK и CH пересекались вне полукруга. Пусть B – точка пересечения этих прямых. Тогда K и H – основания высот треугольника ABC (лежащие на его сторонах), треугольник KMH равносторонний, а треугольник ABC – нет (если прямая KH не параллельна AC).

1.4. [5] В таблицу 29×29 вписали числа 1, 2, 3, ..., 29, каждое по 29 раз. Оказалось, что сумма чисел над главной диагональю в три раза больше суммы чисел под этой диагональю. Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы.

Ответ. 15.

Решение. Над (под) диагональю находится 29·14=406 чисел. Но сумма 406 наибольших чисел таблицы (16, …, 29, взятые по 29 раз) равна 29·(16+29)·14/2=29·45·14/2 ровно в три раза больше суммы 406 наименьших чисел (1, 2, …, 14, взятые по 29 раз), которая равна 29·(1+14)·14/2=29·15·14/2. Поэтому все числа на диагонали равны 15.

1.5. [5] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 5 карточек с номерами от 1 до 5. Зритель прячет две карточки, а три отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

Решение. Занумеруем вершины правильного пятиугольника числами от 1 до 5. *Отрезками* назовем его стороны и диагонали. Пара карточек, спрятанных зрителем, соответствует одному из отрезков. Среди трех карточек у ассистента есть пара, соответствующая параллельному отрезку. Ее он и называет фокуснику.

Тренировочный вариант, старшие классы

2.1.[1] [3] На экране компьютера стоят в ряд 200 человек. На самом деле эта картинка составлена из 100 фрагментов, на каждом – пара: взрослый и ребенок пониже ростом. Разрешается в каждом из фрагментов изменить масштаб, уменьшив при этом одновременно рост взрослого и ребенка в одинаковое целое число раз (масштабы разных фрагментов можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на общей картинке все взрослые были выше всех детей. [3 балла]

Решение. Для каждого фрагмента зафиксируем рациональное число, большее роста ребенка, но меньшее роста взрослого. Представим эти числа в виде обыкновенных дробей и приведем их все к общему знаменателю. Теперь уменьшим размеры каждого фрагмента в число раз, равное числителю соответствующей ей дроби.

2.2. На бумажке записаны три положительных числа x, y и 1. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке

а) [2] число x^2? **б**) [2] число xy?

Решение. **а**) См. 1.2.

б) Разделим одно из чисел на 2: $\frac{1}{y}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{y}{2}$. Далее, умея возводить в квадрат, за несколько шагов получим число $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = xy$.

Или так: получаем число $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$, а затем два раза делим его пополам.

2.3. [4] Дана прямая и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой на равном расстоянии от нее. Как с помощью циркуля и линейки найти на прямой такую точку C, что произведение $AC \cdot BC$ будет наименьшим?

Решение. Площадь треугольника ACB не зависит от C: основание AB и опущенная на него высота постоянны. С другой стороны, эта площадь равна $^1/_2\ AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB$. Поэтому наименьшему произведению $AC \cdot BC$ соответствует наибольший синус угла ACB.

---

[1] Участникам задача давалась в такой формулировке:

Есть сто картинок, на каждой изображены взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. Разрешается перед этим изменить масштаб каждой картинки, уменьшив ее размеры в целое число раз (масштабы разных картинок можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине все взрослые были выше всех детей.

Построим окружность с диаметром AB. Если она пересекает нашу прямую l в двух точках P и Q, то эти точки – искомые ($\sin\angle APB = \sin\angle AQB = 1$). В противном случае искомая точка C – пересечение l с серединным перпендикуляром к отрезку AB (из этой точки отрезок AB виден под наибольшим нетупым углом, поскольку остальные точки прямой лежат вне проходящей через точки A, B и C окружности).

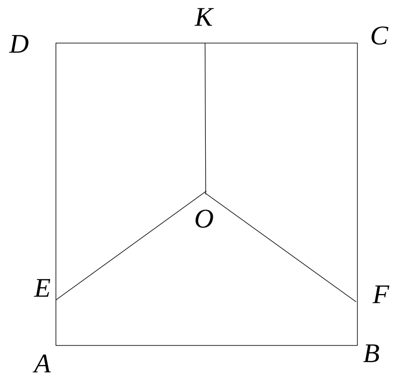
2.4. [4] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 29 карточек с номерами от 1 до 29. Зритель прячет две карточки, а остальные отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

Решение. Расположим мысленно карточки по кругу. Тогда если зритель загадал две не соседние карточки A и B, ассистент указывает на карточку, идущую следом за A и на карточку, идущую следом за B (по часовой стрелке). Если же зритель загадал две соседние карточки, ассистент указывает на следующие две соседние карточки (по часовой стрелке).

2.5. Квадрат со стороной 1 см разрезан на три выпуклых многоугольника. Может ли случиться, что диаметр каждого из них не превосходит

а) [1] 1 см; **б**) [2] 1,01 см; **в**) [2] 1,001 см?

а) Нет. В один многоугольник попадут две вершины квадрата, скажем A и B. Остальные точки отрезка AD удалены от B на расстояние больше 1, поэтому они находятся вне этого многоугольника, следовательно, A лежит на границе двух многоугольников (первого и второго). Аналогично B лежит на границе первого и третьего многоугольников (B не может принадлежать второму). Но тогда середина K стороны CD не может принадлежать ни одному из многоугольников. Противоречие.



б) Да. См. рис.: O – центр квадрата $ABCD$, K – середина стороны CD, $AE = BF = 0{,}14$.

$AF = \sqrt{1+0{,}14^2} < 1{,}01$, $EK = \sqrt{0{,}5^2+0{,}86^2} < 1$.

в) Нет. Предположим нам удалось разрезать квадрат на три многоугольника M_1, M_2, M_3 нужных диаметров. Пусть вершины A и B принадлежат M_1. Отложим на стороне AD отрезок $AG = 0{,}05$, а на стороне BC – отрезок $BH = 0{,}1$. Точки G и H не могут принадлежать M_1, поскольку $AH > BG = \sqrt{1+0{,}05^2} > 1{,}001$. Пусть G принадлежит многоугольнику M_2. Тогда H принадлежит M_3 ($HG = BG > 1{,}001$). Тогда середина K стороны CD не может принадлежать ни одному из многоугольников: $AK > GK > HK = \sqrt{0{,}9^2+0{,}5^2} = \sqrt{1{,}06} > 1{,}001$. Противоречие.

Авторское решение задачи:

Ответ: а, в – невозможно, б – возможно.

Для начала заметим, что если бы частей было не 3, а 4, то не представляло бы труда разрезать квадрат на части диаметром $d < 0{,}75$. Поскольку частей только 3, какие-то две вершины лежат в одном многоугольнике, и его диаметр не меньше 1.

Улучшаема ли эта оценка? Если даже «совсем грубо» разрезать квадрат на три равных прямоугольника размеров 1x(1/3), то диаметр d каждой части будет меньше 1,1 ($d = (1+1/9)^{1/2} < 1+1/18) < 1{,}1$). Здесь и далее мы пользуемся неравенством $(1+x)^{1/2} < 1 + x/2$.

Разбивать на прямоугольники диаметром меньше 1,01 надо немного аккуратнее. Разрежем квадрат, как оконную раму: сверху отрежем «форточку» ширины a, а оставшуюся часть разрежем пополам. Получены три прямоугольника: один размером 1xa, и два размером ½x(1-a). Предположим, что их диаметры равны (интуитивно понятно, что этот вариант

наилучший; доказать это нетрудно, но нам в этом нет нужды). Тогда $1+a^2 = (½)^2+(1-a)^2$, откуда a=1/8, и $d^2 = [1+(1/8)^2] = [(½)^2+(7/8)^2] = 65/64$, $d = (1+1/64)^2 < 1+1/128 < 1{,}01$.
Остается доказать, что диаметр одного из многоугольников больше 1,001 (п. в, из которого, конечно, следует п. а). Пусть A(0,0), B(0,1), C(1,1), D (1,0) – вершины квадрата, и пусть вершины A, B лежат в первой части разбиения. Рассмотрим точки E (0, 1/20), F(1/10, 0) и G (1, ½). Легко видеть, что расстояние между любыми из этих точек больше 1,001. Если диаметр каждой части не больше 1,001, то они лежат в разных частях, т.е. одна из них также лежит в первой части. Но расстояние от этой точки либо до A, либо до B опять-таки больше 1,001.

Основной вариант, младшие классы

3.1. [5] На стороне *CD* ромба *ABCD* нашлась такая точка *K*, что *AD* = *BK*. Пусть *F* – точка пересечения диагонали *BD* и серединного перпендикуляра к стороне *BC*. Докажите, что точки *A, F* и *K* лежат на одной прямой.

ABKD – равнобедренная трапеция. Точка *G* пересечения ее диагоналей лежит на серединном перпендикуляре к основанию *AB*. В силу симметрии ромба *ABCD* относительно диагонали *BD*, *G* лежит также на серединном перпендикуляре к *BC*, то есть совпадает с точкой *F*.

3.2. **а**) [3] Петя и Вася задумали по три натуральных числа. Петя для каждых двух своих чисел написал на доске их наибольший общий делитель. Вася для каждых двух из своих чисел написал на доске их наименьшее общее кратное. Оказалось, что Петя написал на доске те же числа, что и Вася (возможно в другом порядке). Докажите, что все написанные на доске числа равны.

б) [3] Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если Петя и Вася изначально задумали по четыре натуральных числа?

а) **Первое решение**. Выберем какой-нибудь простой делитель p задуманных Васей чисел. Пусть он входит в разложение этих чисел на простые множители в степенях a, b и c, где $a \le b \le c$. Тогда в разложение выписанных Васей наименьших общих кратных p будет входить в степенях b, c и c, то есть две *наибольшие* степени совпадают. Аналогично можно проверить, что среди выписанных Петей наибольших общих делителей совпадают две *наименьшие* степени p. Значит, совпадают *все* степени p в выписанных числах. Поскольку это верно для любого простого делителя, то сопадают все разложения на простые множители, а, значит, и все выписанные числа.

Второе решение. Пусть Петя и Вася *написали* числа a, b и c. *Попарные* наибольшие общие делители этих чисел равны: это наибольший общий делитель d трех чисел, задуманных Петей. С другой стороны, каждый такой попарный делитель делится на одно из чисел, задуманных Васей. Значит, d делится и на наименьшее общее кратное задуманных Васей чисел, которое равно НОК(a, b, c). Следовательно,
НОК(a, b, c) = НОД(a, b, c), то есть $a = b = c$.

Замечание. Задуманные числа совпадать не обязаны, например у Васи задуманы 2, 3 и 6, а у Пети – 6, 12 и 18.

б) Нет, не останется. Например, если Петя задумал числа 6, 10, 15, 30, а Вася – числа 1, 2, 3, 5, то оба выпишут наборы 2, 3, 5, 6, 10, 15. (Таких примеров сколько угодно: если Вася задумает четыре взаимно простых числа a,b,c,d, а Петя – их произведения по три штуки, то есть числа abc, abd, acd, bcd, то в итоге оба напишут наборы ab,ac,ad,bc,bd.)

3.3. [6] Миша стоит в центре круглой лужайке радиуса 100 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед каждым шагом он объявляет направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент обязательно выйти с лужайки, или Катя всегда сможет ему помешать?

Ответ. Может.

Решение. Начиная со второго шага Миша каждый раз может выбирать направление, перпендикулярное отрезку, соединяющее точку, где он находится, с центром O лужайки. Пусть Миша шагнул из точки A, где $OA = \sqrt{a}$, в точку B. По теореме Пифагора $OB = \sqrt{a+1}$. Действуя так, после n-го шага Миша будет находиться на расстоянии ровно $\sqrt{n}$ м от центра. Сделав 10001 шаг, Миша выйдет за пределы лужайки.

3.4. [7] Дана клетчатая полоса $1\times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?

Решение. При $N = 1$ выигрывает первый, в остальных случаях – второй. Его стратегия: первый ход сделать в крайнюю клетку, а дальше ходить как угодно. После k-го хода первого крестики делят полоску не менее чем на k частей, состоящих из пустых клеток и ноликов. Но к этому моменту выставлено лишь k–1 ноликов, значит, в одной из частей нолика нет, и туда можно сходить.

3.5. [8] Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет? (Весы будут в равновесии, если сумма моментов гирь справа от середины равна сумме моментов гирь слева; иначе отклонятся в сторону, где сумма больше. Моментом гири называется произведение ms массы гири m на расстояние s он нее до середины).

Ответ. Всегда.

Решение. Мы будем использовать *транснеравенство*: если $A_1<\ldots<A_n$ и $B_1\le\ldots\le B_n$, и $C_1,\ldots,C_n$. – любая перестановка чисел $B_1, \ldots,B_n$, то $A_1 C_1+\ldots+A_n C_n\le A_1 B_1+\ldots+A_n B_n$, причем равенство достигается только в случае $C_1=B_1,\ldots,C_n=B_n$.

Отложим самую легкую гирю m. Остальные гири прикрепим слева от середины в разных точках, но чем больше масса, тем дальше от центра. Подсчитаем, в какую точку справа надо повесить гирю m, чтобы было равновесие (эта точка не выйдет за пределы отрезка, если гири слева прикреплять достаточно близко к его середине). Покажем, что если надписи перепутаны, то равновесия нет. Действительно, если перепутаны только массы слева, то суммарный момент слева стал меньше по *транснеравенству*. Если дополнительно поменять местами массу m с другой массой слева, то момент справа станет больше, а слева еще меньше.

Замечание. Можно обойтись и без транснеравенства. Подвесим гири $m_2, \ldots, m_n$ слева на расстояниях $am_2, \ldots, am_n$ от центра (константа a выбирается так, чтобы точка $a\dfrac{m_2^2+\ldots+m_n^2}{m}$ подвеса гири m не вышла за пределы отрезка). Пусть $M_2, \ldots, M_n$ – перестановка гирь $m_2, \ldots, m_n$. В силу неравенств $2m_iM_i \le m_i^2 + M_i^2$ новый момент

$a(m_2M_2 + \ldots + m_nM_n)$ не превосходит старый $a(m_1^2 + \ldots + m_n^2)$, причем равенство будет только, когда $m_i = M_i$ при всех i.

Замечания для знатоков. **1**. Фактически в предыдущем замечании доказан частный случай неравенства Коши-Буняковского.

2. Вместо транснеравенства или неравенства Коши-Буняковского можно использовать неравенство Чебышева.

3. Можно обойтись вообще без неравенств. Нам надо показать, что существует решение уравнения $m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = 0$ (*), не являющееся решением ни одного из уравнений вида $M_1x_1 + \ldots + M_nx_n = 0$ (*), полученных нетривиальными перестановками коэффициентов. Но пространство решений уравнения (*) (n–1)-мерно, а пространство решений системы (*), (**) (n–2)-мерно. Поскольку (n–1)-мерное пространство нельзя покрыть конечным числом (n–2)-мерных подпространств, искомое решение существует.

3.6. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие – орлом вверх, а какие – решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) [4] Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = k$, то есть способ и для $N = 2k$.

б) [5] Найдите все значения N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

Ответ. б) $N = 2^m$.

Решение. а) Мысленно расположив монеты в клетках доски $2\times k$, фокусник пишет под каждым столбцом из двух клеток О, если монеты там лежат одной стороной вверх, и Р – если разными сторонами. Эта комбинация сообщает ему число n от 1 до k. Если в верхней строке четное число решек, он называет n, иначе $n + k$.

Пусть зритель назвал число m. Чтобы сообщить его, ассистент тоже мысленно пишет строку из *О* и *Р* по тому же правилу. Он может изменить одну из букв, чтобы получить код, соответствующий числу m (при $m \le k$) или $m - k$ (при $m > k$). Для этого ему достаточно перевернуть любую из монет в соответствующем столбце. Выбором верхней или нижней монеты он обеспечивает нужную четность числа решек в верхней строке.

б) Первое решение. При $N = 1$ «способ» очевиден. Из (а) следует, что последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m.

Пусть для какого-то N есть способ угадывания. Для угадывания те комбинации орлов и решек, которые ассистент в принципе может «выдать» фокуснику, должны быть разбиты на N групп: когда фокусник видит комбинацию из i-й группы, он называет число i.

Предположим, что 2^N не делится на N. Так как всего комбинаций 2^N, то в одной из групп (пусть j-й) находится $d < \frac{2^N}{N}$ комбинаций. Каждая комбинация j-й группы может быть получена изменением одного знака ровно из N других комбинаций. Но так как $dN < 2^N$, то найдется исходная комбинация, из которой ассистент не может получить ни одну из комбинаций j-й группы. Значит, если зритель построит эту комбинацию, ассистент не сможет сообщить фокуснику, что загадано число j. Противоречие.

Следовательно, 2^N кратно N, то есть N – степень двойки.

б) Второе решение. Комбинаций из N монет всего 2^N. Допустим, способ у ассистента и фокусника есть. Рассмотрим какую-нибудь одну комбинацию (она может попасться ассистенту). Изменяя в ней положение ровно одной монеты, можно получить ровно N других комбинаций. Каждая из N этих комбинаций должна обозначать для фокусника свое число от 1 до N (так как есть N вариантов для загаданного числа). Припишем этим комбинациям номера, которые они обозначают. Таким образом можно *каждой* из 2^N

комбинаций приписать число, которое она обозначает для фокусника (так как каждая комбинация может получить из некой другой описанным выше способом).

Посчитаем, скольким комбинациям приписано число 1. Всего комбинаций 2^N, из каждой можно получить ровно одну комбинацию, которой приписана 1. Всего получаем 2^N комбинаций, которым приписана 1, но при этом каждую такую комбинацию мы посчитали N раз (поскольку каждую комбинацию можно получить ровно из N других). Значит 1 приписана $2^N/N$ комбинациям. Это число должно быть целым, что возможно только если N является степенью двойки. Для степени двойки способ следует из пункта а) (так как для N=1 способ очевиден).

3.7. [9] Володя решил стать великим писателем. Для этого он каждой букве русского языка сопоставил слово, содержащее эту букву. Потом написал слово, сопоставленное букве "А". Дальше каждую букву в нем заменил на сопоставленное ей слово (разделяя слова пробелами), потом в получившемся тексте вновь заменил каждую букву на сопоставленное ей слово, и так всего 40 раз. Володин текст начинается так: "Ряд кораблей на дремлющих морях". Докажите, что этот оборот встречается в Володином тексте еще хотя бы раз.

Первое решение. Обозначим через T_k текст после k шагов. Заметим, что ни в одном тексте до T_{40} первая буква не могла на следующем шаге перейти в однобуквенное слово (иначе в дальнейшем первое слово всегда бы оставалось однобуквенным). Значит, каждый раз текст удлинялся хотя бы на одну букву.

Кроме того, в слове T_1 буква А стоит не на первом месте (иначе во всех текстах первое слово начиналось бы на А).

Поскольку в T_1 есть буква А, причем не в начале, то в T_2 входит (также не с начала) полученный из этой буквы А текст T_1. Аналогично, в T_3 входит T_2, полученный из входящего в T_2 текста T_1. Но тогда в T_3 входит и T_1. Продолжая, видим, что в каждом тексте содержатся (не с начала) все предыдущие тексты.

Выпишем первые буквы всех текстов (напомним, что исходная буква А – еще не текст). В русском алфавите 33 буквы, поэтому уже среди первых 34 букв будет повторение. Пусть первое повторение – буква L на k-м месте, где $k \leq 34$. Тогда в T_k буква L стоит на первом месте и еще раз в том входящем в T_k тексте, где L впервые встретилась. От T_k до T_{39} не менее 5 замен, и из первой L в T_{39} получатся минимум 6 первых букв, а в T_{40} – не менее чем 6 первых слов. Значит, в T_{40} из первой L получится текст, начинающийся словами "Ряд кораблей на дремлющих морях". Но такой же текст получится из второго вхождения L в T_k.

Второе решение. Как показано выше, первая буква любого текста «порождает», как минимум двухбуквенное слово. Поэтому первая буква L текста T_{35} «порождает» минимум 5 первых букв в тексте T_{39}, а в тексте T_{40} – первые 5 слов, то есть весь данный в условии фрагмент. Поскольку буква L на первом месте встречалась и раньше, то некоторый текст T_k (k < 40) также начинался со слов РЯД КОРАБЛЕЙ НА ДРЕМЛЮЩИХ МОРЯХ. Первые две буквы РЯ этого текста порождают в тексте T_{40} весь указанный фрагмент (поскольку буква Я содержится только в последнем его слове). Но T_k содержит и еще один фрагмент РЯ (в слове МОРЯХ), который и порождает в T_{40} второе вхождение нашего фрагмента.

Основной вариант, старшие классы

4.1. [2+2] См. **3.2**.

4.2. [6] Диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N – середины (по порядку) сторон четырехугольника. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN и PNK равны.

Решение. Пусть K, L, M, N – середины соответственно сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника $ABCD$. Треугольники BAP и CDP подобны по двум углам, поэтому подобны и их "половинки" KAP и MDP. Следовательно, $\angle APK = \angle DPM$.

$KL \parallel AC$, $ML \parallel BD$ (как средние линии треугольников ABC и BCD), значит,
$\angle LKP = \angle APK = \angle DPM = \angle LMP$.

Итак, углы LKP и LMP, опирающиеся на отрезок LP, равны. Значит, равны и радиусы описанных окружностей треугольников PKL и PLM. Остальные равенства доказываются аналогично.

4.3. [6] Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, и каждый член имеет вид $\frac{1}{k}$, где k – натуральное.

Решение. Домножив на НОК знаменателей, получим возрастающую арифметическую прогрессию $\{a_i\}$ из n натуральных чисел, сумма S которой делится на каждый член. Члены этой прогрессии, очевидно, не имеют общего делителя, значит, ее разность d взаимно проста с каждым членом. Разберем два случая.

1) $n = 2m$. Тогда $S = \dfrac{n(a_m + a_{m+1})}{2} = na_{m+1} - md$, откуда md, а поэтому и m кратно a_{m+1}. Но это невозможно, так как $a_{m+1} > m$.

2) $n = 2m+1$. Тогда $S = n\,a_{m+1} = na_m + nd$, откуда $n = 2m+1$ кратно a_m Но поскольку $a_m \geq m$ это возможно только при $a_m = m$ и $m = 1$. Отсюда единственный ответ: $^1/_6$, $^1/_3$, $^1/_2$.

4.4. [6] См. 3.5.

4.5. [4+4] Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие – орлом вверх, а какие – решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) [4] Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способы, позволяющие фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = a$ и для $N = b$, то есть способ и для $N = ab$.

б) [4] Найдите все значения N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

Решение. а) Фокусник и ассистент заранее каждому целому числу от 1 до ab сопоставляют пару целых чисел (i,j), где $1 \leq i \leq a$ и $1 \leq j \leq b$, таким образом: записывают целые числа от 1 до ab в табличку $a \times b$ и числу, стоящему на пересечении i-й строки и j-го столбца, сопоставляют пару (i,j). Теперь, чтобы восстановить число, фокуснику достаточно угадать пару чисел (i,j), которая сопоставлена этому числу.

Действия фокусника: мысленно расположив монеты в виде прямоугольника $a \times b$, фокусник пишет справа от горизонтального ряда монет О, если в нём четное число орлов, и Р – в противном случае. Так он получает комбинацию из a орлов и решек. По тому же правилу он пишет О или Р под каждым вертикальным рядом монет, получая комбинацию из b орлов и решек. Эта пара комбинаций и сообщает ему пару чисел: i от 1 до a, и j от 1 до b. Заглянув в таблицу $a \times b$, заполненную числами от 1 до ab, фокусник называет число на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Действия ассистента: он тоже мысленно выписывает две комбинации орлов и решек по тем же правилам. Пусть названное зрителем число находится в табличке с числами на пересечении i-й строки и j-го столбца. Чтобы сообщить i по способу для a монет, ассистенту надо изменить k-ю позицию в комбинации справа от прямоугольника. Аналогично, для сообщения j ему надо изменить l-ю позицию в комбинации под прямоугольником. Тогда он просто переворачивает монету на пересечении k-го горизонтального ряда и l-го вертикального ряда в прямоугольнике.

б) При N =1 все ясно, при N=2 способ такой: числу 1 соответствует орел, а числу 2 – решка на левой монете. По пункту (а), взяв a=b=2, получим способ для N=4. Последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m. Доказательство того, что при других значениях N способов нет, смотрите в решении задачи **3.6 б)**.

4.6. [8] На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника P и Q. Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l – длину стороны, и вычислим произведение lh. Просуммировав такие произведения по всем сторонам P, получим некоторую величину (P, Q). Докажите, что (P, Q) = (Q, P).

Решение. Докажем, что $(P, Q) = {}^1/_2 \sum a_i b_j \sin \varphi_{ij} = (Q, P)$, где a_i – стороны P, b_j – стороны Q, φ_{ij} – угол между a_i и b_j.

Зафиксируем некоторую сторону a_i, зажмем многоугольник Q между прямыми, параллельными a_i, и выберем две вершины C и D, *лежащие на этих двух прямых. Контур Q разбивается на две ломаных с концами* C и D. Ввиду выпуклости проекция такой ломаной на перпендикулярную a_i прямую m складывается из проекций звеньев ломаной. Значит, проекция многоугольника Q на m покрывается проекциями его сторон ровно два раза, то есть сумма длин проекций сторон равна удвоенному расстоянию h_i между зажимающими Q прямыми. Длина проекции b_i на m равна $b_i\cos(90^\circ – \varphi_{ij}) = b_i \sin\varphi_{ij}$, значит, $2h_i = \sum_j b_j \sin \varphi_{ij}$, а $a_i h_i = \frac{1}{2}\sum_j a_i b_j \sin \varphi_{ij}$. Складывая такие суммы по всем i, получим нужную формулу.

4.7. Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой – либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету в данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все все коробочки. Какую наибольшую сумму на счете может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что

а) [3] синий кубик только один;

б) [5] синих кубиков ровно n.

(Алеша может поставить и 0, то есть просто бесплатно открыть коробочку и увидеть цвет кубика.)

Ответ. **а)** $\frac{2^{100}}{100}$. **б)** $\frac{2^{100}}{C_{100}^n}$

Первое решение. б) Рассмотрим общую ситуацию: Алеша знает, что есть m красных и n синих кубиков в $m + n = K$ коробочках. Попросим его в таком случае поставить $\frac{|n-m|}{K}$-ю часть своего капитала на тот цвет, которого больше (в частности, при $m = n$ Алеша ничего не ставит). Докажем индукцией по K, что действуя так, Алеша увеличит свой капитал в $\frac{2^K}{C_K^n}$ раз.

Когда коробочка всего одна, утверждение очевидно: мы увеличиваем капитал в два раза. Пусть теперь утверждение верно для K-1 коробочек, докажем его для K коробочек.

Пусть для определенности $m \le n$. Если открыт синий кубик, то на этом шаге Алеша увеличил капитал в $1+\frac{n-m}{K}=\frac{2n}{K}$ раз, остались n–1 синий кубик и K – 1 коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\frac{2^{K-1}}{C_{K-1}^{n-1}}$ раз. Перемножая эти числа и учитывая, что $C_{K-1}^{n-1}\cdot\frac{K}{n}=C_K^n$, получим требуемое $\frac{2^K}{C_K^n}$. Если открыт красный кубик, капитал уменьшился, умножившись на $1-\frac{n-m}{K}=\frac{2m}{K}$, и остались n синих кубиков и K – 1 коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\frac{2^{K-1}}{C_{K-1}^n}$ раз. Перемножая, учтем, что $C_{K-1}^n\cdot\frac{K}{m}=C_{K-1}^{m-1}\frac{K}{m}=C_K^m=C_K^n$, и снова получим требуемое.

Покажем теперь индукцией по K, что в большее число раз Алеша капитал увеличить не может. Для случая одной коробочки это очевидно. Если коробочек несколько, и Алеша поставит на синий цвет долю, большую указанной в алгоритме, то, при выпадении красного, он получит меньше, чем по алгоритму. А если он поставит долю меньше, чем по алгоритму (в том числе отрицательную, если ставит на красный), он получит меньше, чем по алгоритму при выпадении синего.

Второе решение. **а**) Обозначим через B_m наибольший «выигрыш» Алеши для случая m коробочек. Очевидно, $B_1 = 2$.

Если $m > 1$, Алеша делает ставку на цвет первой коробочки. Заметим, что поставить x на красный цвет, это то же самое, что поставить $-x$ на синий. Поэтому можно считать, что Алеша всегда ставит на синий цвет, а $x \in [-1, 1]$.

Если в первой коробочке окажется синий шарик, капитал Алеши станет равным $1 + x$, а в конце игры он (ставя все свои деньги на заведомо известный цвет) может его довести до $(1 + x)2^{m-1}$. Если же в первой коробочке красный шарик, то выигрыш Алеши равен $(1 - x)B_{m-1}$. Итак, $B_m = \max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$, где $f(x) = \min\{(1 + x)2^{m-1}, (1 - x)B_{m-1}\}$. Нарисовав график, видим, что f достигает максимума в той точке x_0, где $(1 + x_0)2^{m-1} = (1 - x_0)B_{m-1}$. Таким образом, $B_m = (1 + x_0)2^{m-1} = (1 - x_0)B_{m-1}$.

Положив $B_m = \frac{2^m}{P_m}$, получим $(1 + x_0)P_m = 2$, $(1 - x_0)P_m = 2P_{m-1}$. Сложив последние равенства, имеем $P_m = 1 + P_{m-1}$. Отсюда (поскольку $P_1 = 1$) $P_m = m$.

б) Обозначим через $B_{m,n} = \frac{2^m}{P_{m,n}}$ наибольший «выигрыш» Алеши для случая m коробочек и n синих шариков. Очевидно, $B_{1,0} = B_{1,1} = 2$, $B_{m,0} = 2^m$, т.е. $P_{1,0} = P_{1,1} = P_{m,0} = 1$.

Рассуждая аналогично **а**), приходим сначала к системе

$$B_{m,n} = (1 + x_0)B_{m-1,n-1} = (1 - x_0)B_{m-1,n},$$

а потом – к соотношению $P_{m,n} = P_{m-1,n-1} + P_{m-1,n}$.

Это соотношение, очевидно, позволяет однозначно восстановить по указанным выше начальным условиям. Но и им и соотношению, как известно, удовлетворяют биномиальные коэффициенты C_m^n. Следовательно, $P_{m,n} = C_m^n$.

29-й Международный математический Турнир городов

2007-08 учебный год, Весенний тур

Решения задач

Леонид Медников, Александр Шаповалов

Базовый вариант, 8-9 классы.

5.1. [3] В выпуклом шестиугольнике ABCDEF противоположные стороны попарно параллельны (AB || DE, BC || EF и CD || FA), а также AB = DE. Докажите, что BC = EF и CD = FA.

Решение. Ясно, что ABDE - параллелограмм. угол CBD = углу FEA, а угол BDC = углу EAF как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, треугольники BCD и EFA равны по стороне и двум углам.

5.2. [5] На плоскости нарисовали 10 равных отрезков и отметили все их точки пересечения. Оказалось, что каждая точка пересечения делит любой проходящий через нее отрезок в отношении 3:4. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

Решение. 10. На каждом отрезке расположено не более двух отмеченных точек. С другой стороны, каждая отмеченная точка принадлежит двум отрезкам. Поэтому точек не больше 10. Пример с 10 точками дается следующей картинкой:

Пара параллельных отрезков пересекается с парой параллельных отрезков. Это дает 4 отмеченных точки. Еще тройка отрезков пересекается по трем точкам и еще одна тройка пересекается по трем точкам. Это дает еще 6 отмеченных точек.

5.3. [5] Есть тридцать карточек, на каждой написано по числу: на десяти карточках - a, на десяти других - b, и на десяти оставшихся - c (числа a, b, c все разные). Известно, что к любым пяти карточкам можно подобрать еще пять так, что сумма чисел на этих десяти карточках будет равна нулю. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно нулю.

Решение. Пусть $a < b < c$. Отметим на числовой оси всевозможные суммы чисел на пяти карточках. Для каждой из них отмечена и противоположная, поэтому отмеченные точки расположены симметрично относительно 0. В частности, противоположны наибольшая (5c) и наименьшая (5a) суммы, значит, $5a + 5c = 0$, то есть $c = -a$. Противоположны и суммы, ближайшие к "крайним", то есть $(4a + b) + (4c + b) = 0$. Отсюда сразу следует, что $b = 0$.

5.4. [6] Найдите все натуральные n, при которых $(n + 1)!$ делится на сумму $1! + ... + n!$.

Ответ. n = 1, 2.

Решение. Пусть $n > 2$ и $(n + 1)! = k(1! + ... + n!)$. Заметим, что $k < n$ (так как $n(1! + ... + n!) > n((n - 1)! + n!) = n(n - 1)! + n*n! = n! + n*n! = (n + 1)!$).

Разделив равенство на k, получим
(k - 1)!(k + 1)(k + 2)* ... *n = 1! + ... + n!.
Однако левая честь в этом равенстве четна (в произведении (n + 1)! было минимум два четных сомножителя, а мы сократили лишь один), а правая нечетна. Противоречие.

5.5. Клетки доски 10*10 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Любые две клетки с общей стороной раскрашены в разные цвета. Известно, что красных клеток 20.

а) [2] Докажите, что всегда можно вырезать 30 прямоугольников, каждый из которых состоит из двух клеток - белой и синей.

б) [2] Приведите пример раскраски, когда можно вырезать 40 таких прямоугольников.

в) [2] Приведите пример раскраски, когда нельзя вырезать больше 30 таких прямоугольников.

Решение.

а) Разрежем доску на 50 прямоугольников 1*2. Ровно 20 из них содержат красные клетки, а остальные 30 - бело-синие.

б) Расположим 40 сине-белых прямоугольников вертикально, как показано на схеме 1 (с - синий, б - белый), оставшиеся 20 клеток сделаем красными (к - красный):

```
| б | к | б | к | б | к | б | к | б | к |
|   |---|   |---|   |---|   |---|   |---|
| с | б | с | б | с | б | с | б | с | б |
|---|   |---|   |---|   |---|   |---|   |
| к | с | к | с | к | с | к | с | к | с |
-----------------------------------------
| с | б | с | б | с | б | с | б | с | б |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| б | с | б | с | б | с | б | с | б | с |
-----------------------------------------
| с | б | с | б | с | б | с | б | с | б |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| б | с | б | с | б | с | б | с | б | с |
-----------------------------------------
| к | б | к | б | к | б | к | б | к | б |
|---|   |---|   |---|   |---|   |---|   |
| б | с | б | с | б | с | б | с | б | с |
|   |---|   |---|   |---|   |---|   |---|
| с | к | с | к | с | к | с | к | с | к |
```

в) Окрасим 20 клеток в красный цвет, а также отметим 30 клеток, как на схеме 2. Каждый сине-белый прямоугольник должен содержать отмеченную клетку, следовательно их не больше 30.

```
| * |   | * |   | * |   | * |   | * |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | * |   | * |   | * |   | * |   | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * |   | * |   | * |   | * |   | * |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | * |   | * |   | * |   | * |   | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * |   | * |   | * |   | * |   | * |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | * |   | * |   | * |   | * |   | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| к |   | к |   | к |   | к |   | к |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | к |   | к |   | к |   | к |   | к |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| к |   | к |   | к |   | к |   | к |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | к |   | к |   | к |   | к |   | к |
```

Базовый вариант, 10-11 классы

6.1. [4] См. 5.3.

6.2. [5] Может ли наименьшее общее кратное целых чисел 1, 2, ... , n быть в 2008 раз больше, чем наименьшее общее кратное целых чисел 1, 2, ... , m?

Решение. Нет. Пусть $2^k \le m < 2^{k+1}$, $3^l \le m < 3^{l+1}$. Допустим, что $2008 = НОК(1,2,...,n)/НОК(1,2,...,m)$. 2008 делится на 8, поэтому $n \ge 2^{k+3}$. $2^{k+3} > 4m > 3m \ge 3^{l+1}$. Получается, что 2008 делится на 3, что неверно.

6.3. [5] В треугольнике ABC угол A прямой, M - середина BC, H - основание высоты, проведенной из вершины A. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно AC, вторично пересекает описанную окружность треугольника AMC в точке P. Докажите, что отрезок BP делит отрезок AH пополам.

Решение. MP - диаметр указанной окружности (он перпендикулярен хорде AC и делит ее пополам). Значит, угол BCP прямой, то есть PC || AH. Продолжим CP и BA до пересечения в точке N. MP - средняя линия треугольника BCN, то есть прямая BP делит сторону NC пополам. Следовательно, она делит пополам и сторону AH подобного треугольника BHA (гомотетичного треугольнику BCN с центром гомотетии B).

6.4. [5] Даны выпуклый многоугольник и квадрат. Известно, что как ни расположи две копии многоугольника внутри квадрата, найдется точка, принадлежащая обеим копиям. Докажите, что как ни расположи три копии многоугольника внутри квадрата, найдется точка, принадлежащая всем трем копиям.

Решение. Копия, расположенная внутри квадрата, содержит центр квадрата (иначе симметричная ей относительно этого центра копия также лежит внутри квадрата, а с этой копией не пересекается). Значит, каждая из трех копий, помещенных внутрь квадрата, содержит центр квадрата. Это и есть общая точка трех копий.

6.5. [6] Дана таблица (см. справа). Можно в ней переставлять строки, а также можно переставлять столбцы (в любом порядке). Сколько различных таблиц можно получить таким образом из данной таблицы?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Ответ: 7!*6!.

Решение. Заметим, что числа во всех строках и всех столбцах различны. Кроме того, для любого клетчатого прямоугольника сумма чисел, стоящих в его противоположных углах, равна по модулю 7 сумме чисел, стоящих в двух других противоположных углах. При разрешенных перестановках эти свойства, очевидно, сохраняются. Поэтому итоговая таблица полностью определяется своими верхней строкой и левым столбцом.

С другой стороны, перестановками столбцов мы можем получить в верхней строке любую из 7! перестановок чисел от 1 до 7, а перестановками строк со 2-й по 7-ю - любую из 6! перестановок чисел в 6 нижних клетках левого столбца.

Сложный вариант, 8-9 классы

7.1. Число N является произведением двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что

а) [2] можно приписать к этому числу справа две цифры так, чтобы получился точный квадрат;

б) [2] если N > 12, это можно сделать единственным способом.

Решение. а) Припишем 25 к числу $N = n(n + 1)$. Получится число $100n(n + 1) + 25 = (10n + 5)^2$.

б) Если $N > 12$, то $n >= 4$.

Число X, полученное приписыванием двух цифр, должно удовлетворять неравенствам $100n(n+1) <= X < 100n(n+1)+100$. Покажем, что в этом интервале нет квадратов, кроме $100N + 25 = (10n + 5)^2$, именно покажем, что квадраты соседний слева и соседний справа выходят пределы этого допустимого интервала.

$100n^2 + 80n + 16 = (10n+4)^2$ есть квадрат, соседний слева.
$n >=4$, $20n >= 80$, следовательно $16 < 20n$,
отсюда $100n^2 + 80n + 16 < 100n^2 + 100n$,
получаем $(10n+4)^2 < 100n(n+1)$, то есть квадрат, соседний слева, лежит левее левого конца допустимого интервала.

$(10n + 6)^2$ есть квадрат, соседний справа. Докажем, что он Больше правого конца допустимого интервала.

$$n > 3.2;$$
$$20n > 64;$$
$$100n^2 + 120n + 36 > 100n^2 + 100n + 100;$$
$$(10n + 6)^2 > 100n(n+1)+100.$$

7.2. [5] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что KM || AC. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что AK = AO и KM = MC. Докажите, что AM = KB.

Решение. угол COM = углу AOK = углу AKO, угол KCM = углу CKM = углу ACK, поэтому угол AMC = 180^o - угол COM - угол KCM = 180^o - угол AKC - угол ACK = угол KAC = угол BKM. угол BMK = глу BCA. Следовательно, треугольники AMC и BKM равны по стороне (MC = KM) и двум прилежащим углам, и AM = BK.

7.3. [6] Дана клетчатая полоска (шириной в одну клетку), бесконечная в обе стороны. Две клетки полоски являются ловушками, между ними - N клеток, на одной из которых сидит кузнечик. На каждом ходу мы называем натуральное число, после чего кузнечик прыгает на это число клеток влево или вправо (по своему выбору). При каких N можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек, где бы он ни был изначально между ловушками и как бы ни выбирал направления прыжков? (Мы все время видим, где сидит кузнечик.)

Ответ. При N = 2k - 1, где k - натуральное число.

Решение. Занумеруем клетки целыми числами по порядку так, чтобы ловушки получили номера 0 и N + 1.

Пусть N + 1= 2k. Будем каждый раз называть расстояние d до ближайшей ловушки. Ясно, что наибольшая степень двойки, на которую делится d, меньше k. Если кузнечик прыгнет в противоположную сторону и не попадет в ловушку, то он останется между ловушками, и расстояние до одной из ловушек станет 2d, а до другой 2k - 2d. Оба этих расстояния делятся на вдвое большую степень двойки. Рано или поздно расстояния разделятся на 2k, что и означает попадание в ловушку.

Пусть, наоборот, N + 1 = 2kt, где t нечетно и больше 1. Объявим ловушками все клетки с номерами, кратными t. Пусть кузнечик стоит не в ловушке. Заметим, что он не стоит и ровно посредине между двумя ловушками, поскольку все числа вида либо нецелые, либо кратны t. Значит, при любом названном числе у кузнечика есть прыжок не в ловушку.

7.4. [6] Несколько (конечное число) точек плоскости окрашены в четыре цвета, причем есть точки каждого цвета. Никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся три разных (возможно, пересекающихся) треугольника, каждый из которых имеет вершины трех разных цветов и не содержит внутри себя окрашенных точек.

Решение. Рассмотрим треугольник, наименьший (по площади) среди треугольников с вершинами трех разных цветов. Внутри него нет окрашенных точек (если бы такая была, то, соединив ее с вершинами двух других цветов, мы получили бы меньший треугольник). Пусть это оказался треугольник с вершинами 1-го, 2-го и 3-го цветов.

Теперь рассмотрим наименьший "разноцветный" треугольник, имеющий вершину 4-го цвета. Без ограничения общности можно считать, что это треугольник с вершинами 1-го, 2-го и 4-го цветов. Внутри него не может быть точек этих трех цветов. Но и точки 3-го цвета быть не может: соединив ее с вершинами 1-го и 4-го цветов, мы бы получили меньший по площади треугольник с вершиной 4-го цвета.

Наконец рассмотрим наименьший "разноцветный" треугольник, имеющий вершины 3-го и 4-го цветов. Аналогично показываем, что и внутри него нет окрашенных точек.

Итак, мы нашли искомые треугольники.

7.5. [7] По кругу стоят 99 детей, изначально у каждого есть мячик. Ежеминутно каждый ребенок с мячиком кидает свой мячик одному из двух соседей; при этом, если два мячика попадают к одному ребенку, то один из этих мячиков теряется безвозвратно. Через какое наименьшее время у детей может остаться только один мячик?

Ответ. Через 98 минут (уточняем условие: первый бросок происходит в конце (а не вначале) первой минуты, второй - в конце второй минуты и т.д.).

Решение. Занумеруем детей и мячики по часовой стрелке от 1 до 99.

Покажем, что ответ 98 возможен.

На каждом нечетном шагу (включая первый) первый мячик перебрасывается от 1-го ребенка ко 2-му, а на четных шагах - от 2-го к 1-му; остальные мячики, брошенные этим детям, пропадают.

Остальные мячики с нечетными номерами на каждом шагу перекидываются против часовой стрелки, а мячики с четными номерами - по часовой стрелке.

Мячики с нечетными номерами попадают второму ребенку на нечетных шагах, при этом первый мячик не пропадает, а остальные пропадают. Мячик с номером 99 пропадает на 97-м шагу, остальные мячики с нечетными номерами - раньше.

Аналогично, мячики с четными номерами попадают первому ребенку на четных шагах, одновременно с мячиком номер 1, прошенным вторым ребенком. При этом мячик с номером 2 пропадает на 98-м шагу, остальные мячики с четными номерами - раньше.

Покажем, что через n минут, если n < 98, мячиков всегда будет больше одного.

Нам удобнее считать, что мячики не теряются, а склеиваются (с сохранением всех номеров), и собираются в конце у 1-го ребенка.

Допустим, что n нечетно.

Тогда каждый мячик должен оказаться у первого ребенка через n минут, то есть через нечетное число минут, иначе через n минут этот мячик с места первого ребенка уйдет. Для этого мячик номер один должен пройти полный круг, на что ему необходимо не меньше 99 минут (ровно 99 минут, если он двигается все время в одну сторону).

Допустим, что n четно. Тогда первому мячику обходить полный круг необязательно, но второй мячик должен обойти полный круг без одного шага, иначе он попадает на место первого ребенка через нечетное число минут, а через n минут он с этого места уйдет. На такой путь второму мячику необходимо 98 минут.

Итак, во всех случаях меньше, чем через 98 минут, число мячиков будет больше одного.

7.6. [7] Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что a/b + c/d = 1, a/d + c/b = 2008?

Ответ - существуют.

Решение. Положим x = 1/b, y = 1/d. Решим систему уравнений

ax + cy = 1
cx + ay = 2008

относительно x и y.

ax = 1 - cy;
x = (1-cy)/a;
c(1-cy)/a + ay = 2008;
(c - c^2*y)/a + ay = 2008;
y(a - c^2/a) = 2008 - c/a;
y = (2008 - c/a)/(a-c^2/a) = (2008a - c)/(a^2-c^2).

x = (1-cy)/a = (1-c(2008a-c)/(a^2-c^2))/a =
= (a^2-c^2-2008ac+c^2)/(a(a^2-c^2)) =
= (a-2008c)/(a^2-c^2).

1/x и 1/y должны быть натуральными числами. Если взять a = 2009, c = 1, то 1/x = 2009^2-1 - натуральное число. Заметим, что если мы увеличим a и c в k раз, то x и y увеличатся в k раз, и уравнения системы останутся выполненными. Значит, если взять k = 2008*2009-1, то 1/y станет целым, а 1/x останется целым. Числа получатся такие:

a = 2009(2008*2009 - 1), b = 2008*2010(2008*2009 - 1),
c = 2008*2009 - 1, d = 2008*2010.

7.7. [8] В выпуклом четырехугольнике ABCD нет параллельных сторон. Углы, образованные сторонами четырехугольника с диагональю AC, равны (в каком-то порядке) 16°, 19°, 55° и 55°. Каким может быть острый угол между диагоналями AC и BD?

Ответ. 87 градусов.

Решение. Пусть E - точка пересечения диагоналей. Достаточно рассмотреть два варианта расположения углов (угол в этом тексте обозначается <).

1) <BAC = <DAC = 55°, <BCA = 19°, <DCA = 16°. Пусть I - точка пересечения биссектрис треугольника ABD. Четырехугольник BCDI вписанный, (так как <BID = 180° - <IBE - <IDE = 180° - (<ABE + <ADE)/2 = 180° - (180° - 2*55°)/2 = = 180° - 35° = 145°; <BID + <BCD = 145° + 35° = 180°).
Поэтому <DBI = <DCI = <DCA = 16°.
Значит, <ABD = 32°, и <AED = <ABD + <BAC = 87°.

2) <BAC = <BCA= 55°, <DAC = 19°, <DCA = 16°. Тогда <ADC = 145°, <ABC = 70°.

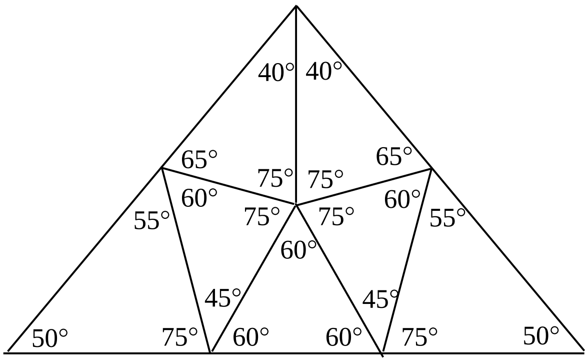
Рассмотрим описанную окружность треугольника ADC. Центр этой окружности является вершиной равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при вершине, равным 2*(180° - 145°) = 70°, то есть совпадает с точкой B. Поэтому
<ABD = 2 <DCA = 32°, и <AED = <ABD + <BAC = 87°.

29 Турнир Городов, весенний тур, сложный вариант, 10-11 классы

8.1. Бумажный треугольник, один из углов которого равен α, разрезали на несколько треугольников. Могло ли случиться, что все углы всех полученных треугольников меньше α

а) [3] в случае, если $\alpha = 70°$;

б) [3] в случае, если $\alpha = 80°$?



Решение. **а**) Не могло. В треугольниках разбиения все углы должны быть больше $180° - 70° - 70° = 40°$. Но исходный угол в 70° нельзя разрезать на углы, большие 40°.

б) Могло. На рисунке изображен треугольник с углом 80°, составленный из треугольников с меньшими углами. Для его построения проведем два луча, образующие угол 80° (стороны треугольника), и биссектрису этого угла. Выберем на биссектрисе произвольную точку и построим верхние треугольники с углами 40°, 75° и 65°, затем внутренние треугольники и проведем основание исходного треугольника.

8.2. [6] На числовой прямой в точке P сидит точечный кузнечик. Точки 0 и 1 – ловушки. На каждом ходу мы называем любое положительное число, после чего кузнечик прыгает влево или вправо (по своему выбору) на расстояние, равное этому числу. Для каких P можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек? (Мы всё время видим, где сидит кузнечик.)

Ответ. При $P = a\cdot 2^{-k}$, где a и k – натуральные числа, $0 < a < 2^k$.

Решение. Пусть P – число указанного в ответе вида, и дробь несократима (то есть a нечетно). Заметим, что тогда и число $1 - P$ имеет тот же вид (причем с тем же знаменателем). Назовем теперь наименьшее из чисел P и $1 - P$. Если кузнечик прыгнет и не попадет в ловушку, то он останется между ловушками, и расстояние до одной из ловушек удвоится. В результате знаменатель координаты кузнечика уменьшится вдвое. После k прыжков координата станет целой, что означает попадание в ловушку.

Объявим теперь ловушками все рациональные числа со степенью двойки в знаменателе. Покажем, что если кузнечик не в ловушке, он всегда может прыгнуть не в ловушку. Заметим, что полусумма ловушек – снова ловушка. Пусть названо число d. Так как

$P = \dfrac{(P+d)+(P-d)}{2}$, и P – не ловушка, то хотя бы одна из точек $P + d$ и $P - d$ – тоже не ловушка. Туда и прыгнем.

8.3. [6] Многочлен степени $n > 1$ имеет n разных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Его производная имеет корни $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Докажите неравенство $\dfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n} > \dfrac{y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2}{n-1}$.

Решение. Можно считать, что наш многочлен приведенный:

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$$

По формулам Виета $x_1 + \ldots + x_n = a_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$, откуда

$$2a_2 = (x_1 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

Поскольку $P(x) = nx^{n-1} - (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots$, аналогично получаем:

$y_1 + \ldots + y_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}a_1$, $y_1y_2 + y_1y_3 + \ldots + y_{n-2}y_{n-1} = \dfrac{n-2}{n}a_2$,

$$y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 a_1^2-2\frac{n-2}{n}a_2=$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2(x_1+\ldots+x_n)^2-\frac{n-2}{n}\left((x_1+\ldots+x_n)^2-(x_1^2+\ldots+x_n^2)\right)=$$

$$=\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2+\frac{n-2}{n}(x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

После подстановки полученного выражения в правую часть исходного неравенства, умножения на и приведения подобных членов оно превратится в известное неравенство $\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n} > \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2$ между средним квадратичным и средним арифметическим (строгое для неравных чисел).

8.4. [7] Петя и Вася нарисовали по четырёхугольнику без параллельных сторон. Каждый провёл в своём четырёхугольнике одну из диагоналей и вычислил углы, образованные этой диагональю со сторонами своего четырёхугольника. Петя получил числа α, α, β и γ (в некотором порядке), и Вася – тоже эти числа (возможно, в другом порядке). Докажите, что диагонали четырёхугольника Пети пересекаются под теми же углами, что и диагонали четырёхугольника Васи.

Решение. Существуют не более двух принципиально разных четырехугольников, удовлетворяющих условию – углы α имеют общую вершину или образуются в разных вершинах, соединенных диагональю, остальные четырехугольники им подобны. Причем, если имеется два принципиально разных четырехугольника, то α<90° и β+γ<180°, следовательно, оба четырехугольника выпуклые. Пусть в четырехугольнике *ABCD* $\angle CAB = \angle CAD = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $\angle DCA = \gamma$, а в четырехугольнике *AECF* $\angle ACE = \angle CAE = \alpha$, $\angle ACF = \beta$, $\angle CAF = \gamma$ (точка *E* лежит на прямой *AD*, точка *F* – на прямой *BC*). Тогда $AB \parallel EC$, $AF \parallel DC$. Докажем, что диагонали *DB* и *EF* также параллельны. Обозначим *O* точку пересечения *AD* и *BC*. Из $AB \parallel EC$ следует $OA/OD = OB/OC$, из $AF \parallel DC$ следует $OA/OE= OB/OC$. Следовательно $OE/OD = OF/OB$. Следовательно $DB \parallel EF$ и составляют равные углы с общей диагональю *AC*.

8.5. [8] Все натуральные числа выписали в ряд в некотором порядке (каждое число по одному разу). Обязательно ли найдутся несколько (больше одного) чисел, выписанных подряд (начиная с какого-то места), сумма которых будет простым числом?

Решение. Не обязательно. Покажем как записать натуральные числа в бесконечную последовательность, где таких “простых сумм” нет.

Возьмем $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Пусть конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n>1)$ без “простых сумм” уже построена, и m – наименьшее натуральное число, которое не является ее членом. Положим $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + m$, $a_{n+1} = S!$, $a_{n+2} = m$. Полученная последовательность также не содержит простых сумм. Действительно, любая сумма, содержащая слагаемое a_{n+1}, равна $S! + k$, где $1 < k \le S$, и не является простым числом, поскольку делится на k.

Продолжая такое построение по индукции, мы получим бесконечную последовательность. Из построения очевидно, что каждое натуральное число попадает в эту последовательность ровно один раз.

8.6. [8] Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек – белую или черную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.

Решение. Существует ровно 2^{11} 11-разрядных последовательностей из 0 и 1, из них с четным числом единиц – ровно половина, то есть $2^{10} = 1024$. Закодируем 1000 цветов тысячей таких последовательностей. Распределим разряды между мудрецами. Мудрец номер k действует так: среди видимых им 10 цветов колпаков подсчитывает число a_k тех, у кого в k-м разряде стоит 1. Если это число четно, он показывает черную, а иначе – белую карточку.

После этого каждый мудрец может вычислить все разряды в коде цвета своего колпака, кроме одного – за который он сам отвечает. Для этого он подсчитывает число b_k единиц в k-тых разрядах девяти мудрецов (кроме себя и мудреца номер k), и если четность b_k совпадает с показанной четностью a_k, у него в k-м разряде 0, иначе 1. Недостающий разряд восстанавливается благодаря четности общего числа единиц в коде.

8.**7**. [8] Даны две окружности и три прямые, каждая прямая высекает на окружностях хорды равной длины. Точки пересечения прямых образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника проходит через середину отрезка между центрами данных окружностей.

Решение. Утверждение очевидно следует из следующих двух лемм.

Лемма 1. Основание перпендикуляра, опущенного из середины линии центров двух окружностей на прямую, высекающую на этих окружностях равные хорды, лежит на радикальной оси этих окружностей.

Напомним, что *радикальной осью* двух окружностей называется множество точек, степени которых относительно обеих окружностей равны. *Степень точки* P относительно окружности радиуса R с центром в O – это число $OP^2 - R^2$, оно в свою очередь равно произведению секущих, проведённых к окружности из точки P (взятых со знаком). Радикальная ось – это прямая (если, конечно, окружности не концентрические.)

Лемма 2. Если основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника, лежат на одной прямой, то точка лежит на описанной окружности этого треугольника.

Доказательство леммы 1. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, H_1 и H_2 – середины высекаемых хорд K_1L_1 и K_2L_2 длины $2d$. Основание P нашего перпендикуляра – середина отрезка H_1H_2 (так как отрезок O_1O_2 проектируется на H_1H_2). Пусть $PH_1 = PH_2 = l$. Степень точки P относительно первой окружности равна
$\left(\overline{PK_1}, \overline{PL_1}\right) = \left(\overline{PH_1} + \overline{H_1K_1}, \overline{PH_1} - \overline{H_1K_1}\right) = l^2 - d^2$. Тот же результат мы получим, вычисляя степень точки P относительно второй окружности.

Доказательство леммы 2. Пусть P, Q, R – основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB, AC, BC треугольника ABC. Пусть точка M не лежит на описанной окружности Ω треугольника ABC. Найдём тогда такую вершину треугольника ABC, что при гомотетии с центром в этой вершине окружность Ω перейдет в окружность Ω_1, проходящую через точку M. Такая вершина найдётся: иначе M лежала бы на трёх касательных к Ω, касающихся Ω в вершинах треугольника ABC, что невозможно (ведь из любой точки можно провести не более двух касательных к данной окружности). Пусть найденная вершина – это A. При нашей гомотетии треугольник ABC перейдет в треугольник AB_1C_1, вписанный в Ω_1. Основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB_1, AC_1 треугольника $A_1B_1C_1$, – те же точки P и Q. Пусть R_1 – основание перпендикуляра, опущенного из M на B_1C_1. Как известно, точки P, Q и R_1 лежат на одной прямой (*прямая Симсона*). А точки P, Q и R лежат на одной прямой по условию. Но точки M, R и R_1 тоже будут лежать на одной прямой (так как BC и B_1C_1 параллельны). Значит, прямая PQ пересекает прямую MR как в точке R, так и в точке R_1. Следовательно точки R и R_1 совпадают. Тогда совпадают и прямые AB и A_1B_1, то есть коэффициент гомотетии равен 1, и Ω_1 совпадает с Ω.

Замечание. Прямое доказательство леммы 2 требует либо разбора нескольких случаев расположения точки M, либо понятия ориентированного угла между прямыми (см. Прасолов. Задачи по планиметрии. 1991, зад. 5.85 б).

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2007.**

1. Black and white checkers are placed on an 8×8 chessboard, with at most one checker on each cell. What is the maximum number of checkers that can be placed such that each row and each column contains twice as many white checkers as black ones?

2. Initially, the number 1 and a non-integral number x are written on a blackboard. In each step, we can choose two numbers on the blackboard, not necessarily different, and write their sum or their difference on the blackboard. We can also choose a non-zero number of the blackboard and write its reciprocal on the blackboard. Is it possible to write x^2 on the blackboard in a finite number of moves?

3. D is the midpoint of the side BC of triangle ABC. E and F are points on CA and AB respectively, such that BE is perpendicular to CA and CF is perpendicular to AB. If DEF is an equilateral triangle, does it follow that ABC is also equilateral?

4. Each cell of a 29×29 table contains one of the integers 1, 2, 3, $\ldots$, 29, and each of these integers appears 29 times. The sum of all the numbers above the main diagonal is equal to three times the sum of all the numbers below this diagonal. Determine the number in the central cell of the table.

5. The audience chooses two of five cards, numbered from 1 to 5 respectively. The assistant of a magician chooses two of the remaining three cards, and asks a member of the audience to take them to the magician, who is in another room. The two cards are presented to the magician in arbitrary order. By an arrangement with the assistant beforehand, the magician is able to deduce which two cards the audience has chosen only from the two cards he receives. Explain how this may be done.

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 5 and 5 points respectively.

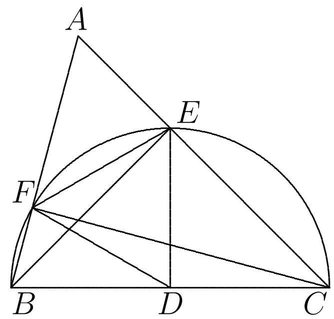
Solution to Junior O-Level Fall 2007

1. The number of checkers in each row must be a multiple of 3, since there are twice as many white chckers as black ones. Since there are only 8 cells in each row, the maximum number of checkers in each row in 6. Since there are 8 rows, the maximum number of checkers overall is 48. This can be attained by the placement shown below.

●	●	○	○	○	○		
●	○	○	○	○			●
○	○	○	○			●	●
○	○	○			●	●	○
○	○			●	●	○	○
○			●	●	○	○	○
		●	●	○	○	○	○
	●	●	○	○	○	○	

2. We first write down $x+1$ and $x-1$. Then we can write down $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$ and their sum $\frac{2}{x^2-1}$. The reciprocal of this number is $\frac{x^2-1}{2}$. Adding this number to itself yields x^2-1, and adding 1 to it yields x^2.

3. Let DEF be an equilateral triangle. Construct a semicircle with centre D and radius DE. The diameter BC of the semicircle is perpendicular to DE, with F closer to B than to C. Since $DF = DE$, F also lies on this semicircle. Extend BF and CE to meet at A. Since $\angle BEC = 90^\circ = \angle BFC$, BE and CF are indeed altitudes of triangle ABC. Since A lies on the extension of CE and DE is the perpendicular bisector of BC, $AB < AC$. Hence ABC is not equilateral.



4. There are 29 numbers on the main diagonal, 29×14 numbers above it and 29×14 numbers below it. The sum of the largest 29×14 numbers is $29(16+17+\cdots+29) = 29\times 7\times 45$ while the the sum of the smallest 29×14 numbers is $29(1+2+\cdots+14) = 29\times 7\times 15$. Since the former is exactly three times as large as the latter, the largest 29×14 numbers are all above the main diagonal and the smallest 29×14 numbers are all below the main diagonal. In other words, every number on the main diagonal, including the central cell, is 15.

5. The magician and her assistant can agree beforehand to arrange the numbers 1 to 5 in order on a circle, so that 1 follows 5. If the audience chooses two adjacent cards, say 3 and 4, the assistant will choose the two cards after them, which are 5 and 1. If the audience chooses two non-adjacent cards, say 3 and 5, the assistant will choose the cards after them, namely, 4 and 1. If the magician receives two adjacent cards, say 2 and 3, she will know that the audience

must have chosen 5 and 1. If the magician receives two non-adjacent cards, say 2 and 5, she will know that the audience must have chosen 1 and 4.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2007.**

1. Pictures are taken of 100 adults and 100 children, with one adult and one child in each, the adult being the taller of the two. Each picture is reduced to $\frac{1}{k}$ of its original size, where k is a positive integer which may vary from picture to picture. Prove that it is possible to have the reduced image of each adult taller than the reduced image of every child.

2. Initially, the number 1 and two positive numbers x and y are written on a blackboard. In each step, we can choose two numbers on the blackboard, not necessarily different, and write their sum or their difference on the blackboard. We can also choose a non-zero number of the blackboard and write its reciprocal on the blackboard. Is it possible to write on the blackboard, in a finite number of moves, the number

   (a) x^2;

   (b) xy?

3. Give a construction by straight-edge and compass of a point C on a line ℓ parallel to a segment AB, such that the product $AC \cdot BC$ is minimum.

4. The audience chooses two of twenty-nine cards, numbered from 1 to 29 respectively. The assistant of a magician chooses two of the remaining twenty-seven cards, and asks a member of the audience to take them to the magician, who is in another room. The two cards are presented to the magician in an arbitrary order. By an arrangement with the assistant beforehand, the magician is able to deduce which two cards the audience has chosen only from the two cards he receives. Explain how this may be done.

5. A square of side length 1 centimetre is cut into three convex polygons. Is it possible that the diameter of each of them does not exceed

   (a) 1 centimetre;

   (b) 1.01 centimetres;

   (c) 1.001 centimetres?

Note: The problems are worth 3, 2+2, 4, 4 and 1+2+2 points respectively.

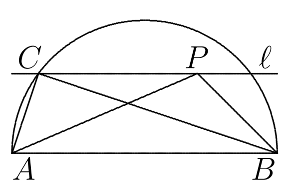
Solution to Senior O-Level Fall 2007

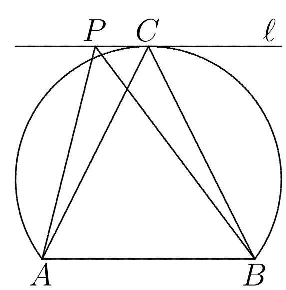
1. We use mathematical induction on the number n of pictures. For $n=1$, there is nothing to do. Suppose the result holds for some $n \geq 1$. Consider the next case with $n+1$ pictures. By the induction hypothesis, the first n photos can be reduced so the reduced image of each adult is taller than the reduced image of every child. Let the minimum reduced height of the adults be a and the maximum reduced height of the children be c. Let the height of the $(n+1)$st adult be b and the height of the $(n+1)$st child be d. If $b>c$ and $a>d$, there is nothing to prove. Suppose $b>d>a>c$. Then $\frac{c}{b}<\frac{d}{a}$. Hence there exists a rational number r such that $\frac{c}{b}<r<\frac{d}{a}$. It follows that $a>rd$ and $rb>c$. Let h and k be positive integers such that $r=\frac{h}{k}$. Then we reduce the $(n+1)$st picture to $\frac{1}{h}$ of its original size and each of the other pictures further to $\frac{1}{k}$ of its reduced size. The case $a>c>b>d$ can be handled in exactly the same way.

2. (a) We first write down $x+1$ and $x-1$. Then we can write down $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$ and their sum $\frac{2}{x^2-1}$. The reciprocal of this number is $\frac{x^2-1}{2}$. Adding this number to itself yields x^2-1, and adding 1 to it yields x^2.

   (b) We first write down $x+y$. By (a), we can write down $(x+y)^2$, x^2 and y^2. This is followed by $2xy=(x+y)^2-x^2-y^2$ and $\frac{1}{2xy}$. Finally, we can write down the sum $\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{1}{xy}$ and the reciprocal xy.

3. Draw a semicircle with diameter AB towards ℓ. Suppose they have a point of intersection C. Then $\angle BCA=90^\circ$ so that the area of triangle ABC is $\frac{1}{2}AC\cdot BC$. For any other point P on ℓ, the area of triangle ABP is $\frac{1}{2}AP\cdot BP\sin APB \leq \frac{1}{2}AP\cdot BP$. Since ℓ is parallel to AB, triangles ABC and ABP have the same area. It follows that $AC\cdot BC\leq AP\cdot BP$. Suppose the semicircle does not intersect ℓ. Let C be the point on ℓ equidistant from A and B. Draw the circumcircle of triangle ABC. Then ℓ is one of its tangents. Hence for any point P on ℓ other than C, $\angle ACB>\angle APB$. Since triangles ABC and ABP have the same area, we have $AC\cdot BC<AP\cdot BP$ as before.



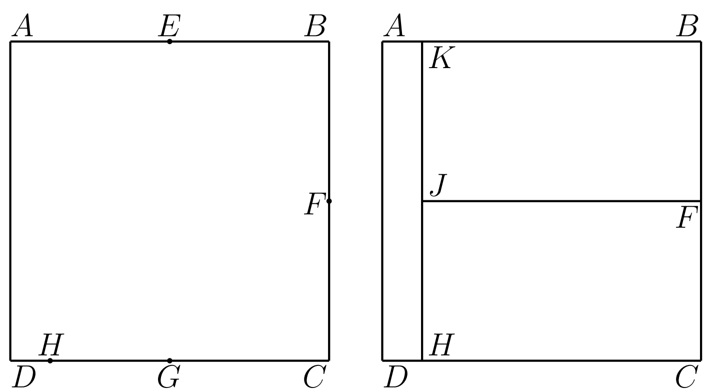


4. The magician and her assistant can agree beforehand to arrange the numbers 1 to 29 in order on a circle, so that 1 follows 29. If the audience chooses two adjacent cards, say 3 and 4, the assistant will choose the two cards after them, which are 5 and 6. If the audience chooses two non-adjacent cards, say 3 and 29, the assistant will choose the cards after them, namely, 4 and 1. If the magician receives two adjacent cards, say 2 and 3, she will know that the audience must have chosen 29 and 1. If the magician receives two non-adjacent cards, say 2 and 15, she will know that the audience must have chosen 1 and 14.

5. (a) Let $ABCD$ be the square. Let E, F and G be the respective midpoints of AB, BC and CD. Let H be a point on GD at a distance $\frac{1}{8}$ from D. (See the diagram below on the left.) Suppose $ABCD$ has been dissected into three convex polygons each of diameter at most 1. By the Pigeonhole Principle, two of the vertices of the square must belong to the same polygon. They cannot be opposite vertices as otherwise the diameter of that polygon will be $\sqrt{2}$. Hence we may assume that A and D belong to the first polygon. Suppose B and C belong to the second. Since E is too far from C and from D, it must belong to the third polygon. However, H is too far from each of A, E and B, and cannot belong to any of the three polygons. From this contradiction, we may assume that B belongs to the second polygon while C belongs to the third. Then E must belong to the second polygon while G must belong to the third. Since F is too far from A, we may assume that it belongs to the third polygon. However, H is too far from A, from B and also from F since $HF^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{7}{8})^2 = \frac{65}{64}$. This contradiction shows that the task is impossible.

(b) We can cut a square $ABCD$ into three rectangles $ADHK$, $BFJK$ and $CFJH$, as shown in the diagram below on the right. The diameter of any rectangle is a diagonal. Now $AH^2 = 1^2 + (\frac{1}{8})^2 = \frac{65}{64}$. From (a), $FK^2 = FH^2 = \frac{65}{64}$ also. Now $\frac{1}{64} < \frac{1}{50} < \frac{201}{10000}$ so that $\frac{65}{64} < \frac{10201}{10000}$. It follows that the diameter of each of the rectangles is less than $\frac{101}{100}$.

(c) The task is impossible, and the argument is exactly the same as that in (a) since we have $AH = FH = \frac{\sqrt{65}}{8} > \frac{1001}{1000}$.



International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

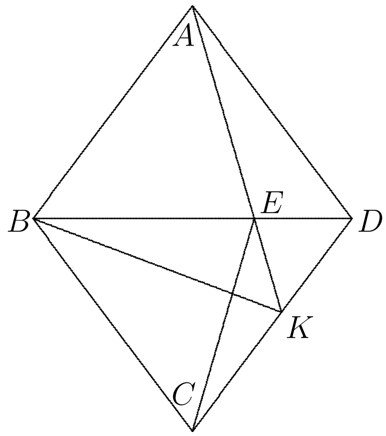
Junior A-Level Paper **Fall 2007.**

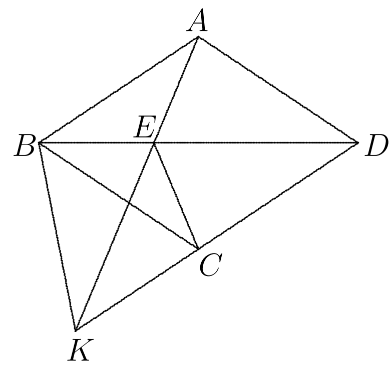
1. Let $ABCD$ be a rhombus. Let K be a point on the line CD, other than C or D, such that $AD = BK$. Let P be the point of intersection of BD with the perpendicular bisector of BC. Prove that A, K and P are collinear.
2. (a) Each of Peter and Basil thinks of three positive integers. For each pair of his numbers, Peter writes down the greatest common divisor of the two numbers. For each pair of his numbers, Basil writes down the least common multiple of the two numbers. If both Peter and Basil write down the same three numbers, prove that these three numbers are equal to each other.
   (b) Can the analogous result be proved if each of Peter and Basil thinks of four positive integers instead?
3. Michael is at the centre of a circle of radius 100 metres. Each minute, he will announce the direction in which he will be moving. Catherine can leave it as is, or change it to the opposite direction. Then Michael moves exactly 1 metre in the direction determined by Catherine. Does Michael have a strategy which guarantees that he can get out of the circle, even though Catherine will try to stop him?
4. Two players take turns entering a symbol in an empty cell of a $1 \times n$ chessboard, where n is an integer greater than 1. Aaron always enters the symbol X and Betty always enters the symbol O. Two identical symbols may not occupy adjacent cells. A player without a move loses the game. If Aaron goes first, which player has a winning strategy?
5. Attached to each of a number of objects is a tag which states the correct mass of the object. The tags have fallen off and have been replaced on the objects at random. We wish to determine if by chance all tags are in fact correct. We may use exactly once a horizontal lever which is supported at its middle. The objects can be hung from the lever at any point on either side of the support. The lever either stays horizontal or tilts to one side. Is this task always possible?
6. The audience arranges n coins in a row. The sequence of heads and tails is chosen arbitrarily. The audience also chooses a number between 1 and n inclusive. Then the assistant turns one of the coins over, and the magician is brought in to examine the resulting sequence. By an agreement with the assistant beforehand, the magician tries to determine the number chosen by the audience.
   (a) Prove that if this is possible for some n, then it is also possible for $2n$.
   (b) Determine all n for which this is possible.
7. For each letter in the English alphabet, William assigns an English word which contains that letter. His first document consists only of the word assigned to the letter A. In each subsequent document, he replaces each letter of the preceding document by its assigned word. The fortieth document begins with "Till whatsoever star that guides my moving." Prove that this sentence reappears later in this document.

Note: The problems are worth 5, 3+3, 6, 7, 8, 4+5 and 9 points respectively.

Solution to Junior A-Level Fall 2007

1. Let AK intersect BD at E. We shall prove that $BE = CE$, so that E lies on the perpendicular bisector of BC. It will then follow that $E = P$, and that A, P and K are indeed collinear. Since $AD = BK$ and AB is parallel to DK, $ABKD$ is a cyclic quadrilateral. It follows that $\angle AKD = \angle ABD = \angle CBD$, so that $BCKE$ is also a cyclic quadrilateral. We now have $\angle ECB = \angle EKB = \angle ADB = \angle EBC$, so that $EB = EC$.





2. (a) **First Solution by Jarno Sun:**
   Let the numbers Peter thinks of be p_1, p_2 and p_3, the numbers Basil thinks of be b_1, b_2 and b_3, and the numbers both write down be w_1, w_2 and w_3. Note that each of $\gcd(w_1, w_2)$, $\gcd(w_2, w_3)$ and $\gcd(w_3, w_1)$ is equal to $\gcd(p_1, p_2, p_3)$. Similarly, each of lcm (w_1, w_2), $\operatorname{lcm}(w_2, w_3)$ and $\operatorname{lcm}(w_3, w_1)$ is equal to $\operatorname{lcm}(b_1, b_2, b_3)$. It follows that $w_1w_2 = \gcd(w_1, w_2)\operatorname{lcm}(w_1, w_2) = \gcd(w_2, w_3)\ \operatorname{lcm}(w_2, w_3) = w_2w_3$, so that $w_1 = w_3$. Similarly, w_2 shares this common value.
   Second Solution:
   Let the numbers Peter thinks of be x, y and z. We assume to the contrary that $\gcd(x, y)$, $\gcd(x, z)$ and $\gcd(y, z)$ are not the same number. Then there must be a prime p such that the highest powers of p which divide these three numbers are not identical. Let the highest powers of p which divide x, y and z be a, b and c respectively. We may assume that $a \le b \le c$. Then the highest powers of p which divide $\gcd(x, y)$, $\gcd(x, z)$ and $\gcd(y, z)$ will respectively be a, a and b, and we have $a < b$. Now the highest power of p which divides any of Basil's numbers must be b, and p^b will divide two of his least common multiples. It follows that the two sets of three numbers cannot be identical unless all three numbers in each set are the same.

   (b) The answer is no. Peter's numbers may be 1, 2, 2 and 2. Then his six greatest common divisors are 1, 1, 1, 2, 2 and 2. Basil's numbers may be 1, 1, 1 and 2. Then his six least common multiples are 1, 1, 1, 2, 2 and 2. The two sets of numbers are identical, but the six numbers in each set are not all the same.

3. Michael can escape. In the first move, he chooses any direction. Catherine cannot gain anything by reversing it. In each subsequent move, Michael chooses a direction which is perpendicular to the line joining his current position to the centre of circle. Again Catherine cannot gain anything by reversing it. Let d_n be the distance of Michael from the centre of the circle after the n-th move. We have $d_1 = 1$ and $d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1}$. We claim that $d_n = \sqrt{n}$ for all $n \ge 1$. The basis holds, and by the induction hypothesis, $d_{n+1} = \sqrt{\sqrt{n}^2 + 1} = \sqrt{n+1}$. It follows that after 10000 moves, Michael will arrive at the circumference of the circle.

4. We claim that Betty can guarantee a win. We first prove the following auxiliary result. Suppose the first cell is marked X and the last cell is marked O, with n vacant cells in between. If Aaron goes first, he loses. We use induction on n. When $n = 1$, neither player has a move. Since Aaron moves first, he loses. Assume that result holds up to $n-1$ for some $n \geq 2$. Consider a board with n vacant cells between the X and O already marked. In his first move, Aaron will partition the board into two, with i and j vacant cells respectively, where $i+j = n-1$. In the first board, the first and the last cells are marked X. Betty places an O next to either X. Then we have two boards each of which has X at one end and O at the other, with less than n vacant cells in between. Aaron will lose because by the induction hypothesis, he loses on both boards. We now return to the vacant $1 \times n$ board. Suppose Aaron marks an X on the k-th cell. By symmetry, we may assume that $k > 1$. Betty marks an O on the first cell. It is Aaron's move, and by the auxiliary result, he will lose if $k = n-1$ or n. If not, he will at some point be forced to mark an X on the ℓ-th cell where $\ell \geq k+2$. Then Betty will mark an O on the $(k+1)$st cell, and the auxiliary result applies again. Thus Aaron is forced to open up new parts of the board again and again. Eventually he runs out of room and loses. It follows that Betty can always win if $n \geq 2$.

5. **Solution by Dmitri Dziabenko.**
Let there be n objects, and let the mass indicated by the tag on the i-th object be m_i, $1 \leq i \leq n$. We may assume that $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n$. Arbitrarily choose positive numbers $d_2 < d_3 < \cdots < d_n$ and choose d_1 so that $d_1m_1 = d_2m_2 + d_3m_3 + \cdots + d_nm_n$. On one side of the support, hang the 1-st object at a distance d_1 from the support. On the other side of the support, hang the i-th object at a distance d_i from the support for $2 \leq i \leq n$. Let the correct mass of the i-th object be a_i for $1 \leq i \leq n$. We consider three cases.
Case 1. All the tags are in fact correct.
Then we will have equilibrium.
Case 2. The tag on the 1-st object is correct but those on some of the others are not.
Then $\{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ is a permutation of $\{m_2, m_3, \ldots, m_n\}$, and by the Rearrangement Inequality,
$$d_2a_2 + d_3a_3 + \cdots + d_na_n < d_2m_2 + d_3m_3 + \cdots + d_nm_n = d_1m_1.$$
Case 3. The tag on the 1-st object is incorrect.
Then $m_1 < a_1 = m_j$ for some j, $2 \leq j \leq n$. Hence $d_1a_1 = d_1m_j > d_1m_1$ while
$$\begin{aligned} & d_2m_2 + d_3m_3 + \cdots + d_nm_n \\ > \ & d_2m_1 + d_3m_2 + \cdots + d_jm_{j-1} + d_{j+1}m_{j+1} + \cdots + d_nm_n \\ \geq \ & d_2a_2 + d_3a_3 + \cdots + d_na_n, \end{aligned}$$
and again we have no equilibrium.

6. (a) Given a row of n coins arbitrarily arranged heads and tails, and a number between 1 and n inclusive, the assistant can flip exactly one coin so that the magician can tell which number has been chosen. With a row of $2n$ coins and a number m between 1 and $2n$, the magician and the assistant place the numbers 1 to n in order in the first row of a $2 \times n$ array, and the numbers from $n+1$ to $2n$ in order in the second row. If the row number h and the column number k of the location of m are determined, then $m = (h-1)n + k$. The magician and the assistant also consider the $2n$ coins as in a $2 \times n$ array. Code each coin with heads up as 0 and each coin with tails up as 1. Compute the sum of the codes of the two coins in each column modulo 2 and regard the result as a linear array of n coded coins. By the hypothesis, the assistant can flip the q-th coded coin to signal the number k to the magician. This can be achieved by flipping either of the two coins in the q-th column. To signal the number h to the magician, the assistant will just use the bottom coin of the q-th column, code 0 meaning $h = 1$ and code 1 meaning $h = 2$. If the bottom coin is not correct, flip it. Otherwise, flip the top coin.

   (b) For $n = 1$, the assistant must flip the only coin. However, the chosen number can only be 1, and the magician does not require any assistance. Hence the task is possible. For $n = 2$, let the coins be coded as in (a). The assistant will just use the second coin, code 0 meaning $h = 1$ and code 1 meaning $h = 2$. If the second coin is not correct, flip it. Otherwise, flip the first coin. Hence the task is also possible. By (a), the task is possible whenever n is a power of 2. We now show that the converse also holds. Each of the 2^n arrangement of the coins codes a specific number between 1 and n. If n is not a power of 2, then $2^n = qn + r$ where q and r are the quotient and the remainder obtained from the Division Algorithm, with $r > 0$. By the Pigeonhole Principle, some number is coded by at most q arrangements. Each may be obtained by the flip of a single coin from exactly n other arrangements. The yields a total count of $qn < 2^n$. On the other hand, from each of the 2^n arrangements, we must be able to obtain one of these q arrangements by the flip of a single coin. This contradiction shows that the task is impossible unless n is a power of 2.

7. **Solution by Central Jury.**
   Let the i-th document be D_i, $0 \le i \le 40$. Note that D_0 consists only of the letter A, and D_1 consists only of the word assigned to the letter A. This word does not start with A, as otherwise all documents start with A, which is not the case since D_{40} starts with T. However, the word assigned to A does contain the letter A, so that D_1 contains D_0, and not from the beginning. Similarly, D_{i+1} contains D_i for $0 \le i \le 39$, again not from the beginning. Note that no D_i can start with a single-letter word, as otherwise this word will start all subsequent documents, which is not the case since D_{40} does not start with a single-letter word. Since there are only twenty-six letters in the English alphabet, D_j and D_k must start with the same letter for some j and k where $j < k \le 27$. Then D_{j+1} and D_{k+1} start with the same word, D_{j+2} and D_{k+2} start with the same two words, and so on. Let $t = 40 - k$. Since $k \le 27$, $t \ge 13$ so that D_{j+t} and $D_{k+t} = D_{40}$ start with the same thirteen words, including "Till whatsoever star that guides my moving". Since D_{40} contains a copy of D_{j+t} and not from the beginning, this sentence will reappear in D_{40}.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2008.**

1. In the convex hexagon $ABCDEF$, AB, BC and CD are respectively parallel to DE, EF and FA. If $AB = DE$, prove that $BC = EF$ and $CD = FA$.

2. There are ten congruent segments on a plane. Each point of intersection divides every segment passing through it in the ratio 3:4. Find the maximum number of points of intersection.

3. There are ten cards with the number a on each, ten with b and ten with c, where a, b and c are distinct real numbers. For every five cards, it is possible to add another five cards so that the sum of the numbers on these ten cards is 0. Prove that one of a, b and c is 0.

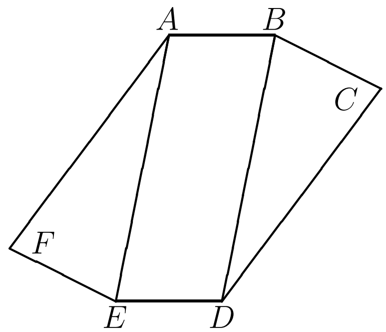
4. Find all positive integers n such that $(n+1)!$ is divisible by $1! + 2! + \cdots + n!$.

5. Each cell of a 10×10 board is painted red, blue or white, with exactly twenty of them red. No two adjacent cells are painted in the same colour. A domino consists of two adjacent cells, and it is said to be good if one cell is blue and the other is white.
   (a) Prove that it is always possible to cut out 30 good dominoes from such a board.
   (b) Give an example of such a board from which it is possible to cut out 40 good dominoes.
   (c) Give an example of such a board from which it is not possible to cut out more than 30 good dominoes.

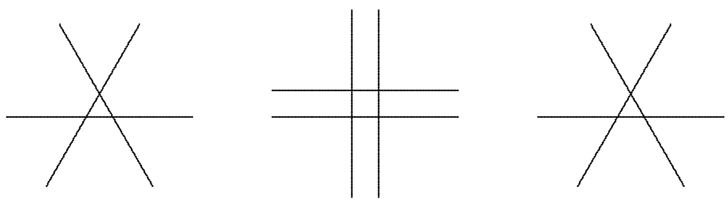
Note: The problems are worth 4, 5, 5, 5 and 6 points respectively.

Solution to Junior O-Level Spring 2008

1. Since AB and DE are equal and parallel, $ABDE$ is a parallelogram so that $AE = BD$. Moreover, AE is parallel to BD. Since CD is parallel to FA, $\angle CDB = \angle FAE$. Similarly, $\angle CBD = \angle FEA$. Hence triangles BCD and EFA are congruent, so that $BC = EF$ and $CD = FA$.



2. On each segment, there are exactly two points which divide it in the ratio 3:4. Hence the total count segment by segment is at most 20. However, it takes two segments to produce a point of intersection. Hence there are at most 10 such points. The diagram below shows how this can be attained, so that 10 is indeed the maximum.



3. Suppose none of a, b and c is 0. They cannot all be positive and they cannot be all negative. By symmetry, we may assume that a and b are positive while c is negative. Since a and b are distinct, we may assume that $a > b$. If $a > -c$, we take five cards with a on each. Then it is impossible to take another five cards to bring the total down to 0. If $-c > a$, we take five cards with c on each. Then it is impossible to take another five cards to bring the total up to 0. It follows that we must have $a = -c > b$. If we now take four cards with a on each and a fifth card with b on it, it is impossible to take another five cards to bring the total down to 0.

4. For $n = 1$, 1! divides 2!. For $n = 2$, 1!+2! divides 3!. We claim that there are no solutions for $n \geq 3$. We have

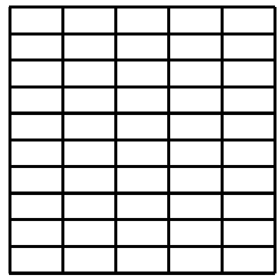
$$\begin{aligned}(n+1)! &= n! + n(n!) \\ &= n((n-1)! + n!) \\ &< n(1! + 2! + \cdots + n!).\end{aligned}$$

For $n = 3$, $4! > 2(1! + 2! + 3!)$. Suppose for some $n \geq 3$, $n! > (n-2)(1! + 2! + \cdots + (n-1)!)$. Note that $2(n-2) \geq n - 1$. By mathematical induction,

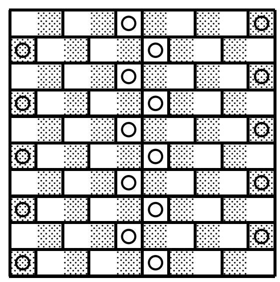
$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n-1)n! + 2n! \\ &> (n-1)n! + 2(n-2)(1! + 2! + \cdots + (n-1)!) \\ &\geq (n-1)(1! + 2! + \cdots + n!).\end{aligned}$$

It follows that $\dfrac{(n+1)!}{1! + 2! + \cdots + n!}$ lies strictly between $n - 1$ and n. Hence it cannot be an integer, and the claim is justified.

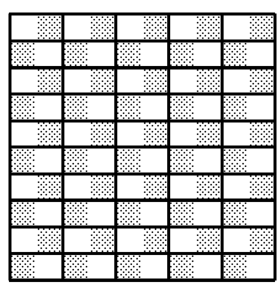
5. (a) Divide the board into 50 dominoes as shown in the diagram below. At most 20 of them can contain a red cell. Each of the other 30 must be a good domino since no two adjacent cells are painted in the same colour.



(b) Paint the board blue and white in the usual checkerboard pattern as shown in the diagram below, where the blue cells are shaded. Repaint into red cells 20 of the cells marked by circles, and divide the rest of the board into 40 dominoes, each of which is good.



(c) Divide the board into 50 dominoes as in (a) and paint the board as in (b). If we repaint any 20 blue cells into red cells, we will only have 30 blue cells left. Since we need a blue cell in each good domino, we will have exactly 30 good dominoes.



International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2008.**

1. There are ten cards with the number a on each, ten with b and ten with c, where a, b and c are distinct real numbers. For every five cards, it is possible to add another five cards so that the sum of the numbers on these ten cards is 0. Prove that one of a, b and c is 0.

2. Can it happen that the least common multiple of 1, 2, ..., n is 2008 times the least common multiple of 1, 2, ..., m for some positive integers m and n?

3. In triangle ABC, $\angle A = 90°$. M is the midpoint of BC and H is the foot of the altitude from A to BC. The line passing through M and perpendicular to AC meets the circumcircle of triangle AMC again at P. If BP intersects AH at K, prove that $AK = KH$.

4. No matter how two copies of a convex polygon are placed inside a square, they always have a common point. Prove that no matter how three copies of the same polygon are placed inside this square, they also have a common point.

5. We may permute the rows and the columns of the table below. How may different tables can we generate?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

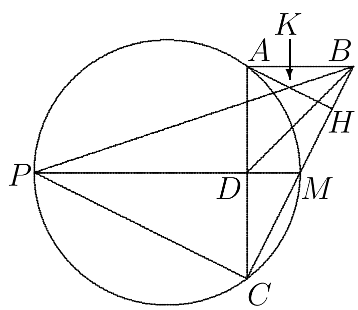
Note: The problems are worth 4, 5, 5, 5 and 6 points respectively.

Solution to Senior O-Level Spring 2008

1. Suppose none of a, b and c is 0. They cannot all be positive and they cannot be all negative. By symmetry, we may assume that a and b are positive while c is negative. Since a and b are distinct, we may assume that $a > b$. If $a > -c$, we take five cards with a on each. Then it is impossible to take another five cards to bring the total down to 0. If $-c > a$, we take five cards with c on each. Then it is impossible to take another five cards to bring the total up to 0. It follows that we must have $a = -c > b$. If we now take four cards with a on each and a fifth card with b on it, it is impossible to take another five cards to bring the total down to 0.

2. Let the highest power of 2 less than or equal to m be 2^r. Since $2008 = 2^3 \times 251$, the highest power of 2 less than or equal to n must be 2^{r+3}. It follows that $n > 4m$. Let the highest power of 3 less than or equal to m be 3^s. Then the highest power of 3 less than or equal to n must also be 3^s since 3 does not divide 2008. However, $n > 4m \geq 4 \times 3^s > 3^{s+1}$, which is a contradiction. Hence no such positive integers m and n exist.

3. Since both AB and MP are perpendicular to AC and $BM = MC$, MP intersects AC at its midpoint D. It follows that MP is a diameter of the circumcircle, so that MC is perpendicular to PC. It follows that triangles MCD and MPC are similar, so that $\frac{MD}{MC} = \frac{MC}{MP}$. Hence $\frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MP}$. Since $\angle DMB = \angle BMP$, triangles DMB and BMP are also similar. It follows that $\angle CBD = \angle BPM = \angle ABK$. Now triangles BAH and BCA are also similar. Since $CD = DA$, we have $AK = KH$.



4. Let a copy F of the convex polygon be placed anywhere inside the square. Consider the copy F' obtained from F by a half-turn about the centre O of the square. By hypothesis, F and F' must have a point in common. Let it be P. Then the point P' obtained from P by a half-turn about O is also in the intersection of F and F'. Since F is convex, O is also in F. It follows that a copy of the convex polygon placed anywhere inside the square must cover O. It follows that if three copies are placed in the square, they will have O in common.

5. The columns may be permuted in 7! ways so that the first row is different. The remaining rows may be permuted in 6! ways so that the first column is different. Once the first row and the first column have been fixed, the remaining entries in the table are also fixed. Hence the total number of different tables we can generate is $7! \times 6!$.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2008.**

1. An integer N is the product of two consecutive integers.
   (a) Prove that we can add two digits to the right of this number and obtain a perfect square.
   (b) Prove that this can be done in only one way if $N > 12$.

2. A line parallel to the side AC of triangle ABC cuts the side AB at K and the side BC at M. O is the point of intersection of AM and CK. If $AK = AO$ and $KM = MC$, prove that $AM = KB$.

3. Alice and Brian are playing a game on a $1 \times (N + 2)$ board. To start the game, Alice places a checker on any of the N interior squares. In each move, Brian chooses a positive integer n. Alice must move the checker to the n-th square on the left or the right of its current position. If the checker moves off the board, Alice wins. If it lands on either of the end squares, Brian wins. If it lands on another interior square, the game proceeds to the next move. For which values of N does Brian have a strategy which allows him to win the game in a finite number of moves?

4. Given are finitely many points in the plane, no three on a line. They are painted in four colours, with at least one point of each colour. Prove that there exist three triangles, distinct but not necessarily disjoint, such that the three vertices of each triangle have different colours, and none of them contains a coloured point in its interior.

5. Standing in a circle are 99 girls, each with a candy. In each move, each girl gives her candy to either neighbour. If a girl receives two candies in the same move, she eats one of them. What is the minimum number of moves after which only one candy remains?

6. Do there exist positive integers a, b, c and d such that $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ and $\frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008$?

7. A convex quadrilateral $ABCD$ has no parallel sides. The angles between the diagonal AC and the four sides are $55°$, $55°, 19°$ and $16°$ in some order. Determine all possible values of the acute angle between AC and BD.

Note: The problems are worth 2+2, 5, 6, 6, 7, 7 and 8 points respectively.

Solution to Junior A-Level Spring 2008

1. Let $N = n(n+1)$. Adding two digits to the right of N produces an integer M where $100n(n+1) \le M \le 100n(n+1)+99$.

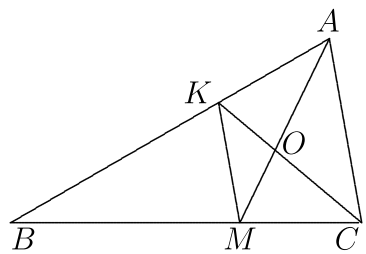
   (a) If we add 25, then $M = 100n(n+1)+25 = (10n+5)^2$.

   (b) Notice that $N > 12$ means $n > 3$. It follows that $100n(n+1)-(10n+4)^2 = 20n-16 > 0$ and $100n(n+1)+99-(10n+6)^2 = -20n+63 < 0$. Thus the only square within range is $(10n+5)^2$.

2. Since $AO = AK$, $\angle AKO = \angle AOK$. Since $MK = MC$, $\angle MCK = \angle MKC$. Since KM is parallel to AC, $\angle ACK = \angle MKC$ and $\angle BMK = \angle ACM$. Now

$$\angle ABC = \angle AKO - \angle MCK = \angle AOK - \angle ACK = \angle MAC.$$

   Hence triangles MAC and KBM are congruent, so that $AM = BK$.



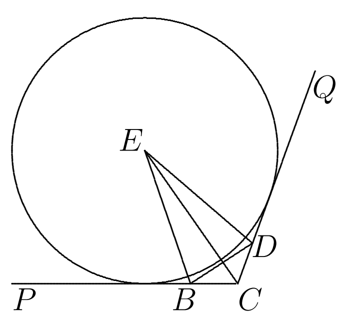
3. Colour the two end squares red. Then there is a block of adjacent blank squares between them. If the block does not have a middle square, the colouring process terminates. If it does, colour the middle square red. This creates twice as many blocks of adjacent blank squares all with the same number of squares in them. Eventually, the colouring process stops either because all squares are red, or because the new blocks do not have middle squares. If all squares are red, then $N = 2^n - 1$ for some positive integer n, and Brian has a sure win. Wherever Alice places the checker, Brian can force it into either square which makes its current square red. Eventually, the checker will be forced into either of the two end squares. If the squares are not all red, then $N \ne 2^n - 1$ for any positive integer n, and Alice cannot lose. She simply places the checker on a blank square, and Brian can never force it onto a red square. Since both end squares are red, Brian cannot win. In summary, Brian wins if and only if $n = 2^n - 1$ for some positive integer n.

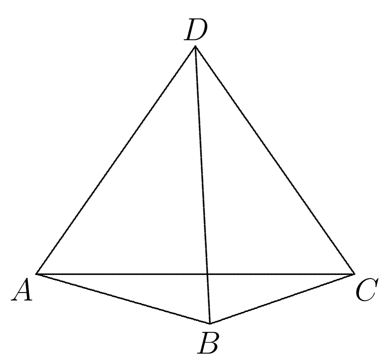
4. Consider all sets of four points of different colours. Since the number of points is finite, we can choose the set whose convex hull has the smallest area. If the convex hull is a quadrilateral, then there are no coloured points in its interior, as otherwise we have a set whose convex hull has smaller area. The four vertices of the quadrilateral determine four triangles each with vertices of different colours, and any three of these four triangles will satisfy the requirement. Suppose the convex hull is a triangle ABC, say with A red, B yellow and C blue. Then only points of the fourth colour, say green, can be inside ABC, and there is at least one such point D. If there are no green points other than D, then triangles ACD, BAD and CBD satisfy the requirement. Suppose BAD contains other green points. Choose among them a point E such that triangle BAE has the smallest area. Then it cannot contain any green points in its interior, and we can replace BAD by BAE. A similar remedy can be applied if either ACD or CBD contains green points in its interior. Hence we will get three triangles which satisfy the requirement.

5. **Solution by Olga Ivrii.**
Let the girls be labelled 1 to 99 in clockwise order. We first show that the task can be accomplished in 98 moves. In each of the first 49 moves, if she still has a candy, the k-th girl gives hers to the $(k-1)$-st girl for $2 \leq k \leq 50$ and to the $(k+1)$-st girl for $51 \leq k \leq 99$. The 1-st girl, who will always have a candy, gives hers to the 99-th girl. After 49 moves, only the 1-st and the 99-th girl have candies. These two candies can be passed, in opposite directions, to the 50-th girl in another 49 moves. We now show that the task cannot be accomplished in less than 98 moves. We will not allow the girls to eat the candies, but each must pass all she has to the same neighbour. Our target is to have all candies in the hands of one girl. Consider what happens to a candy in two consecutive moves. It either returns to the girl who has it initially, or is passed to a girl two places away. Suppose the candies all end up with the 50-th girl in at most 98 moves. The number of moves is not enough for the candy initially with the 50-th girl to go once around the circle before returning to her. It follows that the number of moves must be even. However, in order for the candy initially with the 49-th girl to end up in the hands of the 50-th girl in an even number of moves, it must go once around the circle, and that takes 98 moves.

6. Such positive integers exist. We take $b = kd$ for some integer k. Then $a + kc = kd$ and $ka + c = 2008kd$. Solving this system of equations, we have $a = \frac{kd(2008k-1)}{k^2-1}$ and $c = \frac{kd(k-2008)}{k^2-1}$. Taking $d = k^2 - 1$, we have $b = k(k^2 - 1)$, $a = k(2008k - 1)$ and $c = k(k - 2008)$ for $k \geq 2009$. When $k = 2009$, we have $a = 8104448639$, $b = 8108484720$, $c = 2009$ and $d = 4036080$.

7. There are three cases to consider, the two equal angles are at the same vertex, they are at opposite vertices but on the same side of the diagonal, and they are at opposite vertices and on opposite sides of the diagonal. The last one can be discarded because there will be two parallel sides. In the first case, as illustrated by the diagram below on the left, let the equal angles be at the vertex C. Draw the excircle of triangle BCD opposite C with centre E. Then A lies on the line CE, and we have $\angle PBE = \angle EBD$ and $\angle QDE = \angle EDB$. Then $\angle BEC = \angle PBE - 55°$ and $\angle DEC = \angle QDE - 55°$. Hence the sum of the angles of triangle BED is $2\angle EBD + 2\angle EDB - 110° = 180°$. Hence $\angle EBD + \angle EDB = 145°$ so that $\angle BED = 35°$. It follows that A and E coincide. By symmetry, we can take $\angle DAC = 16°$. Then $\angle ADB = \angle QDA = 55° + 16° = 71°$. It follows that the acute angle between AC and BD is $71° + 16° = 87°$.





The second case is illustrated by the diagram above on the right, where $\angle DAC = \angle DCA = 55°$, $\angle BAC = 16°$ and $\angle BCA = 19°$. Then $\angle ABC = 180° - 16° - 19° = 145°$. If $DB < DA = DC$, then $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC > \angle BAD + \angle BCD > 145°$. Similarly, if $DB > DA = DC$, then $\angle ABC < 145°$. It follows that $DB = DA = DC$ so that $\angle ABD = 55° + 16° = 71°$. It follows that the acute angle between AC and BD is again $71° + 16° = 87°$. In summary, $87°$ is the only possible value.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2008.**

1. A triangle has an angle of measure θ. It is dissected into several triangles. Is it possible that all angles of the resulting triangles are less than θ, if

   (a) $\theta = 70°$;

   (b) $\theta = 80°$?

2. Alice and Brian are playing a game on the real line. To start the game, Alice places a checker on a number x where $0 < x < 1$. In each move, Brian chooses a positive number d. Alice must move the checker to either $x + d$ or $x - d$. If it lands on 0 or 1, Brian wins. Otherwise the game proceeds to the next move. For which values of x does Brian have a strategy which allows him to win the game in a finite number of moves?

3. A polynomial $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$

   has n distinct real roots $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, where $n > 1$. The polynomial

   $$nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

   has roots $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$. Prove that

   $$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

4. Each of Peter and Basil draws a convex quadrilateral with no parallel sides. The angles between a diagonal and the four sides of Peter's quadrilateral are $\alpha,\ \alpha,\ \beta$ and γ in some order. The angles between a diagonal and the four sides of Basil's quadrilateral are also $\alpha,\ \alpha,\ \beta$ and γ in some order. Prove that the acute angle between the diagonals of Peter's quadrilateral is equal to the acute angle between the diagonals of Basil's quadrilateral.

5. The positive integers are arranged in a row in some order, each occuring exactly once. Does there always exist an adjacent block of at least two numbers somewhere in this row such that the sum of the numbers in the block is a prime number?

6. Seated in a circle are 11 wizards. A different positive integer not exceeding 1000 is pasted onto the forehead of each. A wizard can see the numbers of the other 10, but not his own. Simultaneously, each wizard puts up either his left hand or his right hand. Then each declares the number on his forehead at the same time. Is there a strategy on which the wizards can agree beforehand, which allows each of them to make the correct declaration?

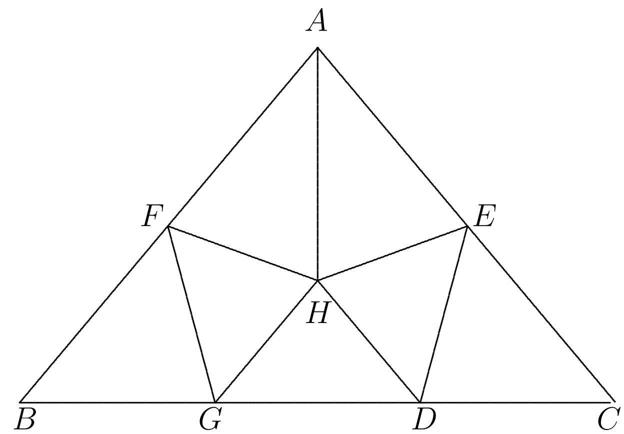
7. Each of three lines cuts chords of equal lengths in two given circles. The points of intersection of these lines form a triangle. Prove that its circumcircle passes through the midpoint of the segment joining the centres of the circles.

Note: The problems are worth 3+3, 6, 6, 7, 8, 8 and 8 points respectively.

Solution to Senior A-Level Spring 2008

1. (a) **Solution by Noble Zhai.**
Suppose the task is possible. In the resulting triangulation, the $70°$ angle must be subdivided into at least two angles. Hence one of these angles is at most $35°$. In the triangle to which it belongs, one of the other two angles is at least $\frac{1}{2}(180° - 35°) = 72.5°$. This is a contradiction.

(b) In the diagram below, ABC is a triangle with $AB = AC$ and $\angle CAB = 80°$. It is dissected into seven triangles where $AF = AH = AE$, $HF = HG = HD = HE$, HG is parallel to AB and HD is parallel to AC. Then $\angle DHG = 80°$, $\angle HGD = \angle GDH = 50°$, $\angle HAE = \angle HAF = 40°$, $\angle AFH = \angle AHF = \angle FHG = \angle DHE = \angle EHA = \angle AEH = 70°$ and $\angle BGF = \angle CDE = 75°$. The other angles all have measure $55°$. If we move D and G a little closer to each other, we can make all angles to have measure less than $80°$.



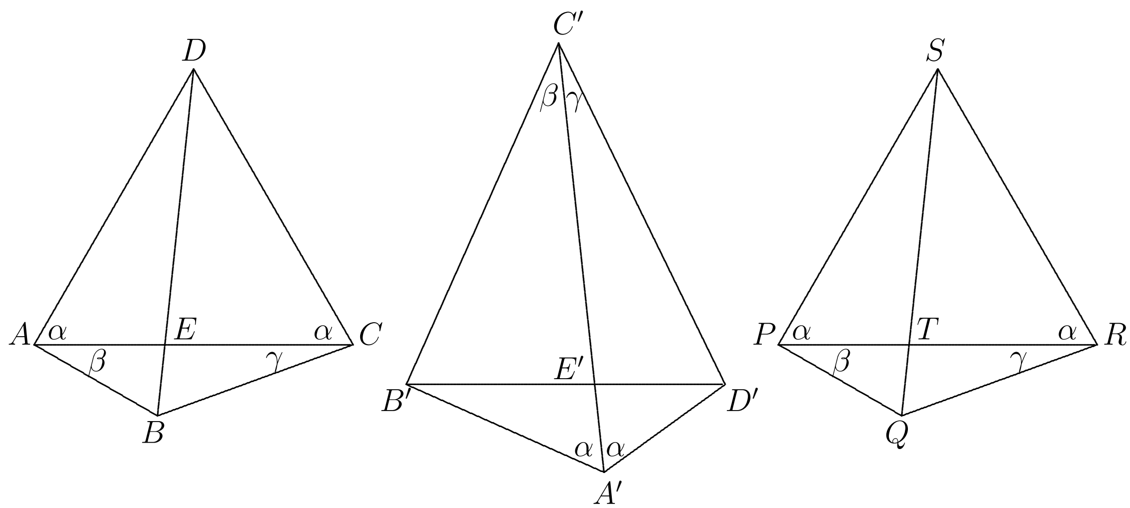
2. Call a number good if it is of the form $\frac{m}{2^n}$ for some odd integer m satisfying $0 < m < 2^n$. Suppose x is a good number. Then Brian chooses $d = \min\{\frac{m}{2^n}, 1 - \frac{m}{2^n}\}$. In order to avoid losing immediately, Alice must move the checker to $\frac{m}{2^{n-1}}$ or $1 - \frac{m}{2^{n-1}}$, which is another good number. Repeating this procedure, the power of 2 in the denominator diminishes by 1 in each move. After n moves, the checker is forced into 0 or 1, and Brian wins. Suppose x is not a good number. Then whatever value d Brian chooses, either $x + d$ or $x - d$ is not good. This is because the sum of two good numbers is good, and half a good number is also good, but x itself is not good. It follows that Alice can never be forced to move the checker to a good number. However, since $\frac{1}{2}$ is good, and it is the only point from which Brian can force Alice to lose on the move, Brian cannot win. In summary, Brian wins if and only if x is a good number.

3. We have $x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1$, $x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2$, $y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=-\frac{a_1(n-1)}{n}$ and $y_1y_2+y_1y_3+\cdots+y_{n-2}y_{n-1}=\frac{a_2(n-2)}{n}$. It follows that $X=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a_1^2-2a_2$ and $Y=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2=\frac{a_1^2(n-1)^2}{n^2}-\frac{2a_2(n-2)}{n}$. Hence

$$\begin{aligned}\frac{X}{n}-\frac{Y}{n-1} &= a_1^2\left(\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n^2}\right)-2a_2\left(\frac{1}{n}-\frac{n-2}{n(n-1)}\right)\\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}((n-1)a_1^2-2na_2)\\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}((n-1)X-2a_2).\end{aligned}$$

By the Rearrangement Inequality, $(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)\geq 0$, with equality if and only if $x_1=x_2=\cdots=x_n$. Since the roots are distinct, we have strict inequality.

4. In the diagram below on the left is Peter's quadrilateral $ABCD$, with $\angle CAD=\angle ACD=\alpha$, $\angle BAC=\beta$ and $\angle ACB=\gamma$, the diagonals intersecting at E. In the diagram below in the middle is Basil's quadrilateral $A'B'C'D'$, with $\angle B'A'C'=\angle D'A'C'=\alpha$, $\angle B'C'A'=\beta$ and $\angle D'C'A'=\gamma$, the diagonals intersecting at E'.



Construct triangle PQT similar to triangle $C'B'E'$. If we extend PT to R, then we have $\angle QTR=\angle D'E'C'$, and we can choose R so that triangle QRT is similar to triangle $D'C'E'$. Similarly, we can extend QT to S so that triangle RST is siimilar to triangle $A'D'E'$. Join SP to complete the quadrilateral $PQRS$, as shown in the diagram above on the right. Now $\angle STP=\angle QTR=\angle D'E'C'=\angle B'E'A'$ and

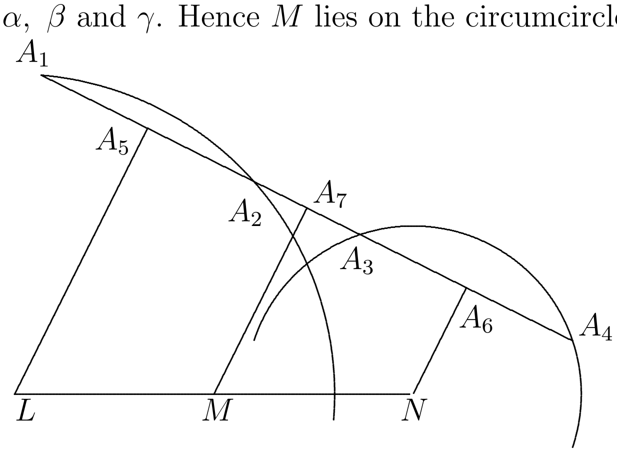
$$\frac{PT}{ST}=\frac{PT}{QT}\cdot\frac{QT}{RT}\cdot\frac{RT}{ST}=\frac{C'E'}{B'E'}\cdot\frac{D'E'}{C'E'}\cdot\frac{A'E'}{D'E'}=\frac{A'E'}{B'E'}.$$

Hence triangle SPT is similar to triangle $B'A'E'$. It follows that triangle PQR is similar to triangle ABC, and triangle RSP is similar to triangle CDA, so that the quadrilateral $PQRS$ is similar to the quadrilateral $ABCD$. Hence $\angle C'B'E'=\angle PTQ=\angle AEB$.

5. **Solution by Konstantin Matveev.**
Let the first three terms be 1, 4! and 2. So far, each of 1+4!, 4!+2 and 1+4!+2 are composite. We will lengthen the sequence by two terms at a time. The second term to be added is the smallest number not yet in the sequence, and the first term to be added is the factorial of the sum of the preceding terms plus the following term. Thus the fifth term is 3, the fourth term is (1+4!+2+3)!, the seventh term is 4 and the sixth term is (1+4!+2+(1+4!+2+3)!+3+4)!. Since the odd-numbered term added at each stage is the smallest number not yet in the sequence, every positive integer will eventually appear. No positive integer can appear twice as the even-numbered term added at each stage is larger than any number which has been chosen earlier. For any block of consecutive terms other than {1,4!}, the largest term is of the form $n!$ while the sum of the other terms is some positive integer k where $2 \leq k \leq n$. The sum of the terms in the block is $n! + k$, which is composite since it is divisible by k.

6. **Solution by Jonathan Zung.**
Each wizard constructs an 10×10 table, the i-th row being the base-2 representation, with leading 0s, of the number on the forehead of the wizard i places away in clockwise order. Then he computes the sum of the diagonal elements modulo 2. If the sum is 0, he puts up his left hand, and if it is 1, he puts up his right hand. Consider an arbitrary wizard A. Each digit of the base-2 representation of A's number appears on the diagonal of exactly one of the other wizards. Consider the digit which is on the diagonal of wizard B. The other 9 digits on that diagonal are known to A. From B's show of hand, A has the sum of the 10 digits on that diagonal, and he can determine the missing digit. Recovering the other digits in a similar manner, A can reconstruct his own number.

7. **Solution by Dmitri Dziabenko.**
Let the centres of the two circles be L and N, with M the midpoint of LN. Let a line α cut the circles at A_1, A_2, A_3 and A_4 as shown in the diagram below, with $A_1A_2 = A_3A_4$. Let A_5 and A_6 be the respective midpoints of A_1A_2 and A_3A_4. Then LA_5 and NA_6 are both perpendicular to α. Let A_7 be the foot of the perpendicular from M to α. Then A_7 is the midpoint of A_5A_6, and hence of A_2A_3 and of A_1A_4. Now $A_7A_1 \cdot A_7A_2 = A_7A_4 \cdot A_7A_3$. Hence A_7 has equal power with respect to both circles, and lies on their radical axis ℓ. Let β and γ be two other lines which cut the circle in equal segments. Then the feet of the perpendicular from M to both lines also lie on ℓ. It follows that ℓ is the Simson line with respect to M of the triangle formed by α, β and γ. Hence M lies on the circumcircle of this triangle.



International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior P-Level Paper **Fall 2007**

1 [**1**] (from The Good Soldier Švejk) Senior military doctor Bautze exposed *abccc* malingerers among *aabbb* draftees who claimed not to be fit for the military service. He managed to expose all but one draftees. (He would for sure expose this one too if the lucky guy was not taken by a stroke at the very moment when the doctor yelled at him "Turn around !. . . ") Now many malingerers were exposed by the vigilant doctor?

Each digit substitutes a letter. The same digits substitute the same letters, while distinct digits substitute distinct letters.

Solution Problem is equivalent to: $aabbb = abccc + 1$,

Then, $c = 9$ (otherwise, nothing is carried out to the second digit); therefore, $b = 0$ and $a = 1$.

2 [**2**] Let us call a triangle "almost right angle triangle" if one of its angles differs from 90° by no more than 15°. Let us call a triangle "almost isosceles triangle" if two of its angles differs from each other by no more than 15°. Is it true that that any acute triangle is either "almost right angle triangle" or "almost isosceles triangle"?

Answer: Yes, it is true.

Solution. Let $a \geq b \geq c$ be angles of a triangle. Let us assume that a triangle in not "almost isosceles". Then $a - b > 15°$ and $b - c > 15°$ (so $a - c > 30°$). Then $180° = a + b + c < a + a + 15° + a + 30°$ or $3a > 225°$; so $a > 75°$. That implies that the triangle is "almost right angle triangle".

3 [**2**] A triangle with sides a, b, c is folded along a line ℓ so that a vertex C is on side c. Find the segments on which point C divides c, given that the angles adjacent to ℓ are equal.

Solution. Let ABC be a given triangle. It is clear that the folding along line is equivalent to the mirror reflection with respect to this line. Let point C' (on side AB) be an image of vertex C under mirror reflection with respect to line ℓ; thus, CC' is perpendicular to ℓ. Let M and N be points of intersection of ℓ with sides AC and CB respectively. Since angles adjacent to ℓ are equal then $\angle CMN = \angle CNM$ and triangle CMN is isosceles. Therefore, line CC' is an altitude of isosceles triangle. Then, CC' is also a bisector of $\angle C$. By a property of bisector we have $AC'/C'B = AC/CB$ or $AC' - (c - AC') = b/a$ and we get $C'B = ac/(a + b)$.

4 [**3**] From the first 64 positive integers are chosen two subsets with 16 numbers in each. The first subset contains only odd numbers while the second one contains only even numbers. Total sums of both subsets are the same. Prove that among all the chosen numbers there are two whose sum equals 65.

Solution. Let us pair the first 64 positive integers: $(i, 65 - i)$. It is easy to see that we have one-to-one correspondence between all odd and all even numbers of $\{1, \ldots, 64\}$. Let us pick up any $F \subset \{1, 3, \ldots, 63\}$ consisting of 16 numbers. Let us also pick up any $S \subset \{2, 4, \ldots, 64\}$

consisting of 16 numbers. If we do not want any element of S be paired with some element of F, then it it easy to see that S is uniquely defined by choice of F.

So, let $F = \{f_1, \dots, f_{16}\}$ and $S = \{s_1, \dots, s_{16}\}$. It is clear that $s_j \subset S$ if and only if $65 - s_j \notin F$. Therefore, to get the sum $\bar{s} = s_1 + \dots + s_{16}$ we need to sum up $65 - k_j$ (k_j odd and $k_j \notin F$). Thus, we get $65 \cdot 16 - \sigma + \bar{f}$ where $\sigma = 1 + 3 + 5 + \dots + 63 = 32^2$ and $\bar{f} = f_1 + f_2 + \dots + f_{16}$. So, $\bar{s} = 65 \cdot 16 - 32^2 + \bar{f} = 16 + \bar{f} \neq \bar{f}$. Contradiction.

5 [**4**] Two players in turns color the squares of a 4×4 grid, one square at the time. Player loses if after his move a square of 2×2 is colored completely. Which of the players has the winning strategy, First or Second?

Solution. Second Player has a strategy. On each move of First Player, Second Player corresponding move is two squares down (or two squares up) in the same column. It is easy to see that if First Player has a move, so does Second Player.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior P-Level Paper **Fall 2007.**

1 [**1**] A straight line is colored with two colors. Prove that there are three points A, B, C of the same color such that $AB = BC$.

Solution. Consider any two points of the same color; say white, W and W'; let $2d$ be the distance between them and W' be to the right of W. Consider two new points, on the distance $2d$ to the left of W and $2d$ to the of right of W'. Both of them must be black; otherwise, the problem is solved. Now, consider a midpoint between W and W'. It must be black as well; otherwise, the problem is solved. However, in this case this midpoint is equidistant from both black points. The statement is proven.

2 [**2**] A student did not notice multiplication sign between two three-digit numbers and wrote it as a six-digit number. Result was 7 times more that it should be. Find these numbers.

Solution. Problem is equivalent to find two 3-digit numbers u, v, so that $1000u + v = 7u \times v$. Therefore, $u = v/(7v - 1000)$. Since $100 \geq u \geq 999$ then $100 \geq v/(7v - 1000) \geq 999$. Solving the last inequality we get $v = 143$. Then we find corresponding $u = 143$.

3 [**3**] Two players in turns color the squares of a 4×4 grid, one square at the time. Player loses if after his move a square of 2×2 is colored completely. Which of the players has the winning strategy, First or Second?

Solution. Second Player has a strategy. On each move of First Player, Second Player corresponding move is two squares down (or two squares up) in the same column. It is easy to see that if First Player has a move, so does Second Player.

4 [**3**] There three piles of pebbles, containing 5, 49, and 51 pebbles respectively. It is allowed to combine any two piles into a new one or to split any pile consisting of even number of pebbles into two equal piles. Is it possible to have 105 piles with one pebble in each in the end?

Answer: it is not possible.

Solution. It is clear that the first operation can be one of the following:

a). Combining 5 and 49;

b). Combining 5 and 51;

c). Combining 49 and 51.

Let us consider case a). After the first opearation is applied we have two piles: 54 and and 51. Note, that both piles are multiple of 3. If a number is multiple of 3 then dividing it by 2 (coprime with 3) results in a number that is multiple of 3. Adding two numbers multiple of 3 results in a number that is multiple of 3. Therefore, no matter which operation we apply from now on we can get only piles that all are multiple of 3. But 1 is not a multiple of 3. Therefore, in case a) it is impossible to get piles with one pebble in each.

Cases b) and c) are dealt in similar way (piles in case b are multiple of 7 while in case c are multiple of 5).

5 [**4**] Jim and Jane divide a triangular cake between themselves. Jim choses any point in the cake and Jane makes a straight cut through this point and choses the piece. Find the size of the piece that each of them can guarantee for himself/herself (both of them want to get as much as possible).

Answer. Jim can guarantee for himself 4/9 of the cake while Jane can guarantee 5/9.

Solution. Jim chooses a point of intersections of medians of the triangle (centroid). It is easy to prove that if Jane makes parallel cut to a side (any side) then she get exactly 5/9 of the cake. If the cut is not parallel then she gets less (to the trapezoid we had in previous case one triangle is added while the other is subtracted; compare the areas of these triangles). Jim can not get more by choosing any other point. If it was the case, Jane can always make a cut parallel to one of the sides (so to choose a trapezoid with centroid in it) and have more than 5/9.