27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 16. октобар 2005. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Дат је троугао ABC. Тачке M_1, M_2, M_3 су средишта страница AB, BC и AC, а тачке H_1, H_2 и H_3 су подножја висина на те исте странице. Докажите да дужи H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 могу бити странице једног троугла.

2. (3 поена) У сваком темену коцке записан је по један број. Уместо сваког броја записујемо аритметичку средину бројева који стоје на три суседна темена (бројеве замењујемо истовремено). После 10 таквих операција у сваком темену појавиће се почетни број. Да ли су обавезно сви полазни бројеви били једнаки?

3. (4 поена) Јединична дуж подељена је на 11 дужи (одсечака) тако да дужина ни једне од њих није већа од a. За које вредности a можемо тврдити да се од било које три тако настале дужи може образовати троугао?

4. (4 поена) Једна шаховска фигура може да се помери на 8 или 9 поља хоризонтално или вертикално. Није дозвољено да на исто поље стане два пута. Који је највећи број поља на које таква шаховста фигура може да стане на табли 15×15? (Кретање може започети са ма којег поља табле.)

5. (5 поена) Међу 6 новчића налази се један дефектан (разликује се од осталих по тежини, али је његова тежина, као и тежина исправног новчића, непозната). Како са 3 мерења на теразијама са теговима (које показују укупну тежину новчића који су на њима) наћи дефектан новчић?

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 16. октобар 2005. год.

10−11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Могу ли се два тачна куба сместити међу два суседна тачна квадрата? Другим речима, има ли решење у скупу целих бројева неједначина:
$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

2. (3 поена) Дата је дуж дужине $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Може ли се само помоћу шестара и лењира (без поделака) конструисати дуж дужине 1.

3. (4 поена) Међу 6 новчића налази се један дефектан (разликује се од осталих по тежини, али је његова тежина, као и тежина исправног новчића, непозната). Како са 3 мерења на теразијама са теговима (које показују укупну тежину новчића који су на њима) наћи дефектан новчић?

4. Над страницама правоуглог троугла ABC са спољашње стране конструисани су квадрати са центрима D, E и F. Докажите да је однос површина троуглова DEF и ABC:

(2 поена) **а)** већи од 1;

(2 поена) **б)** није мањи од 2.

5. (5 поена) На равни се налазила коцка. Њу су преврнули неколико пута (преко ивице) тако да се коцка поново нашла на полазном месту с истом горњом страном. Да ли се при томе горња страна могла окренути за 90^0 у односу на свој почетни положај?

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 23. октобар 2005. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) *Палиндром* – то је природан број који се једнако чита слева на десно и сдесна на лево. (На пример: 1, 343, 2002 су палиндроми, а 2005 није.) Могу ли се наћи 2005 парова облика $(n, n+110)$, где су оба броја палиндроми?

2. (5 поена) Продужеци страница AB и CD конвексног четвороугла ABCD секу се у тачки K. Зна се да је AD=BC. Нека су M и N средишта страница AB и CD. Докажите да је троугао MNK тупоугли.

3. (6 поена) На сваком пољу шаховске табле у почетку се налази топ. Сваким потезом можемо уклонити са табле топа који туче непаран број топова. Који је највећи број топова које можемо уклонити са табле? ? (Топови туку један другог ако стоје на истој вертикали или хоризонтали и међу њима нема других топова.)

4. По ивици (рубу) многоугаоног стола шетају два мрава. Свака ивица стола дужа је од 1 m, а растојање међу мравима увек је 10 cm. У почетку су оба мрава на истој ивици стола.

а) (2 поена) Нека је сто конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да се у свакој тачки ивице нађе сваки од њих?

б) (4 поена) Нека сто није обавезно конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да на рубу нема тачака у којима се није нашао ни један мрав?

5. (7 поена) Наћи највећи природан број N за који једначина

$$99x+100y+101z=N$$

има јединствено решење у скупу природних бројева ($x, y, z \in N$).

6. (8 поена) Тетка Смиља је припремила 1000 теглица џема за свог сестрића Косту. Теглице нису обавезно једнаке, али се зна да у свакој има не више од 1/100 укупне количине џема . За доручак Коста једе исту количину џема из било којих 100 теглица. Докажите да Коста може за одређени број доручака појести сав џем.

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 23. октобар 2005. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) За које n можемо наћи различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такве да збир $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_n}{a_1}$ буде цео број?

2. По ивици (рубу) многоугаоног стола шетају два мрава. Свака ивица стола дужа је од 1 m, а растојање међу мравима увек је 10 cm. У почетку су оба мрава на истој ивици стола.

а) (2 поена) Нека је сто конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да се у свакој тачки ивице нађе сваки од њих?

б) (4 поена) Нека сто није обавезно конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да на рубу нема тачака у којима се није нашао ни један мрав?

3. (5 поена) На сваком пољу шаховске табле у почетку се налази топ. Сваким потезом можемо уклонити са табле топа која туче непаран број топова. Који је највећи број топова које можемо уклонити са табле? (Топови туку један другог ако стоје на истој вертикали или хоризонтали и међу њима нема других топова.)

4. (6 поена) На кружници је распоређено неколико позитивних бројева од којих ни један није већи од 1. Доказати да је такву кружницу могуће поделити на три лука, тако да се збирови бројева на суседним луковима разликују за не више од 1. (Напомена: Ако на луку нема бројева, сматра се да је на њему збир једнак нули.)

5. (7 поена) У троуглу ABC дужи AA_1, BB_1 и CC_1 су бисектрисе. Зна се да се величине углова A, B и C односе као 4:2:1. Докаказати да је $A_1B_1=A_1C_1$.

6. (8 поена) На табли је могуће или написати две јединице, или обрисати ма која два већ написана једнака броја n и уместо њих написати бројеве $n+1$ и $n-1$. Колико најмање таквих операција треба извршити да би се добио број 2005? (У почетку је табла била чиста.)

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 19. фебруар 2006. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) У троуглу ABC угао A износи 60°. Симетрала странице AB сече праву AC у тачки N. Симетрала странице AC сече праву AB у тачки M. Докажите да је CB=MN.

2. (3 поена) Таблица $n\times n$ попуњена је по правилу: у поља првог ступца уписане су 1, у поља другог ступца 2, …, у поља n-тог ступца n. Бројеви на дијагонали од левог горњег до десног доњег угла су обрисани. Докажите да је збир бројева на једној страни од те дијагонале тачно два пута већи од збира бројењва са друге стране дијагонале.

3. (4 поена) Дат је позитиван број a. Зна се да неједначина $1 < xa < 2$ има тачно 3 решења по x у скупу целих бројева. Колико решења x у скупу целих бројева може имати неједначина $2 < xa < 3$? Пронађите све могућности.

4. Ана, Бора и Вита седе за округлим столом и једу орахе. У почетку су сви ораси били код Ане. Она их подједнако дели Бори и Вити, а остатак, ако га има, она поједе. Затим се све понавља: сваки следећи (у смеру кретања казаљке на сату) дели орахе које има код себе подједнако суседима, а остатак, ако га има, поједе. Ораха има много (више од 3). Докажите:

а) (3 поена) да ће бар један орах бити поједен;

б) (3 поена) да неће бити поједени сви ораси.

5. Пеђа има n^3 белих коцкица $1\times1\times1$. Он жели да од њих сложи коцку $n\times n\times n$ која ће бити споља сасвим бела. Колики најмањи број страна коцкица треба Васа да обоји неком другом бојом да би онемогућио Пеђу да сложи коцку? Решите задатак ако је:

а) (2 поена) n=2;

б) (4 поена) n=3.

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 19. фебруар 2006. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. Имамо конвексан полиедар са 100 ивица. Сва његова темена смо одрезали равнима-ножевима (маказама) близу самих темена (тј. тако да се те равни-ножеви не секу унутар или на граници полиедра). Нађите код добијеног полиедра:

а) (1 поен) број темена;

б) (2 поена) број ивица.

2. (3 поена) Могу ли се наћи функције $p(x)$ и $q(x)$, такве да је $p(x)$ парна функција, а $p(q(x))$ непарна функција (која није идентички једнака 0)?

3. (4 поена) Дат је позитиван број a. Зна се да неједначина $10 < a^x < 100$ има тачно 5 решења по x у скупу природних бројева. Колико решења по x у скуп природних бројева може имати неједначина $100 < a^x < 1000$? Пронађите ссве могућности.

4. (5 поена) Нека ABCD тетивни четвороугао и AB=AD. На страници BC узета је тачка M, а на страници CD тачка N, тако да је угао MAN једнак половини угла BAD. Докажите да је MN=BM+ND.

5. Пеђа има n^3 белих коцкица $1\times1\times1$. Он жели да од њих сложи коцку $n\times n\times n$ која ће бити споља сасвим бела. Колики најмањи број страна коцкица мора Васа да обоји неком другом бојом да би онемогућио Пеђу да сложи коцку? Решите задатак ако је:

а) (3 поена) n=3;

б) (3 поена) n=1000.

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 26. фебруар 2006. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) На билијарском столу који има облик правоугаоника 2×1, у угловима и на средиштима већих страна распоређени су отвори (рупе). Који је најмањи број кугли које се могу распоредити у унутрашњости правоугаоника, тако да се свака рупа налази на истој линији са неким двема куглама? (Рупе и кугле сматрамо тачкама.)

2. (4 поена) Докажите да је могуће наћи 100 парова целих бројева, таквих да у десетичном запису сваког броја све цифре нису мање од 6, а да је производ бројева сваког пара, број чије све цифре нису мање од 6.

3. (5 поена) Дат је оштроугли троугао ABC. Над страницама AB и BC са спољашње стране конструисана су два једнка правоугаоника ABMN и LBCK, таква да је AB=LB. Докажите да се праве AL, CM и NK секу у једној тачки.

4. (5 поена) Постоји ли природан број n, такав да десетични запис броја 2^n почиње цифром 5, а десетични запис броја 5^n почиње цифром 2?

5. (6 поена) У таблици 2005×2006 распоређени су бројеви 0, 1 и 2 тако да збир бројева у свакој врсти и збир бројева у свакој колони буде дељив са 3. Који је највећи број јединица које могу бити у тој таблици?

6. (7 поена) Криволинијски многоугао је многоугао чије су странице лукови кружнице. Да ли постоје криволинијски многоугао P и тачка A на његовој граници, тако да свака права која пролази кроз тачку A дели обим многоугла P на два дела једнаке дужине?

7. Јура и Јаша имају по један примерак једне исте таблице 5×5 са квадратном мрежом, попуњене са 25 различитих бројева. Јура бира највећи број у таблици, затим прецртава и врсту и колону у којој се тај број налази, затим бира највећи од преосталих бројева, прецртава и врсту и колону у којој се он налази, итд. Јаша поступа аналогно, али он бира најмањи од бројева из таблице. Може ли се догодити да збир бројева које је изабрао Јаша буде:

а) (6 поена) већи од збира бројева које је изабрао Јура?

б) (2 поена) већи од збира било којих 5 бројева из дате таблице, али који задовољавају услов: никоја два од њих не припадају истој врсти нити истој колони?

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 26. фебруар 2006. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) Дат је конвексан 100-угао. Докажите да је могуће уочити 50 тачака у унутрашњости тог многоугла, таквих да свако теме многоугла буде на правој која је одређена двема од уочених тачака.

2. (5 поена) Постоје ли цели позитивни бројеви n и k, такви да десетични запис броја 2^n почиње бројем 5^k, а десетични запис броја 5^n почиње бројем 2^k?

3. (5 поена) Дат је полином $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Докажите да сваки цео позитиван степен тог полинома има бар један негативан коефицијент.

4. (6 поена) У троуглу ABC повучена је бисектриса AA′ угла A, на одсечку AA′ изабрана је тачка X. Права BX сече AC у тачки B′, а права CX сече AB у тачки C′. Дужи A′B′ и CC′ секу се у тачки P, а дужи A′C′ и BB′ секу се у тачки Q. Докажите да су углови PAC и QAB једнаки.

5. (6 поена) Докажите да је могуће наћи бесконачно много парова целих бројева, тако да у десетичном запису сваког од њих све цифре буду не мање од 7, а да производ бројева сваког пара такође буде број чије су све цифре не мање од 7.

6. На кружници се налази 12 скакаваца у различитим тачкама. Те тачке деле кружницу на 12 лукова. На дати знак сви скакавци истовремено скачу у смеру казаљке на сату, сваки из краја свог лука до средишта лука. Тако настаје нових 12 лукова и онда се све понавља. Може ли се бар један скакавац вратити у своју полазну тачку пошто је учинио

а) (4 поена) 12 скокова;

б) (3 поена) 13 скокова?

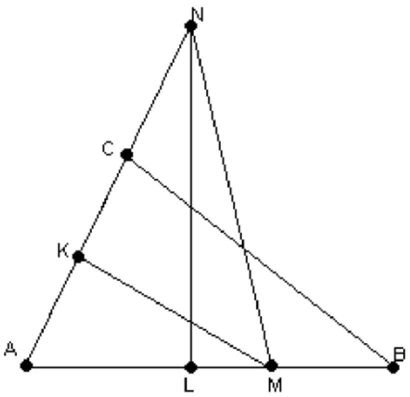
7. (8 поена) Мрав хода по затвореној маршрути по ивицама додекаедра, никад се не враћајући назад. Маршрута мрава пролази тачно два пута по свакој ивици. Докажите да ће неку ивицу мрав оба пута прећи у истом смеру. (**Напомена**: Додекаедар има 20 темена, 30 ивица и 12 једнаких страна у облику петоугла, а у сваком темену сустичу се три стране)

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур

8 - 9 классы, тренировочный вариант

Решения задач



1. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямую AC в точке N. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую AB в точке M. Докажите, что $CB=MN$. *(Р.Г.Женодаров)*

Решение. По свойству серединного перпендикуляра $NA=NB$, откуда треугольник ANB равнобедренный. Угол A при его основании равен 60°, поэтому треугольник ANB равносторонний. Отсюда $AN=AB$. Точно так же, треугольник AMC равносторонний, и $AM=AC$. Треугольники ACB и AMN равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $BC=MN$.

2. Таблица $n\times n$ заполнена по правилу: в клетках первого столбца записаны 1, в клетках второго – 2, ... , в клетках n-го – n. Числа на диагонали, соединяющей левое верхнее число с правым нижним, стерли. Докажите, что суммы чисел по разные стороны от этой диагонали отличаются ровно в два раза. *(С.А.Зайцев)*

Решение 1. Сравним для каждой клетки на диагонали сумму чисел *слева* от нее и сумму чисел *над* ней. Если клетка стоит на пересечение k-ой строки и k-го столбца, то сумма слева равна $1+2+...+(k-1)=k(k-1)/2$ (сумма арифметической прогрессии), а сумма над ней равна $k(k-1)$, то есть ровно вдвое больше. Значит и сумма всех чисел над диагональю в два раза больше суммы всех чисел слева от нее.

Решение 2.

	2	3	4	...	n
1		3	4	...	n
1	2		4	...	n
1	2	3		...	n
...	...	...	...	...	...
1	2	3	4	...	

В исходной таблице (рис. слева) у нас под диагональю есть n-1 единица, n-2 двойки, n-3 тройки и т.д. Вычтем теперь из каждого числа над диагональю симметричное ему относительно диагонали число под диагональю. Получится таблица слева. В ней над диагональю на параллельных меньших дагоналях стоят одинаковые числа: n-1 единица, n-2 двойки, n-3 тройки и т.д. В целом мы уменьшили верхнюю сумму на нижнюю и получили в результате нижнюю сумму. Значит, верхняя сумма была вдвое больше нижней.

	1	2	3	...	n–1
1		1	2	...	n–2
1	2		1	...	n–3
1	2	3		...	n–4
...	...	...	...	...	...
1	2	3	4	...	

Решение 3.

	2	3	4	...	n
1		3	4	...	n
1	2		4	...	n
1	2	3		...	n
...	...	...	...	...	...
1	2	3	4	...	

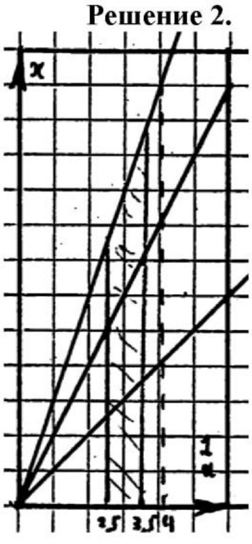
Вычтем нижнюю сумму из верхней и покажем, что останется нижняя. Из i-ой строки верхней суммы вычтем i-ый столбец нижней. i-ая строка верхней суммы имеет вид i+1, i+2, …, n-1, n, а i-ый столбец нижней суммы имеет вид i, i, …, i. Соответственно после вычитания получаем строку 1, 2, …, n-i, что соответствует (n–i+1)-ой строке нижней суммы. Сделав вычитание для всех i получим нижнюю сумму. Значит, верхняя сумма была вдвое больше нижней.

3. Дано положительное число a. Известно, что неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах x. Сколько решений в целых числах x может иметь неравенство $2 < xa < 3$? Укажите все возможности. *(А.К.Толпыго)*

Ответ. 2, 3 или 4 решения.

Решение 1. Первое неравенство равносильно $1/a < x < 2/a$. На интервале $(1/a\ ,\ 2/a)$ лежат три целые точки. Они разбивают его на два промежутка длины 1 и еще два промежутка по краям, каждый длины не более 1. Поэтому для длины интервала $(1/a\ ,\ 2/a)$ выполнено неравенство: $2<1/a\le 4$. Аналогично, если на некотором интервале длины t лежит k целых точек, то выполнено неравенство $k-1<t\le k+1$. Это равносильно неравенству $t-1\le k<t+1$. Второй интервал $(2/a\ ,\ 3/a)$ имеет ту же длину. Подставляя $t=1/a$ и учитывая неравенства для $1/a$, получаем $1<1/a-1\le k<1/a+1\le 5$, то есть k=2,3 или 4. Все три случая реализуются: k=2 при $a={}^3/_8$ (x=6 и7); k=3 при $a={}^1/_4$ (x=9, 10 и 11); k=4 при $a={}^5/_{17}$ (x=7, 8, 9 и 10).

Решение 2.



Эту задачу можно решить и графически. Приводим набросок такого решения (все видно из внимательного рассмотрения графика). Неравенства из условия можно переписать в виде $1/a < x < 2/a$ и $2/a < x < 3/a$. На координатной плоскости по вертикальной оси будем отмечать x, а по горизонтальной – 1/a. Проведем три прямые: x=1/a, x=2/a, x=3/a. Из графика видно, что нам подходят значения 1/a, принадлежие интервалу (2,5 , 3), или интервалу (3 , 3,5], а также подходит значение 1/a=4. Соответственно целых решений может быть 2,3 или 4.

4. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток (если он есть) съедает. Орехов много (больше 3).
Докажите, что:

a) хотя бы один орех будет съеден;

b) не все орехи будут съедены. *(М.Н.Вялый)*

а). Решение 1. Пусть сначала у Ани всего a орехов. Предположим, что съедания не происходит. Запишем первые несколько шагов:

	Аня	Боря	Витя
Начало	a	0	0
1 шаг	0	$a/2$	$a/2$
2 шаг	$a/4$	0	$3a/4$
3 шаг	$5a/8$	$3a/8$	0

Заметим, что после n-го шага у одного из ребят 0 орехов, а у двух других число орехов имеет вид $xa/2^n$ и $ya/2^n$, где x и y нечетны. Это утверждение легко доказать: если оно верно для n-го шага, то на следующем шаге количества орехов будут равны 0, $xa/2^{n+1}$ и $(2y+x)a/2^{n+1}$, где числа x и $2y+x$ тоже нечетны, то есть утверждение снова верно. Поскольку оно верно для первого шага, то по доказанному верно и для второго, а значит и для третьего, и аналогично для всех остальных. Но поскольку каждый раз у каждого из ребят целое число орехов, число a должно делится на 2^n при любом натуральном n, что невозможно. Значит, на каком-то шаге съедание произойдет.

Решение 2. Если изначально число орехов нечетно, то орех будет съеден при первой дележке. Если число орехов четно, то последим за наибольшей степенью двойки, которая делит число орехов (назовем это *показателем числа*). Показатель нечетного числа равен 1. При сложении двух чисел с разными показателями показатель суммы равен наименьшему из показателей (например, показатель 10 равен 2, показатель 40 равен 8, показатель 50=10+40 равен 2).

Итак, пусть общее число орехов четно, то есть показатель общего числа орехов равен $n>1$. Покажем, что с каждой дележкой без поедания уменьшается показатель числа орехов в кучке, которую делят. Ясно, что при первой дележке он уменьшится вдвое. Далее, если кто-то делит четное число орехов с показателем $m<n$, то он раздает двум другим по числу с показателем $m/2$. У того, кто делил перед этим, орехов не было, поэтому у него окажется число с показателем $m/2$. А какой показатель окажется у другого? Если бы он оказался больше $m/2$, то у суммы орехов показатель был бы равен $m/2$ (как наименьшему из двух показателей). Но на самом-то деле показатель суммы равен n, поскольку общее число орехов не меняется. Значит, и у другого показатель не более $m/2$. А именно ему и предстоит делить. Итак, рано или поздно показатель опустится до 1, придется делить нечетное число орехов, и орех будет съеден.

Решение 3. Пусть число орехов у делящего a, а у следующего за ним b. Если поедания не происходит, то у очередного делящего будет $a'=b+a/2$ орехов, а у следующего за ним $b'=a/2$ орехов. Заметим, что $|a'-2b'|=\dfrac{|a-2b|}{2}$. То есть такая разность каждый раз делится на два, но при этом должна останется целой. Это невозможно, поэтому съедание произойдет.

б) Если орехов всегда больше 3, все доказано. Иначе рассмотрим момент, когда впервые останется ровно 3 ореха. В любой момент, кроме начального, орехи есть ровно у двоих; при этом у того, кто делит, орехов не меньше, чем у следующего, а у предыдущего их нет совсем. Поэтому при трех орехах у делящего их обязательно 2. Значит, при трех орехах поедания не происходит.

5. У Пети есть n^3 белых кубиков $1\times1\times1$. Он хочет сложить из них куб $n\times n\times n$, снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков может Вася закрасить, чтобы помешать Пете? Решите задачу, если **а)** $n=2$; **б)** $n=3$. *(Р.Г.Женодаров)*

Ответы. а) 2 грани. **б)** 12 граней.

а). Решение. Одной закрашенной грани, очевидно, не хватит. Достаточно, однако, закрасить в каком-то кубике две противоположные грани: при складывании куба $2\times2\times2$ одна из них всегда окажется снаружи.

б). Решение 1. Достаточно закрасить все грани двух кубиков: ведь при складывании куба $3\times3\times3$ полностью спрятать можно только один кубик.
Покажем, как Пете справиться с заданием при 11 или менее закрашенных гранях. В этом случае максимум один кубик может быть окрашен полностью, и максимум 5 кубиков могут иметь не менее двух окрашенных граней. Сперва выберем кубик с наибольшим числом закрашенных граней на роль центра куба. Среди оставшихся кубиков нет полностью окрашенного, значит, все они годятся на роль центрального кубика грани. Отберем на эту роль 6 кубиков с наибольшим числом закрашенных граней. Теперь у нас не останется кубиков с двумя или более закрашенными гранями. Поэтому остальные кубики годятся при постороении большого куба на любую роль: уж одну окрашенную грань спрятать всегда можно.

б). Решение 2. Достаточно закрасить полностью два кубика. Пусть закрашено 11 граней. Красить у кубика одну грань бесполезно: ее можно скрыть при любом положении кубика. Поэтому есть не более пяти кубиков с закрашенными гранями. Тот из них, у которого закрашено больше всего граней, поместим в центр большого куба, а остальные — в центры его граней, незакрашенными гранями наружу. Последние у всех кубиков, помещенных в центры граней, найдутся, потому что полностью закрашенный кубик может быть только один (и если он есть, то окажется в центре).

10 - 11 классы, тренировочный вариант

Решения задач

1. Имеется выпуклый многогранник со 100 ребрами. Все его вершины срезали плоскостями-ножами близко от самих вершин (то есть так, чтобы плоскости-ножи не пересекались друг с другом внутри или на границе многогранника). Найдите у полученного многогранника
а) число вершин;
б) число ребер. *(Г.А.Гальперин)*

Ответ. а) 200; **б)** 300.

Решение. Заметим, что на каждом ребре исходного многогранника лежат две вершины полученного, причем из каждой вершины полученного многогранника выходит по три ребра. Следовательно в полученном многограннике $2\cdot100=200$ вершин и $\frac{200\cdot3}{2}=300$ ребер.

2. Найдутся ли такие функции *p(x)* и *q(x)*, что *p(x)* – четная функция, а *p(q(x))* – нечетная функция (отличная от тождественно нулевой)? *(А.Д.Блинков, В.М.Гуровиц)*

Ответ. Да, найдутся.

Решение. Рассмотрим функции $p(x)=\cos x$ и $q(x)=\frac{\pi}{2}-x$

Очевидно, $p(x)$ – четная функция, а $p(q(x))=\sin x$ – нечетная.
Задача имеет много других решений.

3. Дано положительное число a. Известно, что неравенство $10<a^x<100$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах x. Сколько решений в натуральных числах x может иметь неравенство $100<a^x<1000$? Укажите все возможности. *(А.К.Толпыго)*

Ответ. 4,5 или 6.

Решение. Пусть $a=10^b$. Неравенство $10<a^x<100$ можно переписать как $10<10^{bx}<100$ или, что то же самое $1<bx<2$, аналогично перепишем $100<a^x<1000$ как $2<bx<3$. Если n - наименьшее натуральное решение $1<bx<2$, то $b(n-1)<1<bn$ и $b(n+4)<2<b(n+5)$. Сложив первое из этих неравенств с самим собой и со вторым, получим соответственно $b(2n-2)<2<b(2n)$ и $b(2n+3)<3<b(2n+5)$, откуда следует, что неравенство $2<bx<3$ имеет от 4 до 6 натуральных решений ($2n,..,2n+3$ всегда являются решениями, а $2n-1$ и $2n+4$ могут не являться). Покажем, что, в зависимости от b, все три варианта возможны (здесь выписаны все натуральные решения неравенств $1<bx<2$ и $2<bx<3$).

$b=\frac{5}{23}$; решения первого неравенства - 5, 6, 7, 8, 9, решения второго - 10, 11, 12, 13.

$b=\frac{5}{26}$; решения первого неравенства - 6, 7, 8, 9, 10, решения второго - 11, 12, 13, 14, 15.

$b=\frac{5}{27}$; решения первого неравенства - 6, 7, 8, 9, 10, решения второго -11, 12, 13, 14, 15, 16.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, $AB=AD$. На стороне BC взята точка M, а на стороне CD - точка N так, что угол MAN равен половине угла BAD. Докажите, что $MN=BM+ND$. *(М.И.Малкин)*

Решение 1. Точку B симметрично отразим относительно AM, получаем точку R. Точку D симметрично отразим относительно AM, получаем ту же самую точку R (поскольку $AD=AB$ и угол MAN равен сумме углов NAD и MAB). Так как ABCD – вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180°, а значит и сумма углов ARM и ARN равна 180°, откуда MRN – прямая. Поэтому $BM+ND=MR+NR=MN$.

Решение 2. Повернем мысленно треугольник MAB вокруг точки A так, чтобы сторона AB совместилась со стороной AD. Обозначим через M' точку, в которую перешла бы точка M при таком повороте. Так как ABCD – вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180°, а значит и сумма углов ADN и ADM' равна 180°, откуда $M'DN$ – прямая. Треугольники NAM' и NAM равны по первому признаку (углы NAM и $M'AN$ равны, так как угол MAN равен сумме углов NAD и MAB, AN – общая сторона, AM и AM' равны по построению). Поэтому $MN=M'N=ND+DM'=ND+BM$.

5. У Пети есть n^3 белых кубиков $1\times1\times1$. Он хочет сложить из них куб $n\times n\times n$, снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков может Вася закрасить, чтобы помешать Пете? Решите задачу, если **а)** $n=3$; **б)** $n=1000$.

(Р.Г.Женодаров)

Ответ. а) 12; **б)**1999999986.

Замечание: В кубе $n\times n\times n$ 8 угловых кубиков имеют три наружных грани, $12(n-2)$ примыкающих к ребрам – две наружных грани, $6(n-2)^2$ - одну наружную грань, остальные кубики наружных граней не имеют. Чтобы Петя не смог поместить кубик в угол, Васе надо покрасить как минимум 2 его грани (противоположные). Чтобы кубик нельзя было поместить на ребро (не в угол) – как минимум 4 грани (кроме двух противоположных). Чтобы кубик нельзя было поместить на грань (не на ребро), надо обязательно красить все 6 граней кубика.

а). Решение. В случае n=3 Васе достаточно покрасить полностью два кубика (12 граней), чтобы помешать Пете, так как одна из этих граней обязательно окажется снаружи. Если Вася покрасил не более 11 граней, то Петя сможет выбрать 8 кубиков, у которых покрашено не более одной грани (иначе покрашенных граней не менее 2*(27-7)=40), далее выбрать 12 кубиков, у которых покрашено не более 3 граней (4*(27-8-11)=32>11), и 6 кубиков, у которых покрашено не более 5 граней (6*(27-8-12-5)=12>11). После этого Петя сможет поместить эти кубики в углы, ребра и середины граней соответственно так, чтобы все покрашенные грани оказались внутри.

Другое решение смотрите в тренировочном варианте младших классов, задача 5б.

б). Решение 1. В случае n=1000 Васе достаточно покрасить по две противоположных грани у 1000^3-7 кубиков, т.е. всего 1999999986 грани. При этом одна из внешних граней какого-нибудь углового кубика обязательно окажется покрашенной, как бы ни был сложен большой куб. Если же Вася покрасил не более $2*(1000^3-7)-1=2*1000^3-15$ граней, то Петя сможет выбрать 8 из них, у которых покрашено не более одной грани ($2*(1000^3-7)> 2*1000^3-15$), далее выбрать 12*998, у которых покрашено не более 3 граней ($4*(1000^3-8-12*998+1)>2*1000^3-15$), и $6*998^2$, у которых покрашено не более 5 граней ($6*(1000^3-8-12*998-6*998^2+1)>2*1000^3-15$). После этого Петя сможет сложить из них куб, белый снаружи.

б). Решение 2. *Раскраска.* Семь кубиков оставляем чистыми, а у прочих красим по две параллельные грани. Хотя бы один из кубиков с окрашенными гранями окажется угловым. *Оценка.* Если всего окрашено менее, чем $2\times1000^3-14$ граней, кубиков, у которых окрашено не больше одной грани, будет по крайней мере 8. Сделаем их угловыми, спрятав, если надо, окрашенную грань. Кубиков, у которых окрашено не меньше 3 граней, будет не более $2\times1000^3/3 < 998^3$. Спрячем их внутрь куба с ребром 1000, а у остальных, лежащих внутри граней и на ребрах этого куба, две или одну окрашенную грань всегда можно спрятать.

8 - 9 классы, основной вариант

Решения задач

1. Бильярдный стол имеет вид прямоугольника 2×1, в углах и на серединах больших сторон которого расположены лузы. Какое наименьшее число шаров надо расположить внутри прямоугольника, чтобы любая луза находилась на одной линии с некоторыми двумя шарами? (Лузы и шары считайте точками.) *(Б.Р.Френкин)*

Ответ. 4 шара.

Решение. Пример для 4 шаров приведен на рисунке. Покажем, что 3 шаров недостаточно. Прямая, проходящая через пару шаров внутри прямоугольника, пересекает границу прямоугольника ровно в двух точках. У нас есть 6 луз, значит, нужно не менее 3 прямых. Три шара дадут три прямых только если эти прямые образуют треугольник. Однако все возможные прямые приведены на картинке, и никакие из них не образуют треугольник с вершинами внутри биллиарда.

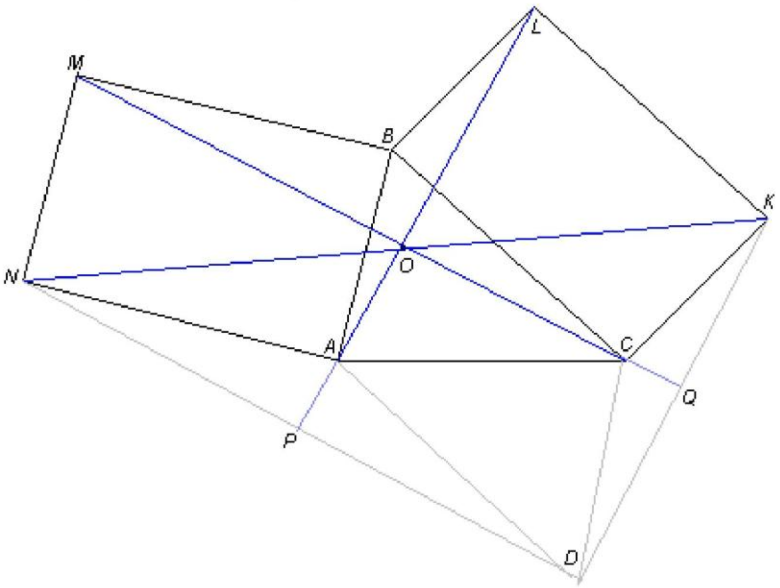
2. Докажите, что можно найти 100 пар целых чисел, так чтобы в десятичной записи каждого числа все цифры были не меньше 6, и произведение чисел каждой пары тоже было числом, где все цифры не меньше 6. *(С.И.Токарев, А.В.Шаповалов)*

Решение. Годятся все пары вида (7, 9....97), поскольку произведение равно 67...79.

3. Дан остроугольный треугольник *ABC*. На сторонах *AB* и *BC* во внешнюю сторону построены равные прямоугольники *ABMN* и *LBCK* так, что *AB*=*LB*. Докажите, что прямые *AL*, *CM* и *NK* пересекаются в одной точке. *(А.Гаврилюк)*

Решение 1. Рассмотрим окружности, описанные около данных прямоугольников. Обозначим вторую точку их пересечения через *O*. Тогда $\angle BON=\angle BOK=90°$. Значит точки *N*, *O*, *K* лежат на одной прямой, перпендикулярной *BO*. Заметим, что углы *NBA* и *LBK* равны (так как равны соответствующие треугольники). Поскольку углы, опирающиеся на одну дугу, равны, получаем тогда цепочку равенств: $\angle NOA=\angle NBA=\angle LBK=\angle LOK$, а значит точки *A*, *O*, *L* также лежат на одной прямой. Аналогично, точки *M*, *C*, *O* лежат на одной прямой. Поэтому *O* – точка пересечения этих трех прямых.

Решение 2. Построим параллелограмм *ABCD*. Тогда *ALKD* и *CDNM* – также параллелограммы. Равнобедренный ΔCBM получается из ΔABL поворотом на 90° и гомотетией, поэтому $CM \perp AL$, но тогда и $CM \perp KD$. Продолжение *MC* высота CQ в равнобедренном треугольнике *KCD* будет медианой, значит *CM* – серединный перпендикуляр к *KD*. Аналогично *AL* – серединный перпендикуляр к *ND*. Параллелограмм *OPDQ* – прямоугольник, поэтому треугольник *KDN* – прямоугольный, и серединные перпендикуляры к катетам проходят через середину его гипотенузы *KN*.



Замечание к решению 2. Перпендикулярность *AL* и *CM* можно доказать и без поворотной гомотетии, просто счетом углов. Пусть $\angle ABC=b$. В равнобедренных треугольниках *ABL* и *MBC* углы при вершине *B* равны b+90°, поэтому углы при основаниях равны 45°-b/2. Отсюда

$\angle AOC=180°-\angle OAC-\angle OCA=180°-\angle BAC-\angle BCA+2(45°-b/2)= \angle ABC+2(45°-b/2)=90°$.

4. Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа 2^n начинается цифрой 5, а десятичная запись числа 5^n начинается цифрой 2? *(Г.А.Гальперин)*

Решение. Нет. Произведение $2^n\ 5^n=10^n$. Если в записях 2^n и 5^n заменить нулями все цифры, кроме первых, каждое из чисел уменьшится, но не более чем в 2 раза. Произведение замененных чисел будет меньше 10^n, но не более чем в 4 раза, поэтому оно не будет иметь вид 10...0. Однако если бы одно из замененных чисел начиналось на 5, а другое – на 2, произведение было бы 50...0 20...0=10...0. Противоречие.

5. В таблице 2005×2006 расставлены числа 0, 1, 2 так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице? *(И.И.Богданов)*

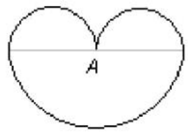
Решение. Пусть в таблице n нулей и d двоек. У нас есть 2005 строк длины 2006 и 2006 столбцов длины 2005. Чтобы сумма в строке делилась на 3, там должна быть хотя бы одна двойка или минимум два нуля. Отсюда $d+n/2\geq 2005$. Аналогично, в каждом столбце должен быть нуль либо две двойки минимум, поэтому $n+d/2\geq 2006$. Сложив неравенства и поделив на $^3/_2$, получим $n+d\geq 2674$, то есть не единиц в таблице минимум 2674.

Этот результат достигается: заменив неравенства на равенства и решив систему уравнений, найдем n=1338, d=1336. Расставим в таблице 1338 нулей горизонтальными парами, начиная с левого верхнего угла (в 669 строк и 1338 столбцов) и 1336 двоек вертикальными парами, начиная с правого нижнего угла (в 1336 строк и 668 столбцов), а остальные клетки заполним единицами (см. рис). Поскольку 669+1336=2005 и 1338+668=2006, то нули или двойки будут в каждой строке и каждом столбце, причем как раз столько, сколько нужно для делимости суммы на 3. Итак, ответ: наибольшее число единиц 2005·2006–2674=4022030.

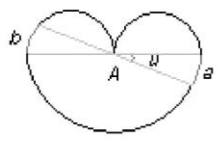
0	0	1	1	...	1	1
1	1	0	0	...	1	1
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	...	2	1
1	1	1	1	...	2	1
1	1	1	1	...	1	2
1	1	1	1	...	1	2

6. Криволинейный многоугольник - это многоугольник, стороны которого - дуги окружностей. Существуют ли такой криволинейный многоугольник P и такая точка A на его границе, что любая прямая, проходящая через точку A, делит периметр многоугольника P на два куска равной длины? *(С.В.Маркелов)*

(Другими словами: Назовем *тропинкой* замкнутую траекторию на плоскости, состоящую из дуг окружностей и проходящую через каждую свою точку ровно один раз. Существуют ли тропинка и такая точка A на ней, что любая прямая, проходящая через A, *делит тропинку пополам*, то есть сумма длин всех кусков тропинки в одной полуплоскости равна сумме длин всех кусков тропинки в другой полуплоскости.)



Решение. Как ни странно – существует, см. верхний рисунок. Возьмем произвольный отрезок с серединой A и построим на нем как на диаметре полуокружность, а по другую сторону отрезка – две полуокружности на половинках отрезка как на диаметрах. Периметр фигуры равен двум меньшим окружностям.



Ясно, что исходный отрезок делит периметр пополам. Проведем любую другую прямую через точку A под некоторым углом u (измеренным в радианах) к отрезку (см. нижний рисунок). От нижней части отнялась дуга a и прибавилась дуга b. Убедимся, что длины дуг равны. Пусть r – радиус меньшей полуокружности. Поскольку это вписанный угол, то $b=2ur$. У большей окружности радиус $2r$, зато угол – центральный, поэтому $a=u\cdot 2r$.

7. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей

а) больше суммы чисел, выбранных Юрой?

б) больше суммы любых других 5 чисел исходной таблицы, удовлетворяющих условию: никакие два из них не лежат в одной строке или в одном столбце?

(С.И.Токарев, А.Ю.Эвнин)

Решение. а) Нет, не может. Обозначим числа в порядке их выбора: Юрины – b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, Яшины – m_0, m_1, m_2, m_3, m_4. Покажем, что если $i+j<5$, то $b_i \geq m_j$. Номер равен числу строк и числу столбцов, вычеркнутых при выборе соответствующего числа. Так, при выборе b_1 были вычеркнуты одна строка и один столбец, а при выборе m_3 – 3 строки и 3 столбца. В сумме вычеркнуты максимум 4 строки и максимум 4 столбца, поэтому по крайней мере одно число a осталось невычеркнутым в обоих случаях. Юра выбирал наибольшее из невычеркнутых, поэтому $b_1 \geq a$. Яша выбирал наименьшее из невычеркнутых, поэтому $a \geq m_3$. Значит, $b_1 \geq m_3$. Аналогично, $b_0 \geq m_4$, $b_2 \geq m_2$, $b_3 \geq m_1$, $b_4 \geq m_0$. Значит, Юрина сумма не меньше Яшиной.

б) Решение 1. Да, может. Рассмотрим, например, таблицу

10000	1001	1002	1003	1004
1005	**1000**	101	102	103
1006	104	**100**	11	12
1007	105	13	**10**	2
1008	106	14	3	**1**

Здесь сумма чисел, выбранных Яшей 11111 (они выделены). Покажем, что нельзя получить больше. Действительно, если не брать число 10000, то сумма будет менее 1008*5=5040, значит надо брать 10000. Если не брать число 1000, то сумма будет менее 10000+106*4=10424, значит надо брать 1000. Если не брать число 100, то сумма будет менее 10000+1000+14*3=11042, значит надо брать. Аналогично надо брать и 10, и 1. В итоге получаем Яшины числа.

б) Решение 2. Да, может. Рассмотрим, например, таблицу

111	210	310	410	510
120	221	320	420	520
130	230	331	430	530
140	240	340	441	540
150	250	350	450	551

Будем складывать числа любой разрешенной пятерки столбиком. В разряде единиц сумма будет равна количеству чисел на диагонали. В разряде десятков сумма всегда будет 1+2+3+4+5 (эта цифра зависит только от строки, а у нас есть представитель каждой строки). Аналогично, и в разряде сотен сумма равна 1+2+3+4+5 (цифра сотен зависит только от столбца). Значит, наибольшей будет сумма, где все 5 чисел взяты с диагонали. Ясно, однако, что именно их-то Яша и выберет.

10 – 11 классы, основной вариант

Решения задач

1. Дан выпуклый 100-угольник. Докажите, что можно отметить такие 50 точек внутри этого многоугольника, что каждая вершина будет лежать на прямой, соединяющей какие-то две из отмеченных точек. *(Б.Р.Френкин)*

Решение 2. Занумеруем вершины 100-угольника по часовой стрелке: 1, …, 100. Рассмотрим 10-угольник, образованный вершинами 1, 2, 21, 22, 41, 42, 61, 62, 81, 82. Его вершины можно разместить на пяти прямых 1-22, 21-42, 41-62, 61-82, 81-2, заданных пятью точками пересечения первой прямой со второй, второй – с третьей, …, пятой – с первой (очевидно, что эти пять точек различны). Аналогично поступим с десятиуголь-

никами, номера вершин которых получаются из номеров вершин рассмотренного прибавлением чисел 2, 4, …, 18.
Задача имеет много других решений.

2. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что десятичная запись числа 2^n начинается числом 5^k, а десятичная запись числа 5^n начинается числом 2^k?

(Г.А.Гальперин)

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Если бы при каком-то натуральном n число 2^n начиналось с 5^k, а число 5^n — с 2^k, это означало бы, что $5^k\times10^s < 2^n < (5^k+1)\times10^s$ и $2^k\times10^l < 5^n < (2^k+1)\times10^l$, откуда $10^{k+l+s} < 10^n < 10^{k+l+s+1}$, что невозможно. (Последнее неравенство $10^n < 10^{k+l+s+1}$ вытекает, например, из того, что $5^k+1 < 2\times5^k$, а $2^k+1 < 5\times2^k$).

3. Дан многочлен $P(x) = x^4+x^3-3x^2+x+2$. Докажите, что любая целая положительная степень этого многочлена имеет хотя бы один отрицательный коэффициент. *(М.И.Малкин)*

Решение 1. Заметим, что для любого многочлена $P(x)$ его значение в точке x=1 - это сумма всех его коэффициентов. Поэтому в нашем случае сумма коэффициентов у многочлена $(P(x))^n$ равна $(P(1))^n = (1+1-3+1+2)^n=2^n$. Но при этом свободный член у многочлена $(P(x))^n$ равен $(P(0))^n =2^n$, а коэффициент при x^n равен 1, и в сумме уже они дают 2^n+1. Значит среди остальных коэффициентов $(P(x))^n$ есть отрицательные.

Решение 2. Член третьей степени у многочлена $(P(x))^n$ складывается из n слагаемых вида $2^{n-1}x^3$ и $n(n-1)$ слагаемых вида $-3x^2\times x\times2^{n-2}$, то есть коэффициент при x^3 у этого многочлена равен $n2^{n-1}-3n(n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(-3n^2+5n) = n2^{n-2}(-3n+5)$, то есть отрицателен при любом $n \geq 2$.

Решение 3. Заметим, что $(P(0))^n =(P(1))^n =2^n$. По теореме Лагранжа производная $Q(x)$ многочлена $(P(x))^n$ принимает значение 0 на интервале (0;1). Поскольку не все коэффициенты многочлена $Q(x)$ равны 0, у $Q(x)$ есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а значит и у $P(x)$ тоже.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'. Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны. *(М.А.Волчкевич)*

Решение. Введем обозначение: $h_M(l)$ будет означать расстояние от точки M до прямой l. Мы много раз будем пользоваться следующей несложной леммой: *если даны три луча OL, OM и ON, то для всех точек K на луче OM отношение $h_K(OL)/h_K(ON)$ одно и то же.*

Для решения задачи достаточно доказать, что $h_P(AC)/h_P(AA')= h_Q(AB)/h_Q(AA')$ (ведь равенство этих отношений как раз и означает, в силу равенства углов $A'AC$ и $A'BC$, что прямая AP проведена под таким же углом к прямой AC, как и прямая AQ к прямой AB).

По лемме верны равенства

$$h_P(BC)/h_P(AC)= h_X(BC)/h_X(AC) \quad \text{и} \quad h_Q(BC)/h_Q(AB)=h_X(BC)/h_X(AB),$$

откуда (учитывая, что $h_X(AC)= h_X(AB)$, поскольку X лежит на биссектрисе AA') получаем, что $h_P(BC)/h_P(AC)= h_Q(BC)/h_Q(AB)$.

Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что $h_P(BC)/h_P(AA')= h_Q(BC)/h_Q(AA')$.

По лемме последнее равенство равносильно такому: $h_{B'}(BC)/h_{B'}(AA')= h_{C'}(BC)/h_{C'}(AA')$.

Пусть $\angle BAC=2\alpha$. Заметим, что $h_{B'}(AB)\, h_{B'}(AA')=\sin 2\alpha/\sin\alpha = h_{C'}(AC)/h_{C'}(AA')$.

Поэтому для решения задачи достаточно доказать равенство

$$h_{B'}(BC)/h_{B'}(AB)=h_{C'}(BC)/h_{C'}(AC).$$

По лемме последнее равенство равносильно равенству

$$h_X(BC)/h_X(AB)=h_X(BC)/h_X(AC),$$

что очевидно (так как $h_X(AC)=h_X(AB)$). Задача решена.

5. Докажите, что можно найти бесконечно много пар целых чисел, так чтобы в десятичной записи каждого числа все цифры были не меньше 7, и произведение чисел каждой пары тоже было числом, где все цифры не меньше 7. *(С.И.Токарев)*

Решение 1. Годятся все пары вида (9…98877, 8…87), где в первом и втором числах поровну цифр. Их произведение, как показывает умножение «в столбик», равно 8…878887…79899, где вначале идут n–3 восьмерки, потом — 7888, потом — n–3 семерки и 9899.

Решение 2. Рассмотрим два числа: 877...7 (k-1 семёрка) и 899...9987 (k-3 девятки), тогда их произведение - это число 7899...998788...8899 (k-4 девятки и k-2 восьмёрки).

6. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый — из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т.д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано

а) 12 прыжков?

б) 13 прыжков? *(А.К.Толпыго)*

Ответ: а), б) нет, не может.

а). Решение 1. Назовем одновременные 12 прыжков кузнечиков ходом. Предположим, что один из кузнечиков (назовем его первым) вернулся в исходную точку (назовем ее A) после 12 ходов. Заметим, что порядок кузнечиков на окружности не меняется. Поэтому остальные 11 кузнечиков должны будут перепрыгнуть через точку A (хотя бы раз) до возвращения туда первого кузнечика. Но за один ход через точку A сможет перепрыгнуть не более чем 1 кузнечик, а на первом ходу через точку A не перепрыгнет ни один из кузнечиков! Поэтому за 12 ходов через точку A перепрыгнут максимум 11 кузнечиков, то есть первый еще не сможет вернуться в A. Противоречие.

а). Решение 2. Предположим противное, то есть один из кузнечиков (кузнечик №1) вернулся в исходную точку после 12 прыжков. Заметим, что данная ситуация эквивалентна следующей: на луче Ox мы размещаем бесконечное количество кузнечиков, причём сначала размещаем 12 кузнечиков просто развернув окружность в отрезок, разрезав её в том месте, где сидел кузнечик №1 (предположим, что обход окружности по часовой стрелке будет совпадать с положительным направлением оси Ox). Далее будем считать, что кузнечик находится только в левом конце отрезка (то есть в точке 0), а к правому мы прикрепим точно такой же отрезок с кузнечиками в тех же точках и т. д.(мы получили луч, с отмеченными на нём точками A_1, A_2, ...). В новой модели кузнечики прыгают в положительном направлении в середину отрезка до следующего кузнечика. В результате по нашему предположению мы получим, что первый кузнечик за 12 прыжков либо попал в точку A_13, либо выпрыгнул за пределы отрезка [A_1, A_13]. Докажем по индукции, что после n прыжков i-ый кузнечик находится в центре масс системы ((A_i, C(0, n)г), (A_i+1, C(1, n)г), ... (A_i+n, C(n, n)г) (на первом месте стоит расположение груза, на втором его масса, C(k, n)=n!/(k!*(n-k)!)) Заметим, что если в точки A_i, A_i+1 поместить грузики массы 1г, то после первого прыжка первый кузнечик попадёт в центр масс системы ((A_i, 1г), (A_i+1, 1г)), так как это и есть середина отрезка. Таким образом, база индукции проверена. Предположим, что после n прыжков i-ый кузнечик находится в центре масс системы ((A_i, C(0, n)г), (A_i+1, C(1, n)г), ... (A_i+n, C(n, n)г), а i+1ый в точке

((A_i+1, C(0, n)г), (A_i+2, C(1, n)г), ... (A_i+n+1, C(n, n)г), тогда середина отрезка, их соединяющего имеет те же координаты, что и центр масс системы ((Ц.М.((A_i,C(0,n)г),..(A_i+n,C(n,n)г),1г),(Ц.М.((A_i+1,C(0,n)г),. .(A_i+n+1,C(n,n)г)),1г)
что совпадает с центром масс системы
((A_i,C(0,n)г),(A_i+1,(C(1,n)+C(0,n))г),..(A_i+n,(C(n,n)+C(n1,n))г)),(A_i+n+1,C(n,n)г),
а это и есть центр масс системы ((A_i, C(0, n+1)г), ... (A_i+n+1, C(n+1, n+1)г), то есть шаг индукции доказан.

Теперь заметим, что это означает, что после 12 прыжков первый кузнечик окажется в центре масс системы ((A_1, C(0, 12)г), ... (A_13, C(12, 12)г), а эта точка явно находится внутри отрезка [A_1, A_13] - противоречие.

б). В этом случае после 13 прыжков кузнечик окажется в центре масс системы ((A_1, C(0, 13)г), ... (A_14, C(13, 13)г), но эту же точку можно представить как центр масс системы из двух точек с некоторыми весами в них: первая - Ц.М.((A_2, C(1, 13)г), ... (A_13, C(12, 13)г), а вторая - Ц.М.((A_1, C(0, 13)г),(A_14, C(13, 13)г). Ясно, что первая точка находится внутри отрезка [A_1, A_13]. Кроме того C(0, 13)=C(13, 13) и A_1A_2=A_13A_14, а значит и вторая точка находится внутри отрезка [A_1, A_13], а следовательно, и центр масс этих точек с произвольными положительными весами находится внутри отрезка [A_1, A_13].

7. Муравей ползает по замкнутому маршруту по ребрам додекаэдра, нигде не разворачиваясь назад. Маршрут проходит ровно два раза по каждому ребру. Докажите, что некоторое ребро муравей оба раза проходит в одном и том же направлении. (Напомним, что у додекаэдра 20 вершин, 30 ребер и 12 одинаковых граней в виде пятиугольника, в каждой вершине сходится 3 грани.) *(А.В.Шаповалов)*

Решение. Предположим, что существует маршрут, при обходе по которому каждое рёбро проходится в обоих направлениях. Рассмотрим некоторую вершину A и трёх её соседей B, C, D. Допустим, что в некоторый момент муравей приполз в вершину A, (предположим, что он попал в A из вершины B) тогда после этого он может поползти либо в C либо в D. Если он пополз в C, то позже он должен будет в некоторый момент проползти из C в A (так как по предположению второй раз из A в C он проползти не может), далее из точки A он должен ползти в точку D так как иначе ему в какой-то момент будет необходимо проползти по маршруту D-A-D, что запрещено по условию. После чего он в какой-то момент проползёт из D в A а затем будет обязан поползти в B. Таким образом мы получили два варианта прохождения этого перекрёстка (два типа развилки) (B-A-C, C-A-D, D-A-B) и (если в первый раз муравей свернёт не в C, а в D) (B-A-D, D-A-C, C-A-B). По-другому эти два типа развилок можно охарактеризовать одним из двух правил: либо, придя в вершину, муравей всегда поворачивает налево, либо наоборот - всегда направо. Определим теперь для каждой вершины (развилки) её тип. Заметим теперь, что если выпустить муравья из произвольной вершины по некоторому ребру, то его дальнейшее движение однозначно определяется этими типами развилок. Таким образом, всякому разбиению развилок на "правые" и "левые" соответствует некоторый набор непересекающихся (по ребру, проходимому в одну сторону) циклов - замкнутых маршрутов движений муравья (мы не утверждаем, что такой набор ставится в соответствие единственным способом, но нам это и не требуется).
Мы считаем, что изначально имеется один такой цикл, проходящий по всем рёбрам по 2 раза. Начнём теперь поочерёдно на всех развилках с правилом "повернуть направо" заменять это правило на "повернуть налево". После первой же такой операции, вполне возможно, наш изначальный цикл распадётся на несколько. Однако понятно, что будут однозначно определены несколько замкнутых маршрутов, на которые он распался. Изучим теперь, насколько может меняться количество замкнутых маршрутов при смене типа развилки в додекаэдре, а именно докажем, что при этой операции чётность кол-ва

циклов не меняется. Предположим, что у нас имеется перекрёсток (B-A-C, C-A-D, D-A-B). Рассмотрим несколько случаев на конфигурацию маршрутов, проходящих через изменяемую вершину:

а) У нас имелось 3 разных замкнутых маршрута (B-A-C-...B), (C-A-D-...-C) и (D-A-B-...D), тогда после замены правила поворотов получим: (C-A-B-...-D-A-C-...-B-A-D-...-C), то есть в этом случае четность количества циклов не изменилась (их общее количество изменилось на 2).

б) У нас имелось 2 различных замкнутых маршрута (B-A-C-...B) и (C-A-D-...-D-A-B-...-C), тогда после замены типа перекрёстка образуются маршруты (C-A-B-...-C) и (B-A-D-...-D-A-C-...-B) - четность не изменилась.

в) Имелся один маршрут (B-A-C-...-C-A-D-...-D-A-B-...-B) тогда после замены типа перекрёстка получилось (B-A-D-...-D-A-C-...-C-A-B-...-B) - чётность снова не изменилась.

Все остальные случаи могут быть получены из рассмотренных сменой обозначений. Таким образом, у нас после каждой замены типа перекрёстка остаётся нечётное число маршрутов. Однако после того как на всех перекрёстках муравей станет "поворачивать налево", единственным способом разбить весь додекаэдр на маршруты окажется просто обойти все грани по границе (т.е. каждый маршрут будет состоять из 5 ребёр и огибать какую-то грань). Очевидно, что тогда всего маршрутов окажется 12, что противоречит нечётности их числа.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2005.**[1]

1. In triangle ABC, points D, E and F are the midpoints of BC, CA and AB respectively, while points L, M and N are the feet of the altitudes from A, B and C respectively. Prove that one can construct a triangle with the segments DN, EL and FM.

2. Each corner of a cube is labelled with a number. In each step, each number is replaced with the average of the labels of the three adjacent corners. All eight numbers are replaced simultaneously. After ten steps, all labels are the same as their respective initial values. Does it necessarily follow that all eight numbers are equal initially?

3. A segment of length 1 is cut into eleven shorter segments, each with length at most a. For what values of a will it be true that any three of the eleven segments can form a triangle, regardless of how the initial segment is cut?

4. A chess piece may start anywhere on a 15×15 chessboard. It can jump over 8 or 9 vacant squares either vertically or horizontally, but may not visit the same square twice. At most how many squares can it visit?

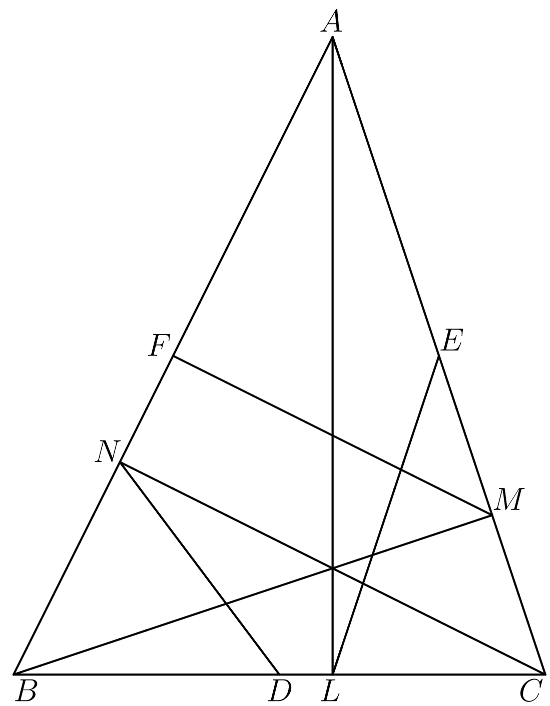
5. One of 6 coins is a fake. We do not know the weight of either a real coin or the fake coin, except that the real coins all weigh the same but different from the fake coin. Using a scale which shows the total weight of the coins being weighed, how can the fake coin be found in 3 weighings?

Note: The problems are worth 3, 3, 4, 4 and 5 points respectively.

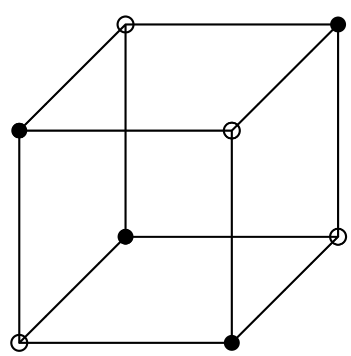
[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

Solution to Junior O-Level Fall 2005

1. D is the midpoint of the hypotenuse of the right triangle NBC. Hence $DN = \frac{1}{2}BC$. Similarly, $EL = \frac{1}{2}CA$ and $FM = \frac{1}{2}AB$. Hence the segments DN, EL and FM can form a triangle half the linear dimensions of triangle ABC.



2. The eight vertices of a cube may be painted black and white, with four of each colour, such that no two vertices of the same colour are adjacent. Label the white vertices with 0s and label the black vertices with 1s. In each move, the 0s become 1s and vice versa. In ten moves, all labels return to their initial values, but not all labels have the same value.



3. Let the lengths of the segments be $a = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{11}$. Since $1 = a_1+a_2+\cdots+a_{11} \leq 11a$, we must have $a \geq \frac{1}{11}$. On the other hand, if $a = \frac{1}{10}$, we may take $a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = \frac{1}{10}$ and $a_{10} = a_{11} = \frac{1}{20}$. Then the shortest two segments will not form a triangle with the longest. A larger value of a will only make the longest segment longer, and does not help. Now let $\frac{1}{11} \leq a < \frac{1}{10}$. Then $a_{10} + a_{11} = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) \geq 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} > a_1$. It follows that any three of the segments can form a triangle.

4. The diagram below shows the 15×15 chessboard divided into a central cross of width 3 and four quadrants each a 6×6 square. The numbering shows that all 144 squares in the four quadrants may be visited. If more squares may be visited, then the chess piece must visit one of the squares of the central cross. However, from any such square, the piece can never get to any of the 144 squares in the four quadrants. Even if it can visit all squares in the central cross, the total of 81 is well short of 144.

14	16	18	20	22	24				13	15	17	19	21	23
38	40	42	44	46	48				37	39	41	43	45	47
62	64	66	68	70	72				61	63	65	67	69	71
86	88	90	92	94	96				85	87	89	91	93	95
110	112	114	116	118	120				109	111	113	115	117	119
134	136	138	140	142	144				133	135	137	139	141	143
11	9	7	5	3	1				12	10	8	6	4	2
35	33	31	29	27	25				36	34	32	30	28	26
59	57	55	53	51	49				60	58	56	54	52	50
83	81	79	77	75	73				84	82	80	78	76	74
107	105	103	101	99	97				108	106	104	102	100	98
131	129	127	125	123	121				132	130	128	126	124	122

5. Let the coins be A, B, C, D, E and F. In three weighings, we determine the average weight m of C and E, the average weight n of D and F, and the average weight k of B, E and F. If $m = n = k$, the fake coin is A. If $m = n \neq k$, the fake coin is B. If $m \neq n = k$, the fake coin is C. If $k = m \neq n$, the fake coin is D. If $k \neq m \neq n \neq k$, then the fake coin is E or F. This can be distinguished since $2m + n = 3k$ if it is E, and $m + 2n = 3k$ if it is F.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2005.**[1]

1. Do there exist positive integers $a,\ b,\ n$ such that $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

2. A segment of length $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ is given. Can a segment of length 1 be constructed using a straight-edge and a compass?

3. One of 6 coins is a fake. We do not know the weight of either a real coin or the fake coin, except that the eal coins all weigh the same, but different from the fake coin. Using a scale which shows the total weight of the coins being weighed, how can the fake coin be found in 3 weighings?

4. On all three sides of a right triangle ABC, external squares are constructed, their centres being $D,\ E$ and F. Prove that the ratio of the area of triangle DEF to the area of triangle ABC is

   (a) greater than 1;

   (b) at least 2.

5. A cube lies on the plane, with a letter A on its top face. In each move, it is rolled over one of its bottom edges onto the adjacent face. After a few moves, the cube returns to its initial position, again with the letter A on its top face. Is it possible for the letter A to have made a 90° turn?

Note: The problems are worth 3, 3, 4, 2+2 and 5 points respectively.

---

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

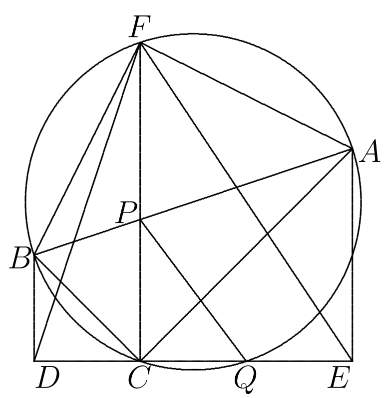
Solution to Senior O-Level Fall 2005

1. Suppose such integers a, b and n exist. Since $a+1 \le b$, $n^2 < a^3 < (a+1)^3 < (n+1)^2$. Note that $n^2 < a^3 < a^4$, so that $n < a^2$. Hence $(a+1)^3 > a^3 + 3a^2 + 1 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, which is a contradiction.

2. Construct any segement of length x. Construct a right triangle with legs x and x. Then the hypotenuse will have length $\sqrt{2}x$. Construct a right triangle with legs x and $\sqrt{2}x$. Then the hypotenuse will have length $\sqrt{3}x$. Construct a right triangle with legs $\sqrt{2}x$ and $\sqrt{3}x$. Then the hypotenuse will have length $\sqrt{5}x$. Construct a segment PQ of length $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})x$ and extend it to R such that $QR = x$. On another ray from P, mark off the point S where PS has the given length $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Through R, draw the line parallel to QS, cutting the ray at T. Then triangles PQS and PRT are similar, so that $\frac{ST}{PS} = \frac{QR}{PQ}$. It follows that $ST = 1$.

3. Let the coins be A, B, C, D, E and F. In three weighings, we determine the average weight m of C and E, the average weight n of D and F, and the average weight k of B, E and F. If $m = n = k$, the fake coin is A. If $m = n \ne k$, the fake coin is B. If $m \ne n = k$, the fake coin is C. If $k = m \ne n$, the fake coin is D. If $k \ne m \ne n \ne k$, then the fake coin is E or F. This can be distinguished since $2m + n = 3k$ if it is E, and $m + 2n = 3k$ if it is F.

4. Denote the area of triangle T by $[T]$. Since $\angle BCD + \angle BCA + \angle ACE = 45° + 90° + 45° = 180°$, C lies on DE. Since $\angle BCA + \angle BFA = 90° + 90° = 180°$, $BCAF$ is a cyclic quadrilateral. Hence $\angle FCD = \angle FCB + \angle BCD = \angle FAB + \angle BCD = 45° + 45° = 90°$. Let P be the point of intersection of FC and AB.



   (a) Since BD and AE are perpendicular to DE, they are parallel to CF. Since $CF > CP$, $[DCF] > [BCP]$ and $[ECF] > [ACP]$. Hence $[DEF] > [ABC]$.

   (b) Let K be the other point of intersection of DE with the circumcircle of triangle ABC. Then FQ is a diameter of the circle. Hence $PF = PQ \ge PC$ so that $CF \ge 2CP$. It follows that $[DCF] \ge 2[BCP]$ and $[ECF] \ge 2[ACP]$, so that $[DEF] \ge 2[ABC]$.

5. The vertices of a cubic lattice may be painted black and white such that no two vertices of the same colour are adjacent. The vertices of the cube are painted in the same colours as the vertices of its initial position in the cubic lattice. When the cube is rolled over, its white vertices always go to white vertices of the cubic lattice, and its black vertices always go to black vertices of the cubic lattice. When it returns to its initial position, again with the letter A on its top face, the letter A cannot have made a 90° turn as this requires the vertices of the cube to have different colours from the corresponding vertices of the cubic lattice.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2005.**[1]

1. A palindrome is a positive integer which reads the same from left to right and from right to left. For example, 1, 343 and 2002 are palindromes, while 2005 is not. Is it possible to find 2005 values of n such that both n and $n + 110$ are palindromes?

2. The extensions of the sides AB and DC of a convex quadrilateral $ABCD$ intersect at the point K. M and N are the midpoints of AB and CD, respectively. Prove that if $AD = BC$, then triangle MNK is obtuse.

3. Initially, there is a rook on each of the 64 squares of an 8×8 chessboard. Two rooks attack each other if they are in the same row or column, and there are no other rooks directly in between. In each move, one may take away any rook which attacks an odd number of other rooks still on the chessboard. What is the maximum number of rooks that can be removed?

4. Each side of a polygon is longer than 100 centimetres. Initially, two ants are on the same edge of the polygon, at a distance 10 centimetres from each other. They crawl along the perimeter of the polygon, maintaining the distance of 10 centimetres measured along a straight line.

   (a) Suppose the polygon is convex. Is it always possible for each point on the perimeter of the polygon to be visited by both ants?

   (b) Suppose the polygon is not necessarily convex. Is it always possible for each point on the perimeter of the polygon to be visited by at least one of the ants?

5. Determine the largest positive integer N for which there exist a unique triple (x, y, z) of positive integers such that $99x + 100y + 101z = N$.

6. There are 1000 pots each containing varying amounts of jam, not more than $\frac{1}{100}$-th of the total. Each day, exactly 100 pots are to be chosen, and from each chosen pot, the same amount of jam is eaten. Prove that it is possible to eat up all the jam in a finite number of days.

Note: The problems are worth 3, 5, 6, 2+4, 7 and 8 points respectively.

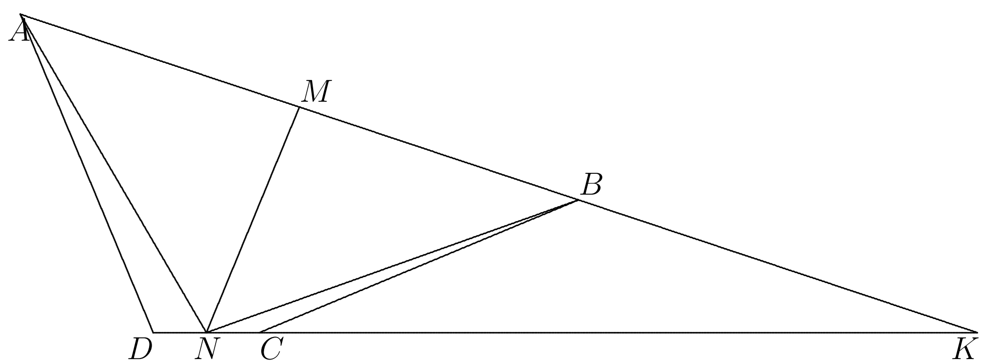
---

[1]Courtesy of Professor Andy Liu.

Solution to Junior A-Level Fall 2005

1. We can choose $n = 1099\cdots9901$. Clearly, n is a palindrome. Since $n + 110 = 1100\cdots0011$, it is also a palindrome. Since the number of 9s in n is arbitrary, we can certainly find 2005 such values.

2. Suppose $AN < BN$. In triangles MAN and MBN, we have $MA = MB$ and $MN = MN$. Hence $\angle AMN < \angle BMN$. Since $\angle AMN + \angle BMN = 180°$, we have $\angle KMN > 90°$. Similarly, $MD < MC$ implies $\angle KNM > 180°$. Suppose $AN \geq BN$ and $MD \geq MC$. In triangles DAN and CBN, we have $DN = CN$ and $MN = MN$. Hence $\angle ADN \geq \angle BCN$. Similarly, $\angle DAM \geq \angle CBM$. Since $\angle ADN + \angle DAM + \angle BCN + \angle CBM = 360°$, $\angle ADN + \angle DAM \geq 180°$. However, this is a contradiction since $\angle ADN + \angle DAM = 180° - \angle AKD < 180°$.



3. First, note that none of the corner rooks may be removed since each always attacks two other rooks. Moreover, we cannot leave behind only the four corner rooks, as otherwise the last to be taken away will attack two or zero other rooks. We can take away as many as 64-4-1=59 rooks in two stages, as shown in the diagrams below.

•	1	2	3	4	5	6	•
13	∘	∘	∘	∘	∘	∘	7
14	15	16	17	18	19	∘	8
20	21	22	23	24	25	∘	9
26	27	28	29	30	31	∘	10
32	33	34	35	36	37	∘	11
38	39	40	41	42	43	•	12
•	44	45	46	47	48	49	•

•							•
	50	51	52	53	54	55	
						56	
						57	
						58	
						59	
						•	
•							•

4. (a) Let $ABCD$ be a rhombus with BD horizontal and less than 10 centimetres long. Then the segment XY joining the two ants is almost vertical. Let X be the ant initially closer to A and Y be the ant initially closer to C. Then X can never visit C while Y cannot visit A.

   (b) Modify the rhombus $ABCD$ by moving C vertically towards A until AC is less than 10 centimetres long. Then the segment XY joining the two ants is still almost vertical. If XY is initially on AB or AD, neither X nor Y can visit C. If XY is initially on CB or CD, neither X nor Y can visit A.

5. We claim that $N = 5251$ is the largest value. We first show that $99x + 100y + 101z = 5251$ has the unique positive integral solution (50,2,1). Note that $x + y + z = 52$ or 53 since $51 \times 101 < 5251 < 54 \times 99$. Suppose $x + y + z = 52$. Subtracting 100 times this from the given equation, we have $z - x = 51$. We can only have $(x, y, z) = (0, 1, 51)$, but this is not admissible. Suppose $x + y + z = 53$. Subtracting the given equation from 100 times this, we have $x - z = 49$. Neither (49,4,0) nor (51,0,2) is admissible, leaving $(x, y, z) = (50, 2, 1)$ as the unique solution. We next show that for $N = 5251 + k$, $1 \le k \le 99$, we have at least two positive integral solutions to $99x+100y+101z = N$. For $1 \le k \le 49$, they are $(50-k, k+2, 1)$ and $(51 - k, k, 2)$. For $50 \le k \le 97$, they are $(1, 100 - k, k - 48)$ and $(2, 98 - k, k - 47)$. For $k = 98$, they are (52,1,1) and (1,2,50). For $k = 99$, they are (51,2,1) and (1,1,51). Finally, for $N \ge 5351$, modify each of the two solutions for $N - 99$ by adding 1 to x.

6. More generally, let there be m pots each containing varying amounts of jam, not more than $\frac{1}{n}$-th of the total, where $n \le m$. Each day, exactly n pots are to be chosen, and from each chosen pot, the same amount of jam is eaten. We use induction on n. The basis $n = 1$ is trivial as we can eat up the jam one pot at a time. Suppose there is a strategy to eat all the jam for some $n \ge 1$. We now eat from $n + 1$ pots each day. Let P be the pot with the most jam. We consider two cases:
Case 1. P contains less than $\frac{1}{n+1}$ of the total amount of jam.
Then $m > n + 1$. Choose the $n + 1$ pots containing the least combined amount of jam. Our plan is to eat from each of them the amount equal to what is in the pot with the least amount, so that it becomes empty. However, we must ensure that the condition in the hypothesis still holds afterwards. If P will contain more than $\frac{1}{n+1}$ of the remaining amount of jam, then we modify our plan by reducing the amount eaten from each of the chosen pots, so that P will contain exactly $\frac{1}{n+1}$ of the remaining amount of jam. We then proceed to Case 2. On the other hand, if the condition in the hypothesis holds after our original plan is carried out, we have reduced the number of non-empty pots by one. At some point before or when this number becomes $n + 1$, P will contain exactly $\frac{1}{n+1}$ of the remaining amount of jam, and we proceed to Case 2.
Case 2. P contains exactly $\frac{1}{n+1}$ of the total amount of jam.
First note that each pot other than P contains at most $\frac{1}{n}$ of the total amount of jam not in P. Hence we may apply the strategy when we eat from n pots each day to the pots other than P. At the same time, we also eat from P each day, so that we are eating from $n + 1$ pots as required. By the induction hypothesis, we can eat all the jam from the pots other than P. Since we eat from P each day exactly $\frac{1}{n}$ of what we eat from the other pots, and P starts with exactly $\frac{1}{n}$ of the jam in the other pots initially, we will finish off the jam in P at the same time as we empty the other pots.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2005.**

1. For which positive integers n can one find distinct positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$ is also an integer?

2. Each side of a polygon is longer than 100 centimetres. Initially, two ants are on the same edge of the polygon, at a distance 10 centimetres from each other. They crawl along the perimeter of the polygon, maintaining the distance of 10 centimetres measured along a straight line.

   (a) Suppose the polygon is convex. Is it always possible for each point on the perimeter of the polygon to be visited by both ants?

   (b) Suppose the polygon is not necessarily convex. Is it always possible for each point on the perimeter of the polygon to be visited by at least one of the ants?

3. Initially, there is a rook on each of the 64 squares of an 8×8 chessboard. Two rooks attack each other if they are in the same row or column, and there are no other rooks directly in between. In each move, one may take away any rook which attacks an odd number of other rooks still on the chessboard. What is the maximum number of rooks that can be removed?

4. On a circle are a finite number of red points. Each is labelled with a positive number less than or equal to 1. The circle is to be divided into three arcs so that each red point is in exactly one of them. The sum of the labels of all red points in each arc is computed. This is taken to be 0 if the arc contains no red points. Prove that it is always possible to find a division for which the sums on any two arcs will differ by at most 1.

5. In triangle ABC, $\angle A = 2\angle B = 4\angle C$. Their bisectors meet the opposite sides at D, E and F respectively. Prove that $DE = DF$.

6. A blackboard is initially empty. In each move, one may either add two 1s, or erase two copies of a number n and replace them with $n-1$ and $n+1$. What is the minimum number of moves needed to put 2005 on the blackboard?

Note: The problems are worth 3, 2+3, 5, 6, 7 and 8 points respectively.

Solution to Senior A-Level Fall 2005

1. For $n = 1$, we may take $a_1 = 1$ and $\frac{a_1}{a_1} = 1$ is indeed an integer. For $n = 2$, consider any $a_1 < a_2$. We may assume that they are relatively prime to each other. Then $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1a_2}$. This is never an integer since the factor a_2 in the denominator cannot be cancelled out. For $n \geq 3$, take $a_k = (n-1)^{k-1}$ for $1 \leq k \leq n$. These are distinct integers since $n - 1 > 1$. The desired sum is $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = (n-1)^{n-1} + 1$, which is an integer. Hence $n = 2$ is the only impossible case.

2. (a) Let $ABCD$ be a rhombus with BD horizontal and less than 10 centimetres long. Then the segment XY joining the two ants is almost vertical. Let X be the ant initially closer to A and Y be the ant initially closer to C. Then X can never visit C while Y cannot visit A.

   (b) Modify the rhombus $ABCD$ by moving C vertically towards A until AC is less than 10 centimetres long. Then the segment XY joining the two ants is still almost vertical. If XY is initially on AB or AD, neither X nor Y can visit C. If XY is initially on CB or CD, neither X nor Y can visit A.

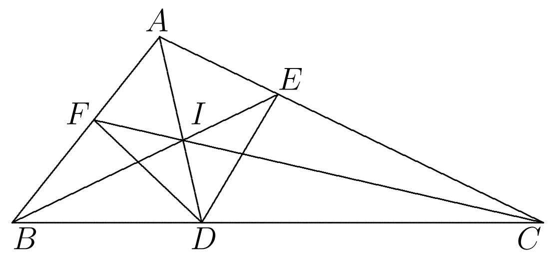
3. First, note that none of the corner rooks may be removed since each always attacks two other rooks. Moreover, we cannot leave behind only the four corner rooks, as otherwise the last to be taken away will attack two or zero other rooks. We can take away as many as 64-4-1=59 rooks in two stages, as shown in the diagrams below.

•	1	2	3	4	5	6	•
13	◦	◦	◦	◦	◦	◦	7
14	15	16	17	18	19	◦	8
20	21	22	23	24	25	◦	9
26	27	28	29	30	31	◦	10
32	33	34	35	36	37	◦	11
38	39	40	41	42	43	•	12
•	44	45	46	47	48	49	•

•							•
	50	51	52	53	54	55	
						56	
						57	
						58	
						59	
						•	
•							•

4. For any arc A, denote by $f(A)$ the sum of the labels of the red points on A. Since there are finitely many red points, there are finitely many ways to divide them among three arcs. For each division, let the arcs be L, M and S, with $f(L) \geq f(M) \geq f(S)$. Choose among the divisions the one in which $f(L) - f(S)$ is minimum. We claim that for this division, $f(L) - f(S) \leq 1$. Suppose that this is not so. Now L and S are adjacent to each other. Let R be the red point on L closest to S and let r be its label. Consider the division (L', M', S') where the only change is that R moves from L to S. If $f(L) - r > f(S) + r$, then $f(L') = \max\{f(M), f(L) - r\}$ while $f(S') = \min\{f(M), f(S) + r\}$. On the other hand, if $f(L) - r \leq f(S) + r$, then $f(L') = \max\{f(M), f(S) + r\}$ while $f(S') = \min\{f(M), f(L) - r\}$. We have $f(L') - f(S') < f(L) - f(S)$ since $r \leq 1$, and $f(M)$ cannot be equal to $f(L)$ and $f(S)$ simultaneously. However, this contradicts our minimality assumption.

5. Let I be the incentre of triangle ABC. Let $\angle BCI = \angle ACI = \theta$. Then $\angle ABI = \angle CBI = 2\theta$ and $\angle CAI = \angle BAI = 4\theta$. Hence $\angle AIE = \angle BID = \angle BDI = 6\theta$, $\angle AIF = \angle AFI = 5\theta$ and $\angle AEI = 4\theta$. Let $AI = x$ and $DI = y$. Then $AF = IE = x$ and $BD = BI = x + y$. In triangle BAD, $\frac{AB}{AI} = \frac{DB}{DI}$, so that $BF = (\frac{DB}{DI} - \frac{AF}{AI})AI = \frac{x^2}{y}$. In triangle ABE, $\frac{EA}{EI} = \frac{BA}{BI}$, so that $AE = (\frac{AF+FB}{BI})EI = \frac{x^2}{y} = BF$. It follows that triangles EAD and FBD are congruent to each other, so that $DE = DF$.



6. **First Solution:**
Whenever we write n on the blackboard, we also write n^2 on a whiteboard, and whenever we erase n from the blackboard, we also erase n^2 from the whiteboard. Observe that when n appears in the smallest number of steps, it clearly comes from trading in two copies of $n-1$. Hence $n-1$ will not appear but $n-2$ will. The step before involves trading in two copies of $n-2$ for one of the $(n-1)$s, and so on. Hence the numbers on the blackboard other than n are $n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1$, with an extra 1 if it is needed to make the total of the numbers even. Let $f(n)$ denote the minimum number of steps in order for the positive integer n to appear on the blackboard. In a move where we take two 1s, the sum of all the numbers on the whiteboard increases by 1+1=2. In a move where we trade in two ns for $n+1$ and $n-1$, this sum also increases by $(n+1)^2 + (n-1)^2 - n^2 - n^2 = 2$. It follows that $f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 1^2)$ for $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, and $f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2)$ for $n \equiv 2, 3 \pmod 4$. In particular, $f(2005) = \frac{1}{2}(2005^2 + \frac{2003 \cdot 2004 \cdot 4007}{6} + 1) = 1342355520$.

Second Solution:
Let $f(n)$ denote the minimum number of steps in order for the positive integer n to appear on the blackboard. We claim that

$$f(n) - f(n-1) = \begin{cases} \dfrac{n^2 - 2n + 4}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4; \\ \dfrac{n^2 - 2n + 3}{2} & \text{if } n \equiv 1 \pmod 2; \\ \dfrac{n^2 - 2n + 2}{2} & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

From this, we have $f(n) - f(n-4) = 2n^2 - 10n + 19$. Iterating this recurrence, we have

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 13n}{12} & \text{if } n \equiv 0, 1 \pmod 4; \\ \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 13n - 6}{12} & \text{if } n \equiv 2, 3 \pmod 4. \end{cases}$$

In particular, $f(2005) = \frac{2005}{12}(2 \cdot 2005^2 - 3 \cdot 2005 + 13) = 1342355520$.

Observe that when n appears in the smallest number of steps, it clearly comes from trading in two copies of $n-1$. Hence $n-1$ will not appear but $n-2$ will. The step before involves trading in two copies of $n-2$ for one of the $(n-1)$s, and so on. Hence the numbers on the blackboard other than n are $n-2, n-3, \ldots, 3, 2, 1$, with an extra 1 if it is needed to make the total of the numbers even. We now justify our claim. Consider first the case $n \equiv 0 \pmod 4$. After $f(n-1)$ steps, we have the numbers $1, 2, 3, \ldots, n-3, n-1$ on the blackboard. To make $n-2$ reappear, we take two 1s and trade upwards to obtain in succession two 2s, two 3s, and so on. After $n-3$ steps, we have two $(n-3)$s, and we have $n-2$ in $n-2$ steps. Note that we have two 1s already. Thus it takes another $(n-3)-1$ steps to make $n-3$ reappear. Since the number of 1s alternates between one and two, it takes $n-4$ steps to make $n-4$ reappear, $(n-5)-1$ steps to make $n-5$ reappear, and so on. It follows that it takes altogether

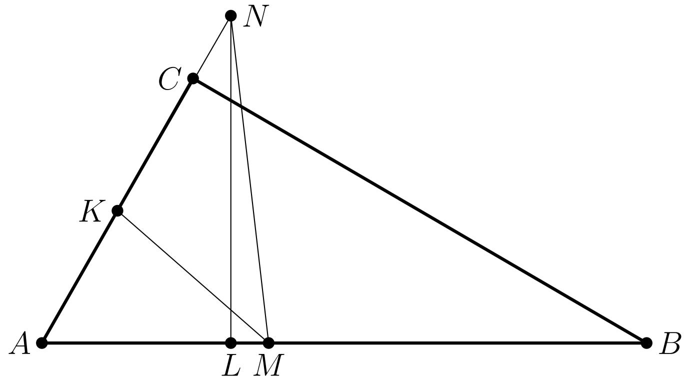
$$(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1-\frac{n-2}{2}$$

steps to obtain the numbers $1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1$. To make n appear, we take two 1s and trade upwards so that after n steps, we have the numbers $1, 1, 2, 3, \ldots, n-3, n-2, n$. It follows that $f(n)-f(n-1)=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}-\dfrac{n-2}{2}+n=\dfrac{n^2-2n+4}{2}$ as desired. For $n \equiv 1 \pmod 4$, we have $f(n)-f(n-1)=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}-\dfrac{n-1}{2}+n=\dfrac{n^2-2n+3}{2}$. For $n \equiv 2 \pmod 4$, we have $f(n)-f(n-1)=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}-\dfrac{n-2}{2}+(n-1)=\dfrac{n^2-2n+2}{2}$. For $n \equiv 3 \pmod 4$, we have $f(n)-f(n-1)=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}-\dfrac{n-3}{2}+(n-1)=\dfrac{n^2-2n+3}{2}$. Thus our claim is justified.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2006.**

1. In triangle ABC angle A is equal to $60°$. The perpendicular from the midpoint of side AB intersects AC at the point N. The perpendicular from the midpoint of side AC intersects AB at the point M. Prove that $CB = MN$. (R.G. Zhenodarov)



SOLUTION. By the property of the perpendicular from the midpoint $NA = NB$, thus triangle ANB is isosceles. Angle A is equal to $60°$, this means that triangle ANB is equilateral and $AN = AB$. Similarly, triangle AMC is equilateral, $AM = AC$. Triangles ACB and AMN are equal according to the equality of two sides and angle between them. Hence $BC = MN$.

2. Consider an $n \times n$ table. In each square of its first column someone has written the number 1, in each square of the second column, number 2, and so on. Then someone erased the numbers on the diagonal which connects top-left with bottom-right angle of the table. Prove that the sum of the numbers above the diagonal is twice the sum of the numbers under it. (S.A.Zaitsev)

SOLUTION 1. For each square on the diagonal compare the sums of the numbers situated to the left of it and situated above it. If the square is situated at the intersection of the k-th row and the k-th column the sum to the left is equal to $1 + 2 + \cdots + (k-1) = k(k-1)/2$, while the sum of the numbers above it is equal to k(k-1), that is two times more. Hence the sum of all numbers above the diagonal is two times more than the sum of the numbers situated to the left of it.

SOLUTION 2.

	2	3	4	$\ldots$	n
1		3	4	$\ldots$	n
1	2		4	$\ldots$	n
1	2	3		$\ldots$	n
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$
1	2	3	4	$\ldots$	

	1	2	3	$\ldots$	$n-1$
1		1	2	$\ldots$	$n-2$
1	2		1	$\ldots$	$n-3$
1	2	3		$\ldots$	$n-4$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$
1	2	3	4	$\ldots$	

SOLUTION 3. In the original table (left picture) there are $(n-1)$ ones, $(n-2)$ twos, $(n-3)$ threes and so on. Let us subtract from each number above the diagonal the number symmetrical to it with respect to the diagonal. We get the picture to the right. It has equal numbers situated on the diagonals above the main one and parallel to it: $(n-1)$ ones, $(n-2)$ twos, $(n-3)$ threes and so on. We decreased the upper sum by the lower sum and got the

lower sum. This means that the upper sum was two times more than the lower one. We are going to show that after the subtraction of the lower sum from the upper sum we obtain the upper sum. From i-th row of the upper sum we subtract i-th column of the lower one. Since i-th row of the upper sum is given by $(i+1), (i+2), \ldots, (n-1), n$, while i-th column of the lower sum is $i, i, \ldots, i$, after the subtraction we get the row $1, 2, \ldots, (n-i)$, which is exactly the $(n-i+1)$-th line of the lower sum. After making the subtraction for every i we will obtain the lower sum. Consequently, the upper sum is two times more than the lower sum.

3. Consider an arbitrary number $a > 0$ such that the inequality $1 < xa < 2$ has exactly 3 integer solutions. How many integer solutions may have the inequality $2 < xa < 3$?

   Find all possibilities. (A.K. Tolpygo)

   ANSWER. 2, 3 or 4 solutions.

   SOLUTION 1. The first inequality is equivalent to $1/a < x < 2/a$. There are 3 integers in the interval $(1/a, 2/a)$. They divide it into two segments 1 unit long each and two segments not more than 1 unit long each one along the edges. Therefore, the inequality $2 < 1/a \leq 4$ for the length of the segment $(1/a, 2/a)$ holds. Similarly if there are k integers in the segment t units long, then $k-1 < t \leq k+1$. It is equivalent to the inequality $t-1 \leq k < t+1$. Second segment $(2/a, 3/a)$ has the same length. Substituting $t = 1/a$ and taking into consideration the inequalities for $1/a$, we obtain $1 < 1/a - 1 \leq k < 1/a + 1 \leq 5$, i.e. $k = 2, 3$ or 4. All three cases are possible: $k = 2$ when $a = 3/8$ ($x = 6, 7$); $k = 3$ when $a = 1/4$ ($x = 9, 10, 11$); $k = 4$ when $a = 5/17$ ($x = 7, 8, 9, 10$).

   SOLUTION 2. This problem also can be solved using graphical methods. We will give just a sketch of such a solution here. (Everything becomes evident after thorough consideration of the graphical representation). The inequalities can be rewritten as $1/a < x < 2/a$ and $2/a < x < 3/a$. Consider the vertical axis on the coordinate plane as x, and the horizontal axis as $1/a$. Draw three new lines: $x = 1/a$, $x = 2/a$, x=3/a. We see that values of $1/a$ belonging to the intervals $(2.5, 3)$ and $(3, 3.5]$, and also $1/a = 4$ are right for us. Thus it is possible to find 2,3 or 4 integer solutions.

4. Three children Ann, Borya and Vitya sit at the round table and eat nuts. Children have more than 3 nuts. At the beginning Ann owns all nuts. If Ann has even number of nuts, she divides them into two equal parts and gives to Borya and Vitya and if the number of her nuts is odd, then she eats 1 nut and then does the same. Then the next child (one by one, around the table) does the same: divides all his (or her) nuts between two others eating one nut in the process, if it is necessary. And so on. Prove that:

   (a) at least 1 nut will be eaten,

   (b) the children won't eat all nuts.

   (M.N. Vyaliy)

   (a) SOLUTION 1. (a) Assume that Ann has a nuts at the very beginning. Suppose that no nuts are eaten. Write down couple of first steps:

	Ann	Borya	Vitya
Beginning	a	0	0
1 step	0	$a/2$	$a/2$
2 step	$a/4$	0	$3a/4$
3 step	$5a/8$	$3a/8$	0

Observe that after n-th step one of the children has 0 nuts, while two other ones have $xa/2n$ and $ya/2n$, where x and y are odd numbers. This proposition can be easily proved. If it is true for the n-th step, then after the next one the amounts of nuts will be 0, $xa/2^{n+1}$ and $(2y+x)a/2^{n+1}$, where x and $2y+x$ are also odd, i.e. the statement is true again. As the statement holds after the first step, it also holds after the second one, thus after the third one also, and so on. But since after each step each child has an integer amount of nuts, the number a should be divisible by 2^n for every integer n, which is impossible. Therefore, at least one nut will be eaten.

Solution 2. Denote by a the number of nuts owned by the child who will divide next, and the number for the next person by b. If no nuts are eaten, after the next step $a' = b + a/2$ and $b' = a/2$. Observe that $|a' - 2b'| = \frac{1}{2}|a - 2b|$. This means that such difference after each step is divided by two but remains integer. This is impossible, so at least one nut will be eaten .

(b) If there are more than 3 nuts at any moment, the proposition is proved. Otherwise, consider the moment of time when the total amount of nuts is three for the first time. After any step exactly two persons own nuts and the one with the greater amount divides next. Consequently, when the total amount is three, the dividing person owns 2 nuts. So after next step the situation will be exactly the same, again with 3 nuts.

5. Peter has n^3 white $1 \times 1 \times 1$-cubes. He wants to make a $n \times n \times n$-cube using them, and he wants to make this cube totally white from the outside. What is the minimum number of sides of the cubes Vasya has to paint in black to prevent Peter from doing this?

   (a) n=2,

   (b) n=3

   (R.G. Zhenodarov) Answers (a) 2 sides (b) 12 sides

   (a) Solution. Evidently, one painted side is not enough. But if we paint two opposite sides on one cube, one of them always will be on the outside.

   (b) Solution. It is enough to paint all sides of two cubes, because when constructing the $3 \times 3 \times 3$ cube we can fully hide only 1 cube. Now we will show how Peter can accomplish his task if there are 11 or less painted sides. In this case not more than one cube can be fully painted, not more than 5 can have more than 1 painted side. At first, choose the cube with maximum number of painted sides and put it into the center. There are no fully painted cubes among the remaining ones, thus all of them can be used for the center cube of the side. Now choose 6 more cubes with the greatest number of painted sides. Now there are no cubes with two or more painted sides left. Therefore, all other painted sides can also be easily hidden: one painted side of the cube can always be hidden.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2006.**

1. Consider a convex polyhedron with 100 edges. All its vertices were cut off near themselves using sharp knives planes (it was done in such a way that these planes have no intersections inside or on the boundary of the polyhedron). Find out for the resulting polyhedron:

   (a) number of vertices,

   (b) number of edges.

   (G.A.Galperin)

   Answer. a) 200; b) 300.

   Solution. Observe that there are two vertices of the new polyhedron on each edge of the given one, and there are 3 edges starting in each vertex of the new polyhedron. Consequently, there are $2 \cdot 100 = 200$ vertices and $\frac{100 \cdot 3}{2} = 300$ edges in the resulting polyhedron.

2. Is it possible to find two such functions $p(x)$ and $q(x)$ that $p(x)$ is an even function, while $p\big(q(x)\big)$ is an odd function (other than identically equal to 0) ? (A.D. Blinkov, V.M. Gurovic)

   Answer. Yes, it is possible.

   Solution. Consider functions $p(x) = \cos x$ and $q(x) = \frac{\pi}{2} - x$. It is evident that $p(x)$ is an even function, while $p(q(x)) = \sin x$ is odd an odd function. There are also lots of different solutions.

3. Consider an arbitrary number $a > 0$. We know that the inequality $10 < a^x < 100$ has exactly 5 positive integer solutions. How many solutions in positive integers may have the inequality $100 < a^x < 1000$?

   Find all possibilities. (A.K. Tolpygo)

   Answer. 4,5 or 6.

   Solution. The inequality $10 < a^x < 100$ can be rewritten as $10 < 10^{bx} < 100$ or $1 < bx < 2$. Similarly $100 < ax < 1000$ is equivalent to $2 < bx < 3$. If n is the minimal integer solution of $1 < bx < 2$, then $b(n-1) < 1 < bn$ and $b(n+4) < 2 < b(n+5)$. Summing up the first inequality with itself and with the second one we obtain $b(2n-2) < 2 < b(2n)$ and $b(2n+3) < 3 < b(2n+5)$. Hence the inequality $2 < bx < 3$ has from 4 and up to 6 integer solutions ($2n, \dots, 2n+3$ are always solutions, while $2n-1$ and $2n+4$ may be and may not). Actually, all 3 cases are possible:

   - $b = \frac{5}{23}$; solutions of the first inequality are 5, 6, 7, 8, 9, solutions of the second one are 10, 11, 12, 13.
   - $b = \frac{5}{26}$; solutions of the first inequality are 6, 7, 8, 9, 10, solutions of the second one are 11, 12, 13, 14, 15.
   - $b = \frac{5}{27}$; solutions of the first inequality are 6, 7, 8, 9, 10, solutions of the second one are 11, 12, 13, 14, 15, 16.

4. Quadrangle $ABCD$ is inscribed and $AB = AD$. A point M lays on the side BC, while a point N lays on the side CD. Angle MAN equals to the half of the angle BAD. Prove that $MN = BM + ND$. (M.I.Malkin) SOLUTION 1. Denote by R the point symmetrical to B with respect to AM. Observe that in the same time R is symmetrical to D with respect to AN (since $AD = AB$ and angle MAN is equal to the sum of angles NAD and MAB). As $ABCD$ is inscribed, the sum of the angles ABC and ADC is equal to $180°$. Consequently the sum of the angles ARM and ARN is equal to $180°$, hence MRN is a straight line. Thus $BM + ND = MR + NR = MN$.

   SOLUTION 2. Rotate triangle MAB around the point A in such a way that AB coincides with AD. Denote by M' the image of the point M when we perform this rotation. Since $ABCD$ is inscribed the sum of the angles ABC and ADC is equal to $180°$, so and the sum of the angles ADN and ADM' is equal to $180°$. This means that $M'DN$ is a straight line. Triangles NAM' and NAM are equal by the equality of two sides and angle between them (angles NAM and $M'AN$ are equal since angle MAN is equal to the sum of NAD and MAB, AN is the common side, AM and AM' are equal by the construction). Consequently $MN = M'N = ND + DM' = ND + BM$.

5. Peter has n3 white $1 \times 1 \times 1$-cubes. He wants to make an $n \times n \times$-cube using them, and he wants to make this cube totally white from the outside. What is the minimum number of sides of the cubes Vasya has to paint in black to prevent Peter from doing this?

   (a) $n = 3$,
   (b) $n = 1000$

   (R.G.Zhenodarov)

   ANSWER. (a) 12; (b)1999999986.

   REMARK: In the $n \times n \times$-cube 8 corner bricks have 3 outside facets, $12(n-2)$ adjoining to the edges bricks have 2 outside facets, $6(n-2)^2$ bricks have one outside facets, other bricks have no outside facets. In order to prevent Peter from putting a cube into a corner, Vasya has to paint at least two its sides (opposite ones). In order to make it impossible to put a cube on the edge one has to paint at least 4 its facets (all but 2 opposite ones). In order to prevent Peter from putting a cube on the side Vasya has to paint all 6 sides of the cube.

   (a). SOLUTION. In the case $n = 3$ it is enough for Vasya to fully paint 2 cubes (12 sides) to prevent Peter from fulfilling his task as one of these sides will necessarily remain on the outside. If Vasya has painted not more than 11 sides, then Peter is able to choose 8 cubes that have not more than one painted side (otherwise the number of painted sides is not less than $2 \times (27 - 7) = 40$), then choose 12 cubes that have not more than 3 painted sides ($4 \cdot (27 - 8 - 11) = 32 > 11$), and 6 cubes with not more than 5 painted sides ($6 \cdot (27 - 8 - 12 - 5) = 12 > 11$). After that Peter will be able to put these cubes in the corners, edges and centers of the sides correspondingly and accomplish his task. A little different solution can be found in the 0-junior level, 8-9 grades, problem 5b.

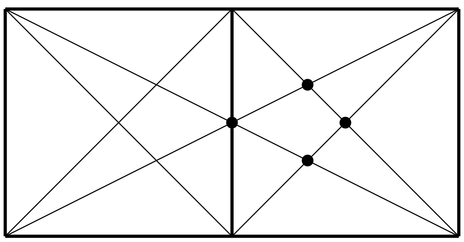
   (b) SOLUTION. In the case $n = 1000$ it is enough for Vasya to paint two opposite sides of $1000^3 - 7$ cubes, i.e. 1999999986 sides. Then outside facet of one of the corner cubes will be painted in any construction of the big cube. In the same time, if Vasya has painted not more than $2 \cdot (1000^3 - 7) - 1 = 2 \cdot 1000^3 - 15$ sides, than Peter is able to choose 8 cubes with not more than 1 painted side ($2 \cdot (1000^3 - 7) > 2 \cdot 1000^3 - 15$), then choose $12 \cdot 998$, with not more than 3 painted sides $(4 \cdot (1000^3 - 8 - 12 \cdot 998 + 1) > 2 \cdot 1000^3 - 15)$, and $6 \cdot 998^2$ with not more than 5 painted sides $(6 \cdot (1000^3 - 8 - 12 \cdot 998 - 6 \cdot 998^2 + 1) > 2 \cdot 1000^3 - 15)$. Then Peter is able to construct white from the outside cube.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2006.**

1. A pool table has a shape of a 2×1 rectangle; there are six pockets: one in each corner, and one in the midpoint of each of the long sides of the table. What is the minimal number of balls one needs to put on the table so that every pocket lies on the same line with at least two balls? (Consider pockets and balls as points.) (B.R. Frenkin)

   Answer. 4 balls.

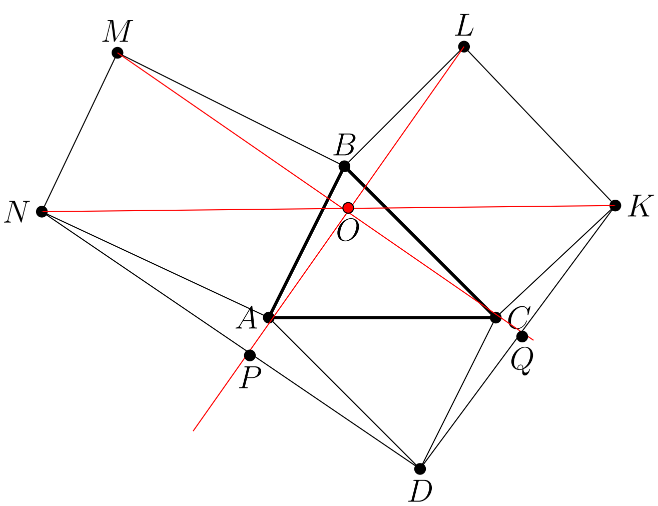
   

   Solution. The example for 4 balls is given on the picture. Let us show that 3 balls are not enough. Straight line passing through two balls inside the rectangle intersects its boundary at exactly two points. We have 6 pockets, so we need at least 3 straight lines. Three balls creates three lines if and only if these balls form a triangle. However, all possible straight lines are drawn on the picture and none of them form a triangle with vertices inside the pool table.

2. Prove that one can find 100 pairs of integers with the following property: in the decimal representation of each integer, each digit is greater or equal to 6, and the product of the two integers in the pair is also an integer whose decimal representation has no digits less than 6. (S.I. Tokarev, A.V.Shapovalov)

   Solution. All pairs (7, 9...97) are in use to our problem since their products are equal to 67...79.

3. Assume an acute triangle ABC is given. Two equal rectangles, $ABMN$ and $LBCK$, are drawn on the sides AB and BC in the outside. Given that $AB = LB$, prove that the straight lines AL, NK, and MC are concurrent. (A.Gavriluk)

   Solution 2. Draw a parallelogram $ABCD$. Then $ALKD$ and $CDNM$ are also parallelograms. Isosceles $\triangle CBM$ can be obtained from $\triangle ABL$ by the rotation by 90° and homothety, thus $CM \perp AL$, but then and $CM \perp KD$. Continuation of MC, height CQ in the isosceles triangle KCD is its median, consequently CM is the perpendicular from the midpoint of KD. Similarly AL is the perpendicular from the midpoint of ND. Parallelogram $OPDQ$ is a rectangle, hence triangle KDN is right-angled, and perpendiculars from the midpoints of its legs pass through the midpoint of the hypotenuse KN.

Solution 1. Consider escribed circles for the given rectangles. Denote their second point of intersection by O. Then $\angle BON = \angle BOK = 90°$. Hence points N, O, K are situated on the straight line perpendicular to BO. Observe that angles NBA and LBK are equal (since corresponding triangles are equal). Since angles leaning on one edge are equal, we get the equalities: $\angle NOA = \angle NBA = \angle LBK = \angle LOK$, consequently points A, O, L are also situated on a straight line. Similarly points M, C, O are situated on a straight line. Thus O is the common point of these straight lines. Remark. Perpendicularity of AL and CM can be proved without rotating homothety, just using angles counting. Assume $\angle ABC = b$. In the isosceles triangles ABL and MBC angles B are equal to $b + 90°$, consequently other angles are equal to $45° - b/2$. This means that

$$\angle AOC = 180° \angle OAC \angle OCA = 180° \angle BAC \angle BCA + 2(45° - b/2) = \angle ABC + 2(45° - b/2) = 90°.$$

4. Does there exists a positive integer n such that the leftmost digit in the decimal representation of 2^n is 5, while the leftmost digit in the decimal representation of 5^n is 2? (G.A.Galperin)

   Solution. No. Observe that $2^n \cdot 5^n = 10^n$. If in decimal notations of 2^n and 5^n we change all digits except first for zeros each number decreases but no more than in two times. Product of new numbers will be less than 10^n, but not greater than in 4 times, therefore, it is not equal to $10\ldots0$. However if one of the changed numbers had leftmost digit 5, while other one had leftmost digit 2, then product would be equal to $50\ldots0 \cdot 20\ldots0 = 10\ldots0$. Contradiction.

5. Rectangular table of the size 2005×2006 is filled with integers 0, 1, and 2 in such a way that the sum of integers in each row and each column of the table is divisible by 3. What is the maximal number of 1's in such a configuration? (I.I. Bogdanov)

   Solution. Assume there are n zeros and d twos in the table. We have 2005 rows of the length 2006 and 2006 columns of the length 2005. In order to the sum of integers in a row be divisible by 3 there should be at least one two or at least two zeros. Hence $d + n/2 \geq 2005$. Similarly, there should be at least one zero or two twos in each column, consequently $n + d/2 \geq 2006$. Summing these inequalities and dividing by 3/2 we obtain $n + d \geq 2674$, i.e. the number if ones is not greater than $2005 \cdot 2006 - 2674$.

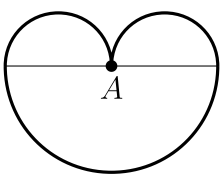
0	0	1	1	...	1	1
1	1	0	0	...	1	1
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	...	2	1
1	1	1	1	...	2	1
1	1	1	1	...	1	2
1	1	1	1	...	2	1

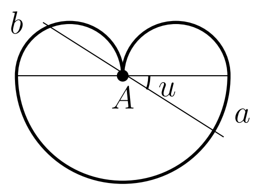
Now consider the table with $n = 1338$ and $d = 1336$. Arrange 1338 zeros in horizontal pairs beginning from the upper left corner (in 669 rows and 1338 columns) and 1336 twos in vertical pairs beginning from the lower right corner (in 1336 rows and 668 columns) and fill all the rest squares with ones (look at the picture to the right). Since 669+1336=2005 and 1338+668=2006 there will be zeros and twos in each row and each column and their amounts will be right for making sums of each row and column divisible by 3. So the answer is: the maximum number of ones is equal to $2005 \cdot 2006 - 2674 = 4022030$.

6. A curvilinear polygon is by definition a polygon whose edges are circle arcs. Does there exist a curvilinear polygon P and a point A on its boundary such that every line passing through A divides the boundary of the polygon into two pieces of equal total length? (S.V. Markelov)

   SOLUTION. Yes, it exists, consider the upper picture. Take an arbitrary segment which has A as its midpoint and draw half of the circle with this segment as diameter, and at the other side of the segment two halves of the circles with halves of the segment as diameters. The perimeter of the figure is equal to the twice the length of the smaller circle.

   It is obvious that initial segment divides the perimeter into two equal parts. Draw any other straight line through the point A denote the angle between this straight line and initial segment by u (measured in radians; look at the lower picture). The length of the upper part upper decreased by the length of the arc a and increased by the length of the arc b. We are going to prove that these lengths are equal. Denote by r the radius of the smaller circle. Since we have the inscribed angle $b = 2ur$. Larger circles radius is $2r$, but the angle for it is central, this means that $a = u \cdot 2r$.





7. George and Jake are each given an identical copy of a 5×5 table filled with 25 pairwise different integers. George chooses the maximal integer in his table, then deletes the row and the column which contain this integer, then chooses the maximal integer in the remaining 4×4 table, then deletes the row and the column, and so on. Jake does the same, but each time he chooses the minimal integer, not the maximal one. Can it be that in the end, the sum of the 5 integers chosen by Jake is

   (a) greater than the sum of the 5 integers chosen by George?

   (b) greater than the sum of any other 5 integers from the original table chosen so that no two of them lie in the same row, not in the same column?

(S.I.Tokarev, A.Y. Avnin)

SOLUTION. (a) No, it cant. Denote the Georges numbers in the order of their selection by b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, and Jakes ones by m_0, m_1, m_2, m_3, m_4. Let us show that if $i + j < 5$, then $b_i \geq m_j$. Number is equal to the amount of rows and columns erased when the number is being chosen. For example, when we are choosing b_1 one row and one column is erased, while for m_3 3 rows and 3 columns. Summing, we obtain that the amount of erased rows and columns is not greater than 4, thus at least one number a was not erased in both cases. George was choosing the maximum numbers, consequently $b_1 \geq a$. Jake was choosing the minimum ones and $a \geq m_3$. Hence $b_1 \geq m_3$. Similarly $b_0 \geq m_4$, $b_2 \geq m_2$, $b_3 \geq m_1$, $b_4 \geq m_0$. This means that Georges sum is not less than Jakes one.

(b) SOLUTION 1. Yes, it can. Consider the left table:

10000	1001	1002	1003	1004
1005	**1000**	101	102	103
1006	104	**100**	11	12
1007	105	13	**10**	2
1008	106	14	3	**1**

111	210	310	410	510
120	221	320	420	520
130	230	331	430	530
140	240	340	441	540
150	250	350	450	551

Here the sum of the numbers chosen by Jake is equal to 11111 (they are marked). Let us show that it is not possible to obtain greater sum. If we do not take the number 10000, then the sum will be less than $1008 \cdot 5 = 5040$, so we have to take it 10000. Similarly after taking 10000 we have to take 1000, then 100, then 10 and finally 1. As a result we obtain Jakes numbers.

Solution. 2. Yes, it can. Consider the right table:

Let us add in the column numbers from any admissible collection. At the leftmost digit sum is equal to the number of diagonal numbers in the collection. At the tens digit for any collection its sum is equal to 1+2+3+4+5 (this digit depends on the row and we have members from each row). Similarly, at the hundreds digit the sum is equal to 1+2+3+4+5 (this digit depend only on the column). Thus the collection of diagonal numbers has the maximum sum. But it is evident that Jake chooses them.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2006.**

1. Assume a convex polygon with 100 vertices is given. Prove that one can chose 50 points inside the polygon in such a way that every vertex lies on a line passing through two of the chosen points. (B.R.Frenkin)

   Solution. Enumerate vertices of the polygon in a clockwise order: 1, ..., 100. Consider polygon consisting of 10 vertices: 1, 2, 21, 22, 41, 42, 61, 62, 81, 82. Its vertices lay on the 5 straight lines 1-22, 21-42, 41-62, 61-82, 81-2, which are given by 5 points of intersections (the first straight line with the second one, the second one with the third one ... the fifth one with the second one, it is evident, that all these points are different). Repeat this for the decagons with numbers of vertices that can be obtained from the numbers of considered decagon by adding 2, 4, ..., 18. This problem has lots of different solutions.

2. Do there exist positive integers n and k such that the decimal representation of 2^n contains the decimal representation of 5^k as its leftmost part, while the decimal representation of 5^n contains the decimal representation of 2^k as its leftmost part? (G.A.Galperin)

   Answer: No, they doesnt exist.

   Solution If for some positive integer n the number 2^n starts by 5^k and the number 5^n by 2^k then this means that $5^k \times 10^s < 2^n < (5^k + 1) \times 10^s$ and $2^k \times 10^l < 5^n < (2^k + 1) \times 10^l$, thus $10^{k+l+s} < 10^n < 10^{k+l+s+1}$, which is impossible. (Last inequality $10^n < 10^{k+l+s+1}$ is true, because $5^k + 1 < 2 \times 5^k$ and $2^k + 1 < 5 \times 2^k$).

3. Consider the polynomial $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Prove that for every positive integer k, the polynomial $P(x)^k$ has at least one negative coefficient. (M.I.Malkin)

   Solution 1. Observe that for any polynomial $P(x)$ its value in the point $x = 1$ is equal to the sum of all coefficients. Consequently, the sum of the coefficients of the polynomial $P(x)^n$ is equal to $P(1)^n = (1+1-3+1+2)^n = 2^n$. But the free term of $P(x)^n$ is equal to $P(0)^n = 2^n$, while the coefficient at x^{4n} is equal to 1, and their sum is already $2^n + 1$. Hence one of the remaining coefficients of $P(x)^n$ is negative.

   Solution 2. The coefficient at x^3 for the polynomial $P(x)^n$ can be obtained by adding n items $2^{n-1}x^3$ and $n(n-1)$ items $-3x^2 \times x \times 2^{n-2}$, consequently this coefficient is equal

   $$n \cdot 2^{n-1} - 3n(n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(-3n^2 + 5n) = n \cdot 2^{n-2}(-3n + 5),$$

   which is negative number for an arbitrary integer $n \geq 2$.

   Solution 3. Observe that $P(0)^n = P(1)^n = 2^n$. But any polynomial F with positive coefficients is strongly monotonic when $x > 0$ (i.e. $x > y > 0 \implies F(x) > F(y) > 0$). This means that polynomial $P(x)^n$ has at least one negative coefficient.

4. Consider a triangle ABC, take the angle bisector AA', and assume given a point X on the interval AA'. Assume that the line BX intersects the line AC in a point denoted B', while the line CX intersects the line AB in a point denoted C'. Assume also that the intervals $A'B'$ and CC' meet in a point denoted P, and the intervals $A'C'$ and BB' meet in a point denoted Q. Prove that the angles PAC and QAB are equal. (M.A. Volchkevich)

Solution. Denote by $h_M(l)$ the distance from the point M to the straight line l. We will use the following simple

Lemma 1. *if three rays OL, OM and ON, are given then for all points K on the ray OM the ration $h_K(OL)/h_K(ON)$ is the same.*

For the solution of the given problem it is enough to prove that

$$h_P(AC)/h_P(AA') = h_Q(AB)/h_Q(AA')$$

(this equality together with equality of angles $A'AC$ and $A'BC$ means that angles PAC and QAB are equal). Using lemma we obtain $h_P(BC)/h_P(AC) = h_X(BC)/h_X(AC)$ and $h_Q(BC)/h_Q(AB) = h_X(BC)/h_X(AB)$, consequently (since $h_X(AC) = h_X(AB)$, because X lays on the bisector AA') $h_P(BC)/h_P(AC) = h_Q(BC)/h_Q(AB)$. So it is enough to prove that $h_P(BC)/h_P(AA') = h_Q(BC)/h_Q(AA')$. By lemma 1 the latter is equivalent to $h_{B'}(BC)/h_{B'}(AA') = h_{C'}(BC)/h_{C'}(AA')$.

Denote $\angle BAC = 2\alpha$. Observe that $h_{B'}(AB)/h_{B'}(AA') = \sin 2\alpha/\sin\alpha = h_{C'}(AC)/hC'(AA')$. Now it is enough to prove that $h_{B'}(BC)/h_{B'}(AB) = h_{C'}(BC)/h_{C'}(AC)$. Applying lemma again this transforms into $h_X(BC)/h_X(AB) = h_X(BC)/h_X(AC)$, which is evident (since $h_X(AC) = h_X(AB)$). The proof is finished.

5. Prove that there exist infinitely many pairs of integers with the following property: in the decimal representation of each integer, each digit is greater or equal to 7, and the product of the two integers in the pair is also an integer whose decimal representation has no digits less than 7. (S.I.Tokarev)

   Solution 1. All the pairs ($9\ldots98877$, $8\ldots87$) where in the first and second numbers amounts of the digits are equal are right for this problem. Their product (it can be shown using multiplication "in column") is equal to $8\ldots878887\ldots79899$ (there are $n-3$ eights at the beginning, then 7888, and then $n-3$ sevens).

   Solution 2. Consider numbers 877…7 (k-1 sevens) and 899…9987 (k-3 nines), their product is equal to the 7899…998788…8899 ($k-4$ nines and $k-2$ eights).

6. Twelve grasshoppers sit on a circle in 12 pairwise distinct points. These points split the circle into 12 arcs. When a signal is given, the grasshoppers jump simultaneously; each one jumps clockwise, from the endpoint of his arc to its midpoint. Thus 12 news are formed; then the signal is repeated, and so on. Is it possible that at least one grasshopper returns to his original position after he does

   (a) 12 jumps?

   (b) 13 jumps?

   (A.K.Tolpygo)

   Answer: (a),(b) No, it is not.

   (a) Solution 1. Let us call 12 simultaneous jumps of grasshoppers "turn". Assume that one of the grasshoppers (call him first) returned to the starting point (denote it by A) after 12 turns. Observe that order of the grasshoppers on the circle doesnt change. Thus the remaining 11 grasshoppers have jump over the point A (at least once) before the first grasshopper returns there. But in one turn not more than one grasshopper jumps over the point A, while in the first turn no grasshoppers jump over the point A! Consequently in 12 turns no more than 11 grasshoppers can jump over the point A, and the first one is not able to come back.

(a) SOLUTION 2. Observe that our situation is equivalent to the following one: we arrange the infinite amount of grasshoppers along the ray OM at the beginning placing 12 grasshoppers, just unrolling the circle into a segment by cutting it at the starting point of the grasshopper #1 (assume that clockwise bypass of the circle coincides with positive direction of the axis Ox). Then we think that the first grasshopper starts only at the left end of the segment (point 0). And attach to the right end the same segment with grasshoppers at the same points and so on (we obtained the ray with marked points $A_1, A_2, \dots$). In this new model grasshoppers jump in positive direction into the midpoint of the segment, connecting this and next grasshopper. Now we want to prove that after 12 jumps the first grasshopper is to the left from the point A_{13}.

Let us prove using induction that after n jumps the i-th grasshopper is at the centre of mass of the system

$$\big((A_i, C(0,n)g), (A_{i+1}, C(1,n)g), \dots, (A_{i+n}, C(n,n)g)\big)$$

(the first factor is the position of object, second is its mass, $C(k,n) = n!/(k! \cdot (n-k)!)$).

It is obvious that after first jump this proposition is true. Assume that after n jumps the i-th grasshopper is at the centre of mass of the system

$$\big((A_i, C(0,n)g), (A_{i+1}, C(1,n)g), \dots, (A_{i+n}, C(n,n)g)\big)$$

and the $(i+1)$-th at the centre of mass of

$$\big((A_{i+1}, C(0,n)g), (A_{i+2}, C(1,n)g), \dots, (A_{i+n+1}, C(n,n)g)\big).$$

Then the midpoint of the segment connecting them has the same coordinates as the centre of mass of the system

$$\Big(\text{C. of M.}\big((A_i, C(0,n)g), (A_{i+1}, C(1,n)g), \dots, (A_{i+n}, C(n,n)g)\big),$$
$$\text{C. of M.}\big((A_{i+1}, C(0,n)g), (A_{i+2}, C(1,n)g), \dots, (A_{i+n+1}, C(n,n)g)\big)\Big)$$

which is the same the centre of mass of

$$\big((A_i, C(0,n)g), (A_{i+1}, (C(1,n) + C(0,n))g), \dots,$$
$$(A_{i+n}, (C(n,n) + C(n-1,n))g)), (A_{i+n+1}, C(n,n)g)\big),$$

and this is the centre of mass of the system $(A_i, C(0, n+1)g), \dots (A_i + n + 1, C(n+1, n+1)g)$. Proposition is proved.

The proved proposition means that after 12 jumps the first grasshopper is in the centre of mass of the system $((A_1, C(0,12)g), \dots, (A_{13}, C(12,12)g)$. It is obvious that this point is inside the segment $[A_1, A_{13}]$.

(b). In this case after 13 jumps the first grasshopper is in the centre if mass of the system $((A_1, C(0,13)g), \dots, (A_{14}, C(13,13)g)$. But the same point can be represented as the centre of mass of two points with some masses in them: the first one is

$$\text{C. of M. } ((A_2, C(1,13)g), \dots, (A_{13}, C(12,13)g),$$

and the second one is

$$\text{C. of M. } ((A_1, C(0,13)g), (A_{14}, C(13,13)g).$$

It is evident that the first point is inside the segment $[A_1, A_13]$. Also $C(0,13) = C(13,13)$ and $A_1A_2 = A_{13}A_{14}$, hence the second point is inside the segment $[A_1, A_{13}]$ too. Consequently and the centre of mass of these two points with arbitrary masses is inside the segment $[A_1, A_{13}]$.

7. An ant crawls along a fixed closed trajectory along the edges of a dodecahedron, never turning back. The trajectory contains each edge of the dodecahedron exactly twice. Prove that the ant passes at least one edge in the same direction both times. (Reminder: a dodecahedron is a polyhedron with 20 vertices, 30 edges and 12 equal pentagonal faces; 3 faces meet at each vertex.) (A.V. Shapovalov)

   Solution. Assume the trajectory passing through each edge in both directions exist. Consider a vertex A and three its neighbors B, C, D. Assume that at some moment of time the ant comes to the point A from the point B then after it he crawls to the point C or D. If he chose C, then at some other moment he comes from C to A and turns to D (otherwise there is $D \to A \to D$ in the trajectory, which is impossible). Similarly, when the ant comes from D to A he turns to B. Summing up, we proved that there are 2 kinds of crossroads ($B \to A \to C$, $C \to A \to D$, $D \to A \to B$) and (if at the beginning the ant choose not C but D) ($B \to A \to D$, $D \to A \to C$, $C \to A \to B$). This two kinds of crossroads can be described using the simple rule: in the first case ant always turns left at the crossroad, and in the second one he always turns right. Now mark out for each crossroad its type. Observe that if the ant starts his movement from some vertex going along some edge, then all its trajectory can be reconstructed using only these marks. So each collection of the marks on the vertices corresponds to some collection of closed and non-intersecting (by an edge, passing in the same direction) trajectories (although, we do not clam that this collection of trajectories is unique, we do not need this).

   We assume that at the beginning there is one such closed trajectory passing through each edges two times. Now by turns change the marks on the vertices with the rule "turn to the left" to the marks "turn to the right". It is possible that after the very first operation our big trajectory splat into multiple. But it is evident that some closed trajectories that we obtain are unambiguously defined. Let us study how the amount of the trajectories can change when we change the marks. We want to prove that it remains odd. Suppose we have a crossroad ($B \to A \to C$, $C \to A \to D$, $D \to A \to B$). Consider different cases of the trajectories passing through A configurations:

   (a) We have 3 different closed trajectories ($B \to A \to C \to \cdots \to B$), ($C \to A \to D \to \cdots \to C$), and ($D \to A \to B \to \cdots \to D$), then after the mark is changed we obtain ($C \to A \to B \to \cdots \to D \to A \to C \to \cdots \to B \to A \to D \to \cdots \to C$), so in this case total amount decreased by two and remained odd.

   (b) We have 2 closed trajectories ($B \to A \to C \to \dots B$) and ($C \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to B \to \cdots \to C$), after the mark change we obtain ($C \to A \to B \to \cdots \to C$) and ($B \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to C \to \cdots \to B$), total amount does not change.

   (c) We have one closed trajectory ($B \to A \to C \to \cdots \to C \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to B \to \cdots \to B$) then after change we obtain ($B \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to C \to \cdots \to C \to A \to B \to \cdots \to B$). Total amount does not change again.

Three more cases can be obtained by reversing the considered ones. And all other cases are just the same after the replacement of the notation. We proved that total amount of trajectories remains odd. But when all crossroads have marks "turn to the left" on them, the only way to divide the dodecahedron into closed trajectories is to go round each facet along its boundary (i.e. each trajectory consists of 5 edges and goes round one facet). It is evident that in this case we have 12 trajectories. We obtained the contradiction with oddity of their amount.