Третий турнир городов

1981-82 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

7-8 классы

Задача 1.(5)
Найти все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.
М. Левин

Задача 2.(5)
В четырёхугольнике длины всех сторон и диагоналей меньше 1 м.
Доказать, что его можно поместить в круг радиуса 0,9 м.
Фольклор

Задача 3.(6)
Доказать, что в бесконечной последовательности целых чисел, попарно различных и больших единицы, найдутся сто чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.
А. Анджанс, Рига

Задача 4.(8)
В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с десятью городами (если A соединен с B, то B соединен с A). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками).
Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой сохранится.
Фольклор

Задача 5.(3+5)
Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, ...
Существует ли арифметическая прогрессия
а)(3) длины 5;
б)(5) сколь угодно большой длины,
составленная из членов этой последовательности? (если решены оба пункта, то решение оценивается в 5 очков).
Г. Гальперин, Москва

1981-82 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

9-10 классы

Задача 1.
а)(4) Доказать, что для любых положительных чисел x_1, x_2, ..., x_k ($k>3$) выполняется неравенство:
$(x_1/(x_k+x_2)) + (x_2/(x_1+x_3)) + ... + (x_k/(x_{k-1}+x_1)) \geq 2$
б)(3) Доказать, что это неравенство ни для какого $k>3$ нельзя усилить, т.е. доказать, что для каждого фиксированного k нельзя заменить двойку в правой части на большее число так, чтобы полученное неравенство было справедливо для любого набора из k положительных чисел.
А. Прокопьев

Задача 2.(14)
Квадрат разбит на K^2 равных квадратиков. Про некоторую ломаную известно, что она проходит через центры всех квадратиков (ломаная может пересекать сама себя). Каково минимальное число звеньев у этой ломаной?
А. Анджанс, Рига

Задача 3.(3)
Доказать, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдётся бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.
А. Анджанс, Рига

Задача 4.(8)
Многочлен P(x) со старшим коэффициентом, равным 1, обладает тем свойством, что среди значений, принимаемых им при натуральных значениях аргумента, встречаются все числа вида 2^m с натуральным m.
Докажите, что этот многочлен - первой степени.
Фольклор

Задача 5.
Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, ...
Существует ли арифметическая прогрессия
а)(2) длины 5;
б)(3) сколь угодно большой длины,
составленная из членов этой последовательности?
(решение обоих пунктов оценивается в 3 очка)
Г. Гальперин, Москва