32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 10. oktobar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U Pitagorinoj tablici množenja uočen je pravougaoni ram širine jednog polja (kvadratića), pri čemu se svaka stranica rama sastoji od neparnog broja polja. Polja (kvadratići) rama naizmenično su obojeni u dve boje – crnu i belu. Dokažite da je zbir brojeva u crnim poljima jednak zbiru brojeva u belim poljima. (Pitagorina tablica množenja je pravougaona tablica izdeljena na kvadratiće, u kojoj na preseku m-te vrste i n-te kolone u kvadratiću stoji broj mn, za ma koje prirodne brojeve n i n)

2. (4 poena) Jednakokraki trapez opisan je oko kružnice. Dokažite da simet-rala tupog ugla tog trapeza deli trapez na dva dela jednakih površina.

3. (4 poena) Na šahovskoj tabli 8×8 nalazi se kocka (čija se donja strana poklapa sa jednim od polja table). Nju "kotrljamo" po tabli, prevrćući je preko ivica, tako da kocka stane na svako polje table (na nekima je možda bila i nekoliko puta). Da li se moglo desiti da neka od strana kocke nijednom nije "pala" (ležala) na tabli?

4. (4 poena) U nekoj školi više od 90% učenika zna engleski i nemački jezik, a više 90% učenika zna engleski i francuski jezik. Dokažite da među učenicima koji znaju nemački i francuski jezik ima više od 90% onih koji znaju engleski jezik.

5. (4 poena) Krajnje tačke N tetiva podelile su kružnicu na $2N$ lukova jedinične dužine. Poznato je da svaka od tetiva deli kružnicu na dva luka s parnim mernim brojem dužine. Dokažite da je N paran broj.

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 10. oktobar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. Bankomat zamenjuje monete (kovani novac): dublone u pistone i obrnuto. Piston vredi s dublona, a dublon $1/s$ pistona, gde nije obavezno da s bude ceo broj. U bankomat se može ubaciti ma koji broj moneta iste vrste (izgleda), posle čega on u zamenu izbacuje moneta druge vrste, zaokrugljujući njihov broj na najbliži ceo broj (ako su dva najbliža broja, bira se veći od njih).

a) (2 poena) Može li se dogoditi tako da, zamenivši nekoliko dublona za pistone, a zatim, zamenivši dobijene pistone za dublone, dobijemo više dublona nego što ih je bilo u početku?

b) (3 poena) Ako je odgovor potvrdan, može li se onda dogoditi da se dobijeni broj dublona još uveća ako s njima obavljamo istu takvu operaciju (tj. ako proceduru primenjujemo na prethodno dobijene dublone)?

2. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ međusobno su normalne i seku se u tački O. Poznato je da je zbir poluprečnika kružnica, upisanih u trouglove AOB i COD, jednak zbiru poluprečnika kružnica, upisanih u trouglove BOC i DOA. Dokažite:

a) (2 poena) da je četvorougao $ABCD$ tangentni (opisani);

b) (3 poena) da je četvorougao $ABCD$ simetričan u odnosu na jednu od svojih dijagonala.

3. (5 poena) Policijska stanica nalazi se na pravolinijskom putu, koji je na obe strane beskonačan. Neko je ukrao stari policijski automobil, čija maksimalna brzina čini 90% maksimalne brzine novog automobila. U nekom trenutku u stanici su odlučili da u poteru za kradljivcem pošalju policajca sa novim policijskim automobilom. Ali evo nevolje: policajac nije znao ni kada je automobil bio ukraden, ni na koju stranu je putem kradljivac otišao. Može li policajac uhvatiti kradljivca? (Određenije: ima li policajac strategiju koja mu garantuje da će uhvatiti kradljivca, bez obzira kako ovaj postupa?).

4. (5 poena) Kvadratna tabla $n \times n$ podeljena je na n^2 pravougaonih polja sa $n-1$ horizontalnih i $n-1$ vertikalnih pravih. Polja table obojena su kao šahovska tabla. Zna se da su na jednoj dijaginali sva polja (njih n) crna i kvadratna. Dokažite da ukupna površina svih crnih polja table nije manja od ukupne površine svih belih polja.

5. (5 poena) Na turniru učestvuje 55 boksera po sistemu "pobeđeni ispada". Borbe (mečevi) su se odvijale jedna za drugom. Poznato je da se kod učesnika svake borbe (meča) broj prethodnih pobeda razlikovao najviše za 1. Koliko najviše borbi (mečeva) je mogao imati pobednik turnira?

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 24. oktobar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U ravni je data prava. Pomoću petodinarke odredite dve tačke na nekoj pravoj koja je normalna na datu pravu. Pri tome su dopuštene sledeće operacije: obeležiti tačku, staviti petodinarku tako da ona bude na njenom obodu i nacrtati oko nje kružnicu; obeležiti dve tačke (na rastojanju manjem od prečnika petodinarke), staviti petodinarku tako da te tačke budu na njenom obodu i okružiti petodinarku. Nema mogućnosti da se petodinarka tačno postavi tako prema pravoj da je ona dodiruje.

2. (5 poena) Pera ume da na ma kojoj duži određuje tačke koje tu duž polove ili je dele u odnosu n:(n+1), gde je n ma koji prirodan broj. Pera tvrdi da je za to dovoljno da na ma kojoj duži odredi tačku koja tu duž deli u datom racionalnom odnosu. Da li je on u pravu?

3. (8 poena) Na kružnoj stazi 10 motociklista startovali su istovremeno iz jedne tačke i pošli su na istu stranu sa različitim stalnim brzinama. Ako se posle starta dvojica motociklista ponovo nađu u istoj tački nazvaćemo to susretom. Do podne svaka dva motociklista susrela su se bar jednom, pri čemu se nikoja tri ili više njih nisu susretala istovremeno. Dokažite da je do podne ma koji motociklista imao ne manje od 25 susreta.

4. (8 poena) Karirani pravougaonik izdeljen je na dvodelne domine (2×1). U svakoj domini povučena je jedna od dve dijagonale. Pokazalo se da je podela bila takva da nikoje dve dijagonale nemaju zajedničke krajeve. Dokažite da su tada tačno dva od četiri temena pravougaonika krajevi dijagonala.

5. (8 poena) Imamo petougao. Dužinu svake njegove stranice podelimo zbirom dužina svih ostalih stranica. Zatim saberimo dobijene razlomke. Dokažite da će dobijeni zbir uvek biti manji od 2.

6. (8 poena) U oštrouglom trouglu ABC na visini BH izabrana je proizvoljna tačka P. Tačke A' i C' su središta stranica BC i AB (tim redom). Normala iz A' na CP seče normalu iz C' na AP u tački K. Dokažite da je tačka K jednako udaljena od A i C.

7. (12 poena) Za okruglim stolom sedi N vitezova. Svako jutro čarobnjak Merlin raspoređuje ih u drugačijem redosledu. Počevši od drugog dana Merlin je dopustio vitezovima da u toku dana naprave koliko god žele menjanja mesta ali na sledeći način: dva suseda zamenjuju mesta samo ako nisu bili susedi prvog dana. Vitezovi nastoje da posedaju u istom redosledu kao i nekog od prethodnih dana: tada se sednice prekidaju. Koliko najviše dana Merlin garantovano može organizovati sednice? (Razmeštaje koji se jedan iz drugog dobijaju rotacijom smatramo da su isti). Merlin ne sedi za stolom sa vitezovima).

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 24. oktobar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. U nekoj zemlji ima 100 gradova (gradove uzmite kao tačke u ravni). U priručniku za svaki par gradova nalazi se zapisano koliko je rastojanje među njima (ukupno 4950 zapisa).

a) (2 poena) Jedan zapis je izbrisan. Može li se uvek on rekonstruisati na osnovu ostalih?

b) (3 poena) Neka je obrisano *k* zapisa, a poznato je da u toj državi nikoja tri grada ne leže na istoj pravoj. Za koju najveću vrednost *k* se uvek mogu jednoznačno odrediti izbrisani zapisi?

2. (6 poena) Na kružnoj stazi $2N$ motociklista startovali su istovremeno iz jedne tačke i pošli su na istu stranu sa različitim stalnim brzinama. Ako se posle starta dvojica motociklista ponovo nađu u istoj tački nazvaćemo to susretom. Do podne svaka dva motociklista susrela su se bar jednom, pri čemu se nikoja tri ili više njih nisu susretala istovremeno. Dokažite da je do podne ma koji motociklista imao ne manje od N^2 susreta.

.**3.** (6 poena) Imamo mnogougao. Dužinu svake njegove stranice podelimo zbirom dužina svih ostalih stranica. Zatim saberimo dobijene razlomke. Dokažite da će dobijeni zbir uvek biti manji od 2.

4. Dva čarobnjaka bore se jedan protiv drugog. Na početku oba lebde nad morem na visini 100 m. Čarobnjaci se naizmenično pridržavaju zaklatve tipa "smanjiti visinu lebdenja nad morem za *a* m kod sebe i za *b* m kod protivnika", gde su *a* i *b* realni brojevi i $0<a<b$. Broj zakletvi je isti za oba čarobnjaka i one se mogu koristiti ma kojim redom i više puta. Čarobnjak pobeđuje u duelu, ako je posle ma kojeg "poteza" njegova visina nad morem pozitivna, a kod suparnika – nije. Postoji li takav komplet (niz) zakletvi da drugi čarobnjak može sigurno da pobedi, ma kako postupao prvi, ako je pri tome broj zakletvi u tom kompletu (nizu):

a) (2 poena) konačan;

b) (5 poena) beskonačan?

5. (8 poena) Četvorougao *ABCD* je upisan u kružnicu s centrom *O*, pri čemu tačka *O* ne leži ni na jednoj dijagonali tog četvorougla. Zna se da centar opisane kružnice oko trougla *AOC* leži na pravoj *BD*. Dokažite da centar opisane kružnice oko trougla *BOD* leži na pravoj *AC*.

6. (12 poena) U svakom polju tablice 1000×1000 stoji nula ili jedinica. Dokažite da se može bilo precrtati 990 vrsta tako da u svakoj koloni bude bar jedna neprecrtana jedinica, bilo precrtati 990 kolona tako da u svakoj vrsti bude bar jedna neprecrtana nula.

7. (14 poena) Kvadrat *ABCD* razrezan je na jednake pravougaonike s celobrojnim dužinama stranica. Figura *F* je unija svih pravougaonika koji imaju zajedničke tačke sa dijagonalom *AC*. Dokažite da *AC* deli površ figure *F* na dva dela jednakih površina.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 27. februar 2011. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Po kružnici su napisani svi celi brojevi od 1 do 2010 i to tako da pri kretanju u smeru kazaljke na satu brojevi naizmenično čas rastu, čas opadaju. Dokažite da postoje neka dva broja koji stoje jedan do drugog čija je razlkika parna.

2. (4 poena) Pravougaonik je razdeljen na 121 polje sa deset vertikalnih i deset horizontalnih pravih. Kod 111 polja obimi su celi brojevi. Dokažite da su i obimi ostalih deset polja celi brojevi.

3. (5 poena) Dužina odrasle gliste je 1 metar. Odrasla glista se može razdeliti na dva dela u bilpo kojem odnosu dužina. Pri tome nastaju dve nove gliste, koje odmah počinju da rastu brzinom 1 metar na čas. Kada dužina gliste dostigne 1 metar, ona postaje odrasla i prestaje dalje da raste. Mogu li se od jedne odrasle gliste dobiti 10 odraslih glista za manje od 1 sat?

4. (5 poena) Dat je konveksan četvorougao. Ako povučemo ma koju njegovu dijagonalu ona će ga podeliti na dva jednakokraka trougla, a ako odjednom povučemo obe njegove dijagonale, podeliće ga na četiri jednakokraka trougla. Da li je taj četvorougao obavezno kvadrat?

5. Zmaj je zarobio viteza i zatvorio ga u tamnicu. Dao mu je 100 raznih novčića od kojih je tačno polovina magičnih. Koji novčići su magičnii, zna samo zmaj. Svakog dana vitez razdvaja sve novčiće na dve gomile (koje ne moraju biti jednake). Ako u gomilama bude isti broj običnih ili isti broj magičnih novčića, zmaj će osloboditi viteza. Može li se vitez sigurno osloboditi za ne manje od:

a) (2 poena) 50 dana?

b) (3 poena) 25 dana?

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 27. februar 2011. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Strane konveksnog poliedra su slični trouglovi. Dokažite da taj poliedar ima dva para jednakih strana (jedan par jednakih strana i još jedan par jednakih strana).

2. (4 poena) Dužina odrasle gliste je 1 metar. Odrasla glista se može razdeliti na dva dela u bilo kojem odnosu dužina. Pri tome nastaju dve nove gliste, koje odmah počiwu da rastu brzinom 1 metar na čas. Kada dužina gliste dostigne 1 metar, ona postaje odrasla i prestaje daqe da raste. Mogu li se od jedne odrasle gliste dobiti 10 odraslih glista za mawe od 1 sat?

3. (4 poena) Po kružnici je raspore|eno 100 belih kamenčića. Dat je ceo broj *k* takav da je . U jednom potezu dopušteno je izabrati bilo kojih *k* kamenčića pore|anih jedan za drugim, od kojih su prvi i posledwi beli i samo wih obojiti crnom bojom. Za koje *k* možemo za nekoliko takvih poteza obojiti svih 100 kamenčića u crnu boju?

4. (5 poena) četiri normale, spuštene iz temena konveksnog petougla na suprotne stranice, seku se u jednoj tački. Dokažite da i peta normala mora proći kroz tu tačku

5. (5 poena) U jednoj zemqi ima 100 gradova i nekoliko puteva. Svaki put povezuje neka dva grada. Putevi se ne seku. Iz svakog grada može se stići u ma koji drugi grad krećući se tim putevima. Dokažite da je moguće neke puteve proglasiti glavnim, tako da iz svakog grada polazi neparan broj glavnih puteva.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 13. mart 2011. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Da li postoji šestougao koji se jednom pravom može razdeliti na četiri podudarna trougla?

2. (4 poena) Kroz koordinatni početak prolaze prave (uključujući i koordinatne ose) koje dele koordinatnu ravan na uglove od po 1^{o}. Nađite zbir apscisa tačaka preseka tih pravih sa pravom .

3. (5 poena) Baron Minhauzen ima 50 tegova. Mase svih tegova su izražene različitim prirodnim brojevima koji ne prelaze 100, a zbir masa svih tegova je paran broj. Baron tvrdi da ne postoji deo tih tegova koji se može staviti na jedan tas terazija, a ostali tegovi na drugi tas terazija, tako da terazije budu u ravnoteži. Da li je Baron u pravu?

4. (6 poena) Dokažite da se za ma koji prirodni broj N mogu naći dva para prirodnih brojeva takvih da su zbirovi brojeva svakog para parova jednaki, a da je količnik proizvoda brojeva jednog para i proizvoda brjeva drugog para jednak N (tj. da je jedan proizvod N puta veći od drugog).

5. (7 poena) Dat je oštrougli trougao ABC, a AA_1 i BB_1 su njegove visine. Iz tačke A_1 spuštene su normale na prave AC i AB, a iz tačke B_1 spuštene su normale na prave BC i BA . Dokažite da podnožja tih normala obrazuju jednakokraki trapez.

6. (10 poena) Dva mrava su se kretala (milela) svaki po svojoj zatvorenoj putanji na tabli 7×7. Svaki mrav se kretao samo po ivicama polja i prošao kroz svako od 64 temena na toj tabli tačno jedanput. Koji je najmanji mogući broj ivica po kojima su prošla oba mrava?

7. (10 poena) Data je kvadratna tablica. U svakom polju te tablice upisan je po jedan broj. Zna se da je u svakom redu (vrsti) zbir dva najveća broja jednak a, a u svakoj koloni te tablice zbir dva najveća broja jednak b. Dokažite da je $a=b$.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 13. mart 2011. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Baron Minhauzen ima 50 tegova. Masa svakog od tegova je izražena različitim prirodnim brojem koji ne prelazi 100, a zbir masa svih tegova je paran broj. Baron tvrdi da nije moguće deo tih tegova staviti na jedan tas terazija, a ostale tegove na drugi tas terazija, tako da terazije budu u ravnoteži. Da li je Baron u pravu?

2. (6 poena) U prostoru sa Dekartovim sistemom koordinata dat je pravougli paralelepiped čija temena imaju celobrojne koordinate. Njegova zapremina je 2011. Dokažite da su ivice tog paralelepipeda paralelne koordinatnim osama.

3. Od drvene grede oblika trostrane prizme sa dve strane odsekli su (ravnom testerom) po komad. Rezovi nisu doticali ni osnove prizme, ni jedan drugog.

a) (3 poena) Mogu li preseci biti slični, ali ne i podudarni trouglovi?

b) (4 poena) Može li jedan presek biti jednakostraničan trougao sa stranicom 1, a drugi jednakostranični trougao sa stranicom 2?

4. Dato je N plavih i N crvenih štapića, pri čemu je zbir dužina plavih štapića jednak zbiru dužina crvenih štapića. Zna se da se od plavih štapića može složiti N-tougao, a takođe i od crvenih. Može li se uvek izabrati jedan plavi i jedan crveni štapić i prefarbati ih (plavi u crvenu boju, a crveni u plavu), tako da se ponovo od plavih može složiti N-tougao, a od crvenih takođe? Rešite zadatak:

a) (4 poena) za N=3.

b) (4 poena) za proizvoljan prirodan broj N veći od 3.

5. (8 poena) Kraci AB i CD trapeza $ABCD$ su istovremeno i tetive (tim redom) kružnica ω_1 i ω_2 koje se dodiruju spolja. Veličine odgovarajućih lukova kružnica koji odgovaraju tetivama AB i CD su α i β. Kružnice ω_3 i ω_4 takođe imaju za teteive AB i CD (tim redom). Njihovi lukovi AB i CD takođe se se nalaze sa iste strane tetiva kao i odgovarajuće tetive prve dve kružnice, a veličine su im β i α. Dokažite da se kružnice ω_3 i ω_4 takođe dodiruju.

6. (8 poena) Data je kvadratna tablica u čijem je svakom polju zapisan po jedan broj. Zna se da je u svakoj vrsti te tablice zbir dva najveća broja jednak a, a u svakoj koloni zbir dva najveća broja jednak b. Dokažite da je $a=b$.

7. (11 poena) Dve firme naizmenično angažuju programere, među kojima ima 11 genijalnih. Prvog programera svaka firma bira proizvoljno, a svaki sledeći treba da poznaje nekog od ranije angažovanih u toj firmi. Ako firma ne može da angažuje programera po tim pravilima, ona prekida prijem, a druga može da nastavi. Programer se može angažovati za rad najviše u jednoj firmi. Spisak programera i wihovih poznanstava se zna unapred, uključujući i informaciju o tome ko je genije. Mogu li se poznanstva urediti tako da firma, koja kao druga nastupa u toj igri, može angažovati 10 genija, bez obzira kako postupa prva firma?

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 10 октября 2010 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы	задачи
4	1. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета — черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках. (Пифагорова таблица умножения — это клетчатая таблица, в которой на пересечении m-й строки и n-го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).) *С. Прика*
4	2. Равнобокая трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам. *Р. К. Гордин*
4	3. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске? *А. В. Шаповалов*
4	4. В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки, и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык. *Фольклор, предложил А. Шень*
4	5. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно. *В. В. Произволов*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 10 октября 2010 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
	1. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистоли и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон — $1/s$ пистолей, где s — не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).
2	а) Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистоли, а затем обменяв полученные пистоли на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было вначале?
3	б) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?
	Л. Стунжас
	2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BOC и DOA. Докажите, что
2	а) четырехугольник $ABCD$ — описанный;
3	б) четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей.
	П. А. Кожевников
5	3. Полицейский участок расположен на прямой дороге, бесконечной в обе стороны. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали вдогонку полицейского на новой полицейской машине. Однако вот беда: полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в каком направлении вдоль дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?
	Г. А. Гальперин
5	4. Квадратная доска $n \times n$ разделена на n^2 прямоугольных клеток $n-1$ горизонтальными и $n-1$ вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все n клеток черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток доски не меньше общей площади белых.
	П. А. Кожевников
5	5. 55 боксеров участвовали в турнире по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?
	А. В. Шаповалов

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 24 октября 2010 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи	
4	1.	На плоскости дана прямая. С помощью пятака постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятака), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась. *Г. Фельдман*
5	2.	Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он? *Б. Р. Френкин*
8	3.	На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее 25 встреч. *Б. Р. Френкин*
8	4.	Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные домино. В каждом домино провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей. *А. В. Шаповалов*
8	5.	Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2. *Г. А. Гальперин*
8	6.	В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр из A' на CP пересекается с перпендикуляром из C' на AP в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C. *Ф. А. Ивлев*
12	7.	За круглым столом заседают N рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.) *М. В. Прасолов*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 24 октября 2010 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. В некой стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

2 а) Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным?

3 б) Пусть стерлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи?

И. И. Богданов

6 2. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

Б. Р. Френкин

6 3. Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Г. А. Гальперин

4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

2 а) конечно;

5 б) бесконечно?

И. В. Митрофанов

8 5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC.

Ф. А. Ивлев

12 6. В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что в любом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в любой строке будет хотя бы один невычеркнутый нуль.

А. Ромащенко

14 7. Квадрат $ABCD$ разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура F является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю AC. Докажите, что AC делит площадь фигуры F пополам.

В. В. Произволов

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 27 февраля 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, четна. *Б. Р. Френкин*
4	2.	Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных десяти клеток периметры целые. *А. В. Шаповалов*
5	3.	Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час? *М. А. Хачатурян*
5	4.	Дан выпуклый четырехугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырехугольник — квадрат? *В. Шевяков*
	5.	Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем
2	а)	на 50-й день?
3	б)	на 25-й день? *жюри по мотивам задачи А. В. Шаповалова*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 27 февраля 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Грани выпуклого многогранника — подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней). *В. В. Произволов*
4	2. Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час? *М. А. Хачатурян*
4	3. По кругу лежат 100 белых камней. Дано целое число k в пределах от 1 до 50. За ход разрешается выбрать любые k подряд идущих камней, первый и последний из которых белые, и покрасить первый и последний камни в черный цвет. При каких k можно за несколько таких ходов покрасить все 100 камней в черный цвет? *А. Бердников*
5	4. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку. *фольклор, предложил А. А. Заславский*
5	5. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог. *А. Шень*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
4	1. Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника? *Н. П. Стрелкова*
4	2. Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$. *А. В. Шаповалов*
5	3. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой? *А. К. Толпыго*
6	4. Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз. *Б. Р. Френкин*
7	5. Дан остроугольный треугольник ABC; AA_1, BB_1 — его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на стороны AC и AB, а из точки B_1 опустили перпендикуляры на стороны BC и BA. Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию. *Г. Фельдман*
10	6. Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7. Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи? *А. А. Заславский*
10	7. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$. *R. B. Bapat*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?

А. К. Толпыго

6 2. В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.

М. И. Малкин

3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

3 а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

4 б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?

А. В. Шаповалов — п. а), П. В. Сергеев — п. б)

4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N-угольник, и из красных — тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N-угольник, и из красных — тоже? Решите задачу

4 а) для $N = 3$;

4 б) для произвольного натурального N, большего 3.

А. В. Грибалко

8 5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Ф. А. Ивлев

8 6. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

R. B. Bapat

11 7. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен, включая информацию о том, кто гении. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

А. В. Шаповалов

32-й Международный математический Турнир городов

2010/11 учебный год

Решения задач

Весенний тур

Базовый вариант, младшие

1. [3] По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, четна. (*Б. Френкин*)

Решение. Если все ребра многогранника равны, то, очевидно, равны и все его грани, а поскольку их не меньше четырех, найдутся и две нужные нам пары равных граней. Если же не все ребра многогранника равны, то, как легко понять, искомыми будут пара граней, примыкающих к наименьшем ребру, и пара граней, примыкающих к наибольшему ребру.

Пусть все разности рядом стоящих чисел нечетны. Тогда четные и нечетные числа по кругу чередуются. Но это значит, что либо каждое четное число больше обоих соседних нечетных, либо каждое четное число меньше обоих соседних нечетных. В первом случае не найдется места для числа 2, а во втором – для числа 2010. Противоречие.

2. [4] Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных десяти клеток периметры целые. (*А. Шаповалов*)

Решение. Назовем клетки, про периметры которых известно, что они целочислены, *известными*, а остальные клетки – *неизвестными*. Поскольку строк и столбцов в получившейся таблице – по 11, а неизвестных клеток всего 10, мы можем отметить строку и столбец, в которых все клетки – известные. Возьмем неизвестную клетку K. Легко проверить, что ее периметр P равен $P_1 + P_2 - P_0$, где P_1 – периметр клетки отмеченного столбца, стоящей в одной строке с K, P_1 – периметр клетки отмеченной строки, стоящей в одном столбце с K, а P_0 – периметр клетки, стоящей на пересечении отмеченных строки и столбца. Так как все числа P_1, P_2 и P_0 – целые, число P – тоже целое.

3. [5] Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час? (*М. Хачатурян*)

Ответ. Можно. **Решение**. В момент $\frac{1}{2^{10}}$ (часа) от начала процедуры отрежем от червяка $\frac{1}{2^{10}}$ метра. В момент $\frac{1}{2^9}$ от выросшей длинной части отрежем $\frac{1}{2^9}$ метра. В момент $\frac{1}{2^8}$ отрежем $\frac{1}{2^8}$ метра, … в момент $\frac{1}{2}$ разрежем взрослого червяка пополам. К исходу часа все отрезанные куски станут взрослыми червями. При этом от первого разрезания прошло только $1 - \frac{1}{2^{10}}$ часа.

4. [5] Дан выпуклый четырехугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырехугольник – квадрат? (*В. Шевяков*)

Ответ. Не обязательно. **Решение**. Всем условиям задачи удовлетворяет равнобедренная трапеция с меньшим основанием, равным боковой стороне, и углами в 72° при большем основании.

5. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем

а) [2] на 50-й день?

б) [3] на 25-й день? (*Жюри по мотивам А. Шаповалова*)

б) Ответ. Сможет. **Решение**. Сначала разложим монеты на две кучки: в первой 49 монет, в второй – 51 монета. Затем каждый день будем перекладывать по монете из первой кучки во вторую. На 25-й день в первой кучке будет 25 монет, во второй – 75. Стало быть, на 25-й день в первой кучке будет не больше 25 фальшивых и не больше 25 настоящих монет. Если такая же ситуация была и в первый день, то либо фальшивых, либо настоящих монет в первой кучке было ровно 25 штук (иначе всего монет там было бы не больше 48), и рыцарь освободился сразу. Иначе в первый день в первой кучке было больше 25 фальшивых или больше 25 настоящих монет. Заметим, что число как фальшивых, так и настоящих монет в первой кучке каждый день может измениться не больше, чем на 1, по сравнению с предыдущим днем. Поэтому в какой-то из дней между первым и 51-м число фальшивых или настоящих монет в первой кучке будет равно 25, что и требуется.

Базовый вариант, старшие

1. [3] Грани выпуклого многогранника – подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней). (*В. Произволов*)

Решение. Если какая-то их граней входит в обе пары, то наибольшее и наименьшее ребро входят в одну грань. Но тогда любая грань не может быть больше этой (иначе там найдется большее ребро) и, аналогично, не может быть меньше. Значит, все грани равны, и найдутся две непересекающиеся пары равных граней.

2. [4] См. задачу 3 младших классов.

3. [4] По кругу лежат 100 белых камней. Дано целое число k в пределах от 1 до 50. За ход разрешается выбрать любые k подряд идущих камней, первый и последний из которых белые, и покрасить первый и последний камни в черный цвет. При каких k можно за несколько таких ходов покрасить все 100 камней в черный цвет? (*А. Бердников*)

Решение. При тех и только тех, для которых число $d = \dfrac{100}{\text{НОД}(100, k-1)}$ четно. Пометим любой камень. Затем пометим камень, (k–1)-й по часовой стрелке после помеченного, и будем повторять эту процедуру, пока не вернемся к исходному камню. Любые два соседних помеченных камня будут концами ряда из k подряд идущих камней. Поэтому отмеченные камни можно перекрашивать только в паре с отмеченными. Стало быть, их удастся перекрасить тогда и только тогда, когда их четное число, и это число, как нетрудно проверить, равно d. Осталось заметить, что все 100 камней разбиваются на НОД(100, k–1) наборов помеченных.

4. [5] Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку. (*Фольклор*)

Решение. Пусть O – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C и D пятиугольника $ABCDE$ на противолежащие стороны. Нетрудно убедиться, что точка O не может совпадать с вершиной пятиугольника. Пусть $OA \perp CD$. Тогда $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=0$, т.е. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$. Аналогично из $OB \perp DE$, $OC \perp EA$, $OD \perp AB$ получаем равенства $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}$. Но тогда и $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}$, т.е. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. Значит, $OE \perp BC$.

5. [5] В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог. (*А. Шень*)

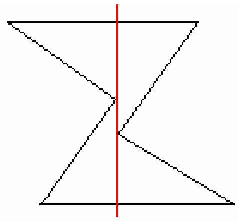
Решение. Разобьем все вершины на пары и соединим каждую пару своим маршрутом. Посчитаем для каждого ребра *кратность*: число маршрутов, в которые оно вошло. Сумма кратностей для выходящих из вершины ребер нечетна: свой маршрут дает вклад 1, а остальные – 0 или 2. Значит, из каждой вершины выходит нечетное число ребер нечетной кратности. Их и объявим важными.

2-е решение. Рассмотрим граф городов и дорог и докажем по индукции, что факт верен для любого связного графа с четным числом $2k$ вершин. При $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно уже доказано для всех k, меньших данного n. Возьмем связный граф на $2n+2$ вершинах и выделим в нем остовное дерево. В этом дереве возьмем любую висячую вершину A и рассмотрим вершину B, к которой она прикреплена. Если к вершине B прикреплено нечетное число висячих вершин, объявим главными все ребра, ведущие из B в висячие вершины, удалим B и эти висячие вершины вместе со всем выходящими из них ребрами и применим предположение индукции к оставшемуся графу. В противном случае применим предположение индукции к графу, который получается удалением всех висячих вершин, прикрепленных к B, а потом дополнительно объявим главными все ребра из B в висячие вершины.

Сложный вариант, младшие

1. [4] Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника? (*Н. Стрелкова*)

Ответ. Можно. См. рисунок.



2. [4] Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$. (*А. Шаповалов*)

Ответ. 8950. **Решение**. Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через начало координат проведено 180 прямых, прямая $y = 100 - x$ пересекает 179 из них. Для каждой точки на прямой $y = 100 - x$ сумма координат равна 100, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 17900, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

3. [5] У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь – различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь – четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные – на другую так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой? (*А. Толпыго*)

Ответ. Могут. **Решение**. Пусть у барона гири всех четных весов – от 2 до 100. Допустим, нам удалось разложить все и получить равновесие. Тогда равенство сохранится, если все веса разделить на 2. Однако гири весами 1, 2, …, 50 так разложить нельзя, так как сумма их весов нечетна.

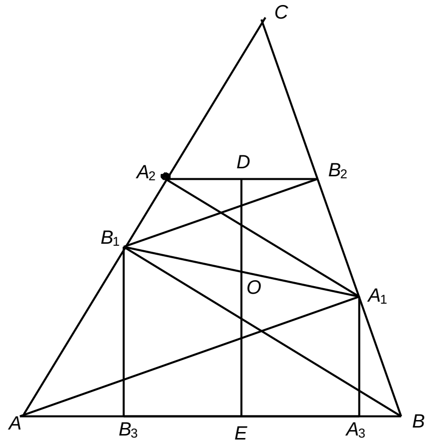
4. [6] Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз.
(*Б. Френкин*)

Решение. Например, подойдут пары $(4N - 2, 1)$ и $(2N, 2N - 1)$ или $(N^2 + N, 1)$ и $(N^2, N + 1)$.

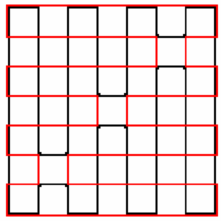
5. [7] Дан остроугольный треугольник ABC; AA_1, BB_1 – его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на прямые AC и AB, а из точки B_1 опустили перпендикуляры на прямые BC и BA. Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию.
(*Г. Фельдман*)

Решение. Пусть A_1A_2 и A_1A_3 (B_1B_2 и B_1B_3) – перпендикуляры, опущенные из точки A_1 (B_1) соответственно на прямые AC (BC) и AB. Как известно, треугольник B_1CA_1 подобен треугольнику ABC. Треугольник A_2CB_2 соответственно подобен треугольнику B_1CA_1, а значит и треугольнику ABC. Поэтому прямые A_2B_2 и AB параллельны, т.е. $A_2B_2A_3B_3$ – трапеция.

Опустим перпендикуляры OD и OE из середины O отрезка A_1B_1 на основания трапеции A_2B_2 и A_3B_3. Так как углы $A_1A_2B_1$ и $B_1B_2A_1$ прямые, O – центр окружности, описанной около четырехугольника $B_1A_2B_2A_1$. Поэтому D – середина A_2B_2. Отрезок OE параллелен основаниям трапеции $A_1A_3B_3B_1$, и потому является ее средней линией. Значит, E – середина A_3B_3. Таким образом, трапеция $A_2B_2A_3B_3$ симметрична относительно DE, и, следовательно, равнобока.



6. [10] Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7. Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи? (*А. Заславский*)



Ответ. 16 сторон. **Решение**. *Пример* приведен на рисунке (один маршрут черный, другой – красный).

Оценка. Каждый из муравьев посетил по 64 разные стороны. Всего сторон $7\cdot 8\cdot 2 = 112$. Следовательно, дважды посещенных сторон хотя бы $64 + 64 - 112 = 16$.

7. [10] Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$. (*R. Bapat*)

Решение. Пусть в таблице n строк. Возьмем в каждой строке по два наибольших числа и выпишем эти $2n$ чисел в порядке возрастания. Ввиду равенства сумм в пары входят первое и последнее, второе и предпоследнее и т.д. Отметим в таблице n+1 наибольших из выписанных чисел. По принципу Дирихле найдутся два отмеченных числа в одном столбце; их сумму обозначим через s. По условию, $s \le b$. С другой стороны, s не меньше суммы двух наименьших из отмеченных чисел, а это как раз центральная пара из выписанных чисел, и ее сумма равна a. Значит, $a \le s \le b$. Аналогично доказывается, что $b \le a$.

2-е решение. Пусть $a > b$. Числа в таблице, не меньшие $^a/_2$, назовем *большими*. В каждом столбце не больше одного большого числа. В каждой строке не меньше одного большого числа. Тогда всего в ней не больше и не меньше, чем n больших чисел, то есть их ровно n, причем в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному большому числу. Пусть x – наименьшее большое число. В его строке найдется число $a - x$, которое не является большим. В столбце последнего найдется большое число, оно не меньше x. Мы нашли столбец и два числа в нем, сумма которых не меньше a, то есть больше b. Противоречие.

Сложный вариант, старшие

1. [4] См. задачу 3 старших классов.

2. [6] В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям. (*М. Малкин*)

Решение. По теореме Пифагора длины ребер равны $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, где числа $a \le b \le c$ – натуральны. Тогда квадрат объема $2011^2 = abc$. Поскольку 2011 – простое число, то $a = 1$. Для b и c возможны два случая: $b = 1$, $c = 2011$ или $b = c = \sqrt{2011}$. Ребро длины 1 идет, очевидно, по линии сетки. В случае $a = b = 1$ ребро c перпендикулярно двум линиям сетки и поэтому тоже идет по сетке. В случае $b = c$ ребра b и c лежат в плоскости, перпендикулярной линии сетки. Но тогда 2011 должно представляться как сумма двух квадратов. Однако 2011 имеет остаток 3 по модулю 4, а для суммы квадратов такое невозможно.

3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

а) [3] Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

б) [4] Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой – равносторонним треугольником со стороной 2? (*П. Сергеев (б), А. Шаповалов (а)*)

а) Ответ. Могут. **Решение**. Возьмем неравносторонний треугольник T и выберем в нем две различные стороны a и b. Возьмем также треугольник U, подобный T с коэффициентом $^a/_b$. Приставим их друг к другу сторонами длины a так, чтобы они не лежали в одной плоскости. Две свободные вершины этих треугольников задают направление бокового ребра призмы, которое сделаем достаточно большим, чтобы призма имела непересекающиеся сечения, равные T и U.

б) Ответ. Не может. **Решение**. Предположим, что такие спилы получились. Расстояния между боковыми ребрами призмы не превышают длины стороны треугольника, соединяющей точки на этих ребрах, то есть не больше 1. Будем считать, что боковые ребра идут вертикально. Проведем через вершины большего спила три горизонтальные плоскости. Пусть вторая плоскость лежит между первой и третьей, и расстояния от нее до двух других равны a и b. Тогда стороны большого треугольника станут диагоналями прямоугольников ширины, равной расстоянию между соответствующими боковыми ребрами, а высоты равны a, b и $a + b$. Но если ширина прямоугольника с высотой a не больше 1, а длина диагонали равна 2, то $a \ge \sqrt{3}$. Аналогично $b \ge \sqrt{3}$. Но тогда высота третьего прямоугольника
$a + b \ge 2\sqrt{3} > 2$, тем более его диагональ больше 2. Противоречие.

4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N-угольник, и из красных – тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю – в красный цвет, а красную – в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N-угольник, и из красных – тоже? Решите задачу

а) [4] для $N = 3$;

б) [4] для произвольного натурального N, большего 3. (*А. Грибалко*)

а) Ответ. Не всегда. **Решение**. Пусть длины синих палочек 12, 17, 20, а красных – 2, 23, 24. Поскольку единственная пара с разностью меньше 2 – это (23, 24), а после перекрашивания палочка 2 попадет в другую по составу тройку, то в ней разность наибольших сторон будет больше 2, и треугольник сложить будет нельзя.

б) Ответ. Не всегда. **Решение**. Пусть $k = N - 2$. Пусть длины двух синих палочек равны $12k + 5$ и $24k - 4$, а длины остальных k равны 12; длины двух красных палочек равны $24k - 1$ и $24k$, а длины остальных равны $^2/_k$. Если перекрашена одна из длинных красных палочек, то разность между получившимися длинными красными палочками больше 2, и палочками длины $^2/_k$ ее не покрыть.

Пусть синей стала палочка $^2/_k$. Если палочка длины $24k - 5$ осталась синей, то сумма остальных синих не превосходит $^2/_k + 12(k - 1) + 12k + 5 < 24k - 4$. Если палочка длины $24k - 4$ стала красной, то наибольшей синей стала палочка длины $12k + 5$, но сумма остальных синих равна $12k + {}^2/_k < 12k + 5$. В обоих случаях синий многоугольник не складывается.

5. [8] Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются. (*Ф. Ивлев*)

Решение. Пусть O – точка пересечения прямых AB и CD, Ω_1 и Ω_2 – окружности, симметричные ω_1 и ω_2 относительно биссектрисы угла AOD. Рассмотрим окружности Ω_4 и Ω_3, полученные из Ω_1 и Ω_2 инверсией относительно окружности с центром O и радиусом $R = \sqrt{OA\cdot OC} = \sqrt{OB\cdot OD}$. Они, очевидно, касаются. При этом Ω_4 проходит через точки C и D и может быть получена из Ω_1 не только инверсией, но и гомотетией с центром и коэффициентом $OD{:}OA = OC{:}OB$. Поэтому градусная мера дуги CD в Ω_4 равна α. Следовательно, Ω_4 совпадает с ω_4. Аналогично Ω_3 совпадает с ω_3.

6. [8] См. задачу 7 младших классов.

7. [11] Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 всем известных гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Могут. **Решение**. Пусть множество программистов описывается множеством всевозможных строк из 11 неотрицательных целых чисел с суммой 100. Гении – те, у кого все эти числа, кроме одного – нулевые (а ненулевое равно 100). Ясно, что гениев ровно 11. Объявим знакомыми тех, у которых две “координаты” отличаются на 1 (одна больше на 1, другая меньше на 1), а остальные совпадают.

Покажем, как Второй фирме нанять 10 гениев. Пусть $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{11})$ – первый, нанятый Первой фирмой. В этой строке есть число не меньше 10 (пусть это A_{11}). Тогда Вторая фирма должна нанять программиста $B = (A_1 + 1, A_2 + 1, \ldots, A_{10} + 1, A_{11} - 10)$.

Пусть $M_i = \max C_i$ по всем строкам программистов C, нанятых на данный момент Второй фирмой, а m_i – то же, но для Первой фирмы. Наняв B, Вторая фирма обеспечила неравенство $M_i > m_i$ для каждого $i \le 10$. Если Вторая фирма сможет поддерживать своими ходами такие неравенства, то она раньше Первой фирмы достигнет $M_i = 100$ (при всех $i \le 10$), то есть наймет тем самым 10 гениев. Покажем, почему это возможно.

Из-за необходимости нанимать знакомых Первая фирма может на каждом ходу увеличить не более одного из чисел m_i ($i \le 10$), причем не больше, чем на 1, то есть, только одно из m_i может «догнать» M_i. Пусть такое равенство случилось, и $M_i = m_i = d < 100$. Значит, Второй фирмой уже нанята строка S с $S_i = d$. Так как $d < 100$, $S_j > 0$ дляя некоторого $j \ne i$. Пусть T – знакомый S, у которого $T_i = S_i + 1$, $T_j = S_j - 1$. Так как
$T_i > M_i$.и $T_i > m_i$., T еще никем не нанят. Наняв T, Вторая фирма увеличит M_i и восстановит неравенство $M_i > m_i$.

Равенство $m_i = M_i = 100$ невозможно, так как i-е число равно 100 только у одной строки. Если равенства не случилось, то Вторая фирма может ответным ходом увеличить на 1 любое $M_i < 100$ (для $i \le 10$). Если таких M_i нет, то 10 гениев уже наняты.

2-е решение. Кроме гениев $G_1, \dots, G_{11}$ рассмотрим 11 *ключевых* программистов $K_1, \dots, K_{11}$. Соединим каждую пару (G_i, K_j) *цепочкой* из $70 + r_{ij}$ *рядовых* программистов, где r_{ij} – остаток от деления $i - j$ на 11 ("внутренние" члены цепочек знакомы только с двумя своими соседями по цепочке).

Покажем как действовать Второй фирме.

1) Пусть Первая фирма вначале нанимает одного из ключевых программистов (в силу симметрии можно считать, что это K_1). Тогда Вторая фирма нанимает K_2, который находится *ближе* к $G_2, \dots, G_{11}$, чем K_1. Поэтому если Первая фирма пытается двигаться по "своим" цепочкам к одному из этих гениев, то Вторая фирма, двигаясь к тем же гениям, ее опережает. Если же Первая фирма пытается двигаться к G_1 (на что ей нужно не менее 71 хода), то Вторая использует это время для уменьшения всех "расстояний" до остальных[гениев до 70 (для этого ей нужно не более $2 + \dots + 11 = 65$ ходов). Поэтому гораздо раньше, чем Первая фирма сможет использовать ведущие к гениям более короткие цепочки, Вторая будет ее опережать на 10 "направлениях".

2) Пусть Первая фирма вначале нанимает G_1. Тогда Вторая фирма нанимает K_1. Прежде, чем Первая фирма сможет нанять ключевого программиста (только через него можно выйти на другого гения), Вторая, как и в 1-м случае, сможет укоротить 10 цепочек до 70 и снова опередит Первую.

3) Наконец, пусть Первая фирма вначале нанимает рядового программиста из цепочки, соединяющей K_1 с G_i. Тогда Вторая фирма нанимает K_1. Первой остается только двигаться к G_i и получается ухудшенный (для Первой фирмы) 2-й случай.

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 17 марта 2011 г.

1. В ряд выложено n монет. Два игрока по очереди выбирают монету и переворачивают её. Расположение орлов и решек не должно повторяться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Б. Р. Френкин

2. На доске написаны 49 натуральных чисел. Все их попарные суммы различны. Докажите, что наибольшее из чисел больше 600.

Б. Р. Френкин

3. Даны три попарно пересекающихся луча. В некий момент времени по каждому лучу из его начала начинает двигаться точка с постоянной скоростью. Известно, что эти три точки в любой момент времени образуют треугольник, причем центр описанной окружности этого треугольника тоже движется равномерно и прямолинейно. Верно ли, что все эти треугольники подобны друг другу?

Ф. К. Нилов

4. Подмножество студенческой группы назовём *идеальной компанией*, если
1) в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам;
2) в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив условие 1.
В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста группы составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

А. А. Клячко, Б. Ф. Мельников

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a^{1000}+1$ делится на b^{619} и $b^{1000}+1$ делится на a^{619}.

М. В. Мурашкин

6. На плоскости расположен центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади 1 и две его копии (каждая получена из многоугольника некоторым параллельным переносом). Известно, что никакая точка плоскости не покрыта тремя многоугольниками сразу. Докажите, что общая площадь, покрытая многоугольниками, не меньше 2.

И. И. Богданов

Решения задач.

1. Ответ: первый игрок.

Пусть первый игрок всегда перекладывает одну и ту же монету. Тогда он всегда сможет сделать ход и, значит, выиграет. Действительно, назовём расположение (орлов и решек) чётным или нечётным в зависимости от того, в скольких позициях оно отличается от начального. Первый игрок всегда переходит от чётного расположения к нечётному, второй — наоборот. Если первый игрок переходит к расположению, которое уже появлялось, то получить его раньше мог только он сам, причём переворачивая ту же монету. Значит, уже появлялось и расположение, из которого он делает ход, — противоречие.

2. Все 49 чисел различны, иначе суммы двух из них с третьим одинаковы вопреки условию. Пусть $a_1, \ldots, a_{49}$ — числа на доске, занумерованные в порядке возрастания. Если $a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$ при каких-то $i < j$, то $a_{i+1} + a_j = a_{j+1} + a_i$, что возможно лишь в случае $j = i + 1$ (тогда сумма слева не является попарной суммой). Таким образом, среди разностей соседних по величине чисел на доске одинаковыми могут быть лишь две соседних. Значит, сумма всех этих разностей (т.е. разность между наибольшим и наименьшим числом) не меньше $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 24) = 600$. Так как наименьшее из чисел на доске не меньше 1, то наибольшее не меньше 601.

3. Ответ: верно.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с центром O описанной окружности треугольника ABC. В этой системе точки A, B, C также движутся прямолинейно и равномерно; значит, если одна из них покоится, то и все три покоятся (иначе расстояния до них от O не будут всё время равны), и задача решена. Итак, можно считать, что все три точки движутся по прямым a, b, c.

Квадрат расстояния от точки, движущейся со скоростью v по прямой, находящейся на расстоянии d от O, в момент времени t равен $v^2(t + m)^2 + d^2$ (где m — некая константа). Так как расстояния от точек A, B, C до O одинаковы в каждый момент времени, соответствующие квадратные трехчлены для них равны в бесконечном числе точек — а значит, равны покоэффицентно. Приравнивая последовательно коэффициенты при t^2, t и 1, получаем, что величины v, m и d для всех трёх точек равны. Тогда, если «продолжить» движение точек на отрицательное время, то опять же расстояния от O до всех трёх точек будут равны.

Поскольку значения d и m для всех точек равны, все точки одновременно оказываются в основания перпендикуляров из O на прямые a, b, c одновременно. Ели затем все лучи, проведённые из O в наши три точки, вращаются в одном направлении, то все треугольники поворотно-гомотетичны, а значит, подобны. Иначе, скажем, лучи в точки A и B вращаются в одну сторону, а луч в точку C — в другую.

Пусть одна из прямых a, b (скажем, a) пересекает прямую c; из симметрии, точки A и C одновременно приходят в точку пересечения a и c. Но это значит, что в исходной системе отсчёта они тоже должны были встретиться; поскольку лучи, по которым они двигались, пересекаются (а дополнительные к ним — нет), то это произошло в положительный момент времени. Но это противоречит условию. Наконец, если прямые a, b, c параллельны, то две из них совпадают. Тогда точки, двигавшиеся по ним, встречались в основании перпендикуляра из точки O, что невозможно по тем же причинам.

4. Заметим сначала, что идеальных компаний не больше, чем количество различных подмножеств девушек — каждое такое подмножество если и дает идеальную компанию (вместе с какими-то парнями), то только одну (надо просто добавить всех парней, которым нравятся все эти девушки). Значит, компаний не больше $2^9 = 512$.

Приведем пример, когда компаний ровно 512. Пусть шести юношам из пятнадцати не нравится ни одна девушка. Оставшихся девять юношей занумеруем числами от 1 до 9, и девушек тоже. Пусть юноше с номером i нравятся все девушки, кроме i-й. Тогда любой непустой набор девушек дает идеальную из девяти человек (надо добавить юношей с номерами, отличными от номеров девушек), в частности все девушки образуют идеальную компанию; пустой набор девушек тоже дает идеальную компанию — это все 15 юношей.

5. Если $a = 1$, то, очевидно, $b = 1$; при этом пара $(1, 1)$ подходит. Осталось разобрать случай $a, b > 1$. Заметим сразу, что a и b взаимно просты; пусть $a > b$.

Число $A = a^{1000} + b^{1000} + 1 = a^{1000} + (b^{1000} + 1)$ делится на a^{619}; аналогично, A делится на b^{619}, а из взаимной простоты — и на их произведение. Итак, $a^{1000} + b^{1000} + 1 \geq a^{619}b^{619}$, а значит, $a^{1001} \geq 2a^{1000} \geq a^{619}b^{619}$, или $a^{382} \geq b^{619}$. С другой стороны, $b^{1001} > b^{1000} + 1 \geq a^{619}$. Итак, $b^{1001 \cdot 382} > a^{619 \cdot 382} \geq b^{619 \cdot 619}$. Но $1001 \cdot 382 < 619^2$ — противоречие.

Примечание. Можно было рассуждать немного по-другому. Получив неравенство $a^{619}b^{619} \leq a^{1000} + b^{1000} + 1$, замечаем, что $a^{619}b^{619} < 2a^{1000}$ (так как при натуральных $a > b$, очевидно, b^{1000} меньше a^{1000} хотя бы на 2). Пусть $a = b^{\alpha}$. Тогда $b^{619(\alpha+1)} < 2b^{1000\alpha}$. Логарифмируя, получаем $619(\alpha + 1) < \log_b 2 + 1000\alpha$. Так как $b \geq 2$, то $\log_b 2 \leq 1$, и из предыдущего неравенства $618 < 381\alpha$, т. е. $\alpha > \frac{618}{381}$. Но тогда $a^{619} > b^{\frac{619 \cdot 618}{381}} > b^{1004} > b^{1000} + 1$. Противоречие. Значит, либо a, либо b равно 1. Легко видеть, что подходит только пара $(1, 1)$.

6. Обозначим данные многоугольники M_1, M_2, M_3, их центры — O_1, O_2, O_3; также обозначим через T_{ij} пересечение многоугольников M_i и M_j (ясно, что многоугольники T_{ij} попарно не пересекаются). Тогда середина O_{12} отрезка O_1O_2 является центром симметрии, переводящей M_1 в M_2; значит, эта точка — центр симметрии многоугольника T_{12}.

Утверждение задачи равносильно тому, что сумма площадей многоугольников T_{ij} не превосходит 1. Если один из них (скажем, T_{23}) пуст, то утверждение очевидно, ибо T_{13} и T_{12} расположены внутри M_1 и не пересекаются.

В противном случае рассмотрим многоугольник T'_{23}, полученный из T_{23} симметрией относительно O_{12}. Поскольку эта симметрия переводит M_2 в M_1, а T_{12} — в себя, многоугольник T'_{23} лежит в M_1 и не пересекается с T_{12}.

Заметим, что многоугольник M_3 не пересекается с многоугольником M'_3, симметричным ему относительно O_{12}; иначе этому пересечению принадлежали бы две симметричные точки A и A', а значит, и середина отрезка между ними, то есть

O_{12}. Но O_{12} лежит в T_{12} и, значит, не лежит в M_3. Итак, M_3 и M_3' не пересекаются, а значит, не пересекаются и лежащие в них многоугольники T_{13} и T_{23}'.

Итак, все три непересекающихся многоугольника T_{12}, T_{13}, T_{23}' лежат в M_1, поэтому сумма их площадей не превосходит 1, что и требовалось доказать.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2010**[1]

1. In a multiplication table, the entry in the i-th row and the j-th column is the product ij. From an $m \times n$ subtable with both m and n odd, the interior $(m-2) \times (n-2)$ rectangle is removed, leaving behind a frame of width 1. The squares of the frame are painted alternately black and white. Prove that the sum of the numbers in the black squares is equal to the sum of the numbers in the white squares.

2. In a quadrilateral $ABCD$ with an incircle, $AB = CD$, $BC < AD$ and BC is parallel to AD. Prove that the bisector of $\angle C$ bisects the area of $ABCD$.

3. A $1 \times 1 \times 1$ cube is placed on an 8×8 chessboard so that its bottom face coincides with a square of the chessboard. The cube rolls over a bottom edge so that the adjacent face now lands on the chessboard. In this way, the cube rolls around the chessboard, landing on each square at least once. Is it possible that a particular face of the cube never lands on the chessboard?

4. In a school, more than 90% of the students know both English and German, and more than 90% of the students know both English and French. Prove that more than 90% of the students who know both German and French also know English.

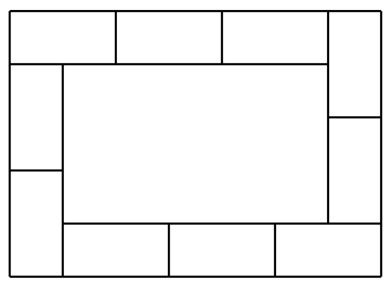
5. A circle is divided by $2N$ points into $2N$ arcs of length 1. These points are joined in pairs to form N chords. Each chord divides the circle into two arcs, the length of each being an even integer. Prove that N is even.

Note: The problems are worth 4, 4, 4, 4 and 4 points respectively.

[1]Courtesy of Andy Liu

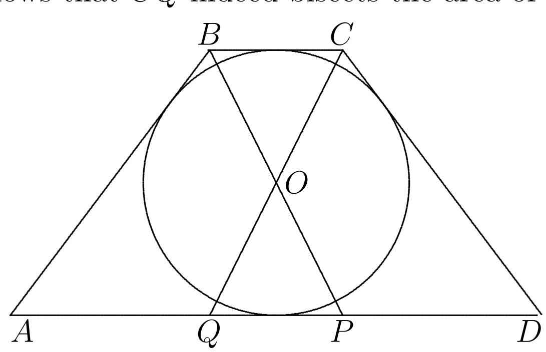
Solution to Junior O-Level Fall 2010

1. **First Solution.** Let the top row of the frame be row a, the bottom row be row b, the left column be column c and the right column be column d. From the given condition, the frame can be partitioned into dominoes as shown in the diagram below. We may assume that one of the corner squares is black. Then all corner squares are black. Consider all numbers in black squares positive and all numbers in white squares negative. In row a, there are $\frac{d-c}{2}$ dominoes each with sum $-a$. In row b, there are $\frac{d-c}{2}$ dominoes each with sum b. In column c, there are $\frac{b-a}{2}$ dominoes each with sum c, and in column d, there are $\frac{b-a}{2}$ dominoes each with sum $-d$. Hence the grand total is $\frac{1}{2}(-a(d-c)+b(d-c)+c(b-a)-d(b-a))=0$, meaning that the sum of all numbers in black squares is equal to the sum of all numbers in white squares.



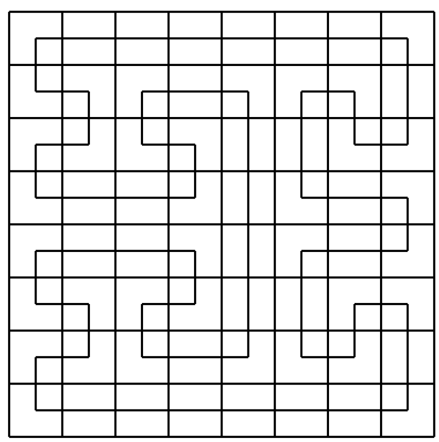
Second Solution.
Consider the number c at the centre of the original $m \times n$ rectangle. The two numbers on the frame in the central column is symmetric about c. They are of the same colour, and their average is just c. The same is true of the two numbers on the frame in the central row. The other numbers on the frame may be divided into sets of four, each set defining a rectangle with sides parallel to the sides of the table. The four numbers in each set are of the same colour, and their average is also c. Since we have an equal number of black squares and white squares, the total of the numbers on the black squares must be equal to the total of the numbers on the white squares.

2. **Solution by Weilian Chu.**
The bisectors of $\angle B$ and $\angle C$ both pass through the centre O of the circle. Let them intersect AD at P and Q respectively. By symmetry, $OCDP$ and $OBAQ$ are congruent. Triangles OBC and OPQ are also congruent as they are isosceles triangles with equal vertical angle and equal altitude. It follows that CQ indeed bisects the area of $ABCD$



3. **First Solution by Janet Leahy.**
Place the die on square a1 with face 1 in front. Roll the die through to h1, then back to g1, onto g2 and over to h2. During this motion, face 1 never touches the chessboard, and is now on the right. Roll the die through to h8, then back to h3, onto g3 and back to g2. During this motion, face 1 never touches the chessboard, and is now in front again. Roll the die through to a2, back to f2, onto f3 and over to g3. During this motion, face 1 never touches the chessboard, and is now on the right again. Continuing this way, it can cover each square at least once, without face 1 ever touching the chessboard.

Second Solution.
It is possible, and the path is indicated in the diagram below. For convenience in description, we use a cubical die starting on the top left corner with the face 2 at the bottom, the face 3 to the left, the face 5 on top, the face 4 to the right, the face 6 to the front and the face 1 to the back. The faces that land on the chessboard are (4,5,3,2,4,5,3), (6,4), (5), (6), (3), (5,4), (6,3), (2), (6,5), (4,2), (6), (4), (5), (6,2), (4,5,3,2,4,5,3), (6), (5), (4), (6), (2), (4,5,3), (6), (5), (4), (6,3), (5,4,2,3,5), (6,2), (3), (6), (5), (3,2,4), (6), (2), (3), (6) and (5). The face 1 never lands on the chessboard.



4. Let the total number of students be T, the number of those who know English, French and German w, the number of those who know English and French but not German x, the number of those who know English and German but not French y, and the number of those who know French and German but not English z. We are given that $\frac{w+x}{T} > \frac{9}{10}$ and $\frac{w+y}{T} > \frac{9}{10}$. From $\frac{w+x}{w+x+y+z} \geq \frac{w+x}{T} > \frac{9}{10}$, we have $w + y > 9(x + z)$. Simlarly, we have $w + x > 9(y + z)$. Hence $2w + 9(x + y) > (w + x) + (w + y) > 9(x + z) + 9(y + z) = 9(x + y) + 18z$. It follows that $w > 9z$ and $10w > 9(w + z)$, so that $\frac{w}{w+z} > \frac{9}{10}$.

5. Paint the $2N$ endpoints of the N chords alternately yellow and blue around the circle. Since a chord divides the circle into two arcs of even length, its two endpoints must have the same colour. Since there are N endpoints of each colour, N must be even.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2010.**[1]

1. The exchange rate in a Funny-Money machine is s McLoonies for a Loonie or $\frac{1}{s}$ Loonies for a McLoonie, where s is a positive real number. The number of coins returned is rounded off to the nearest integer. If it is exactly in between two integers, then it is rounded up to the greater integer.
   (a) Is it possible to achieve a one-time gain by changing some Loonies into McLoonies and changing all the McLoonies back to Loonies?
   (b) Assuming that the answer to (a) is "yes", is it possible to achieve multiple gains by repeating this procedure, changing all the coins in hand and back again each time?
2. The diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ are perpendicular to each other and intersect at the point O. The sum of the inradii of triangles AOB and COD is equal to the sum of the inradii of triangles BOC and DOA.
   (a) Prove that $ABCD$ has an incircle.
   (b) Prove that $ABCD$ is symmetric about one of its diagonals.
3. From a police station situated on a straight road infinite in both directions, a thief has stolen a police car. Its maximal speed equals 90% of the maximal speed of a police cruiser. When the theft is discovered some time later, a policeman starts to pursue the thief on a cruiser. However, he does not know in which direction along the road the thief has gone, nor does he know how long ago the car has been stolen. Is it possible for the policeman to catch the thief?
4. A square board is dissected into n^2 rectangular cells by $n-1$ horizontal and $n-1$ vertical lines. The cells are painted alternately black and white in a chessboard pattern. One diagonal consists of n black cells which are squares. Prove that the total area of all black cells is not less than the total area of all white cells.
5. In a tournament with 55 participants, one match is played at a time, with the loser dropping out. In each match, the numbers of wins so far of the two participants differ by not more than 1. What is the maximal number of matches for the winner of the tournament?

Note: The problems are worth 2+3, 2+3, 5, 5 and 5 points respectively.

[1]Courtesy of Andy Liu

Solution to Senior O-Level Fall 2010

1. (a) For $s = 1$, there is obviously no chances of any gain. If $s > 1$ and we trade in n Loonies, we get $ns + \alpha$ McLoonies, where the real number α satisfies $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Then we trade these $ns + \alpha$ McLoonies back. The exchange rate is $\frac{ns+\alpha}{s} + \frac{\alpha}{s}$. Since $s > 1$, $\frac{\alpha}{s} < \frac{1}{2}$, so that there will not be any rounding up. Thus a one-time gain can only be possible if $s < 1$. Let $s = \frac{1}{2}$. We can trade in 1 Loonie for $\frac{1}{2}$ McLoonie, rounded up to 1. When we trade this back, we get 2 Loonies.

   (b) For an affirmative answer in (a), we must have $s < 1$. This means that $\frac{1}{s} > 1$, so that the argument in (a) shows that there will never be any increase in the number of McLoonies. So after the initial one-time gain in Loonies, no further gain is possible.

2. (a) The sum of the inradii of right triangles AOB and COD is given by

$$\frac{1}{2}(OA + OB - AB) + \frac{1}{2}(OC + OD - CD).$$

   The sum of the inradii of right triangles OCB and DOA is given by

$$\frac{1}{2}(OB + OC - BC) + \frac{1}{2}(OD + OA - DA).$$

   Hence the given condition is equivalent to $AB + CD = BC + DA$, which is the necessary and sufficient condition for $ABCD$ to have an incircle.

   (b) We may assume that among AB, BC, CD and DA, the longest one is DA. By Pythagoras' Theorem,

$$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = BC^2 + DA^2.$$

   Combined with $(AB + CD)^2 = (BC + DA)^2$, we have $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. It follows that $(AB - CD)^2 = (BC - DA)^2$. If $DA - BC = AB - CD$, then $DA = AB$ and $ABCD$ is symmetric about AC. If $DA - BC = CD - AB$, then $DA = CD$ and $ABCD$ is symmetric about BD.

3. Let the speed of the cruiser be 1. The policeman's strategy is to go in one direction for a time period q, then go in the opposite direction for a time period q^2, and then go in the original direction for a time period q^3, and so on. At the end of the time period q^n, the total time elapsed is $q^n + q^{n-1} + \cdots + q = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$ and the net distance covered in the current direction is $q^n - q^{n-1} + \cdots + (-1)^n q = \frac{q^{n+1}-(-1)^n q}{q+1}$. Thus the net speed in this direction is $\frac{q^{n+1}-(-1)^n q}{q+1} \div \frac{q^{n+1}-q}{q-1} > \frac{q-1}{q+1}$. Solving for $\frac{q-1}{q+1} > \frac{9}{10}$, we have $q > 19$. Then the net speed of the cruiser still exceeds the raw speed of the car, and capture is inevitable.

4. Let the $n-1$ vertical lines divide the board into n vertical strips of respective width $a_1, a_2, \ldots,$ a_n, and let the $n-1$ horizontal lines divide the board into n horizontal strips of respective height $b_1, b_2, \ldots, b_n$. We may assume that the bottom left cell is a black square, and from the given conditions, we have $a_i = b_i$ for all $1 \le i \le n$. Consider the area of any black cell positive and the area of any white cell negative. Then the area of the cell of height a_i and width a_j is $(-1)^{i+j} a_i a_j$. The total area of the board is

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_i a_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j = \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i\right)^2 \ge 0.$$

Hence the sum of the areas of the black cells cannot be less than the sum of the areas of the white cells.

5. Let a_n denote the total number of participants needed to produce a winner with n victories. We have $a_1 = 2$ and $a_2 = 3$. In order to have a winner with n victories, we must have a candidate with $n-1$ victories so far, and an also-ran with $n-2$ victories so far. Since no participant can lose to both of them, the total number of participants needed is $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Thus we have a shifted Fibonacci sequence. Iteration yields $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$, $a_6 = 21$, $a_7 = 34$ and $a_8 = 55$. Since we have 55 participants, the winner can have at most 8 victories. It is easy to construct recursively a tournament with 55 participants in which the winner has 8 victories.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2010.**[1]

1. A round coin may be used to construct a circle passing through one or two given points on the plane. Given a line on the plane, show how to use this coin to construct two points such that they define a line perpendicular to the given line. Note that the coin may not be used to construct a circle tangent to the given line.

2. Pete has an instrument which can locate the midpoint of a line segment, and also the point which divides the line segment into two segments whose lengths are in a ratio of $n : (n+1)$, where n is any positive integer. Pete claims that with this instrument, he can locate the point which divides a line segment into two segments whose lengths are at any given rational ratio. Is Pete right?

3. At a circular track, 10 cyclists started from some point at the same time in the same direction with different constant speeds. If any two cyclists are at some point at the same time again, we say that they meet. No three or more of them have met at the same time. Prove that by the time every two cyclists have met at least once, each cyclist has had at least 25 meetings.

4. A rectangle is divided into 2×1 and 1×2 dominoes. In each domino, a diagonal is drawn, and no two diagonals have common endpoints. Prove that exactly two corners of the rectangle are endpoints of these diagonals.

5. For each side of a given pentagon, divide its length by the total length of all other sides. Prove that the sum of all the fractions obtained is less than 2.

6. In acute triangle ABC, an arbitrary point P is chosen on altitude AH. Points E and F are the midpoints of sides CA and AB respectively. The perpendiculars from E to CP and from F to BP meet at point K. Prove that $KB = KC$.

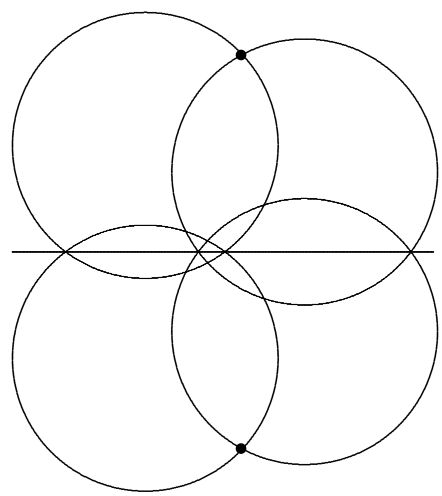
7. Merlin summons the n knights of Camelot for a conference. Each day, he assigns them to the n seats at the Round Table. From the second day on, any two neighbours may interchange their seats if they were not neighbours on the first day. The knights try to sit in some cyclic order which has already occurred before on an earlier day. If they succeed, then the conference comes to an end when the day is over. What is the maximum number of days for which Merlin can guarantee that the conference will last?

Note: The problems are worth 4, 5, 8, 8, 8, 8 and 12 points respectively.

[1] Courtesy of Andy Liu

Solution to Junior A-Level Fall 2010

1. Take two points on the given line at a distance less than the diameter of the round coin. Draw two circles passing through these two points. They are situated symmetrically about the given line. Repeat this operation so that a circle from the second operation intersects a circle from the first operation. The point symmetric to this point about the given line is also a point of intersection of two constructed circles, one from each operation. These two points satisfy the requirement of the problem.



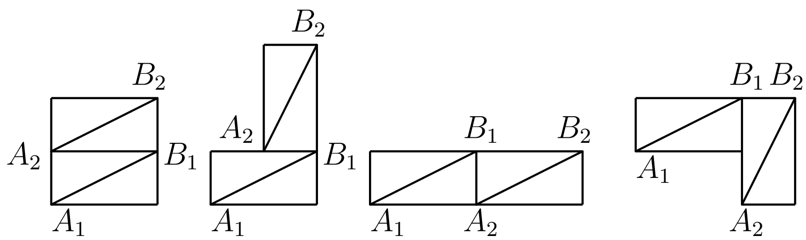
2. Pete is right. Suppose he is asked to divide a line segment into two whose lengths are in the ratio $p : q$, where p and q are relatively prime integers. We may assume that the line segment has length $p+q$. Then Pete can in fact divide the line segment into $p+q$ unit segments. For any segment of length greater than 1, if it has even length, Pete divides it by its midpoint. If it has odd length $2n+1$, Pete divides it into two whose length are in the ratio $n : (n+1)$. Eventually, all segments are of length 1. It is then easy to pick out the point which divides the segment into two whose lengths are in the ratio $p : q$.

3. For $1 \leq i \leq 10$, let the constant speed of cyclist C_i be v_i, where $v_1 < v_2 < \cdots < v_{10}$. Let $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{10} - v_9\}$. Then $v_j - v_i \geq (j-i)u$ for all $j > i$. Let d be the length of the track. Then the meeting between the last pair of cyclists occurs at time $\frac{d}{u}$. Now C_i and C_j meet once in each time interval of length $\frac{d}{v_j - v_i}$. They would have met at least $j-i$ times by the time of the meeting of the last pair, because $(j-i)\frac{d}{v_j - v_i} \leq \frac{d}{u}$. For C_i, this means at least $1+2+\cdots+(i-1)$ meetings with $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{i-1}$ and at least $1+2+\cdots+(10-i)$ meetings with $C_{i+1},\ C_{i+2},\ \ldots,\ C_{10}$. The total is at least

$$\frac{i(i-1)+(10-i)(10-i+1)}{2} = (i-5)(i-6)+25 \geq 25.$$

4. **Solution by Central Jury.**

We first prove that at least one corner of the rectangle is the endpoint of a diagonal. Consider the domino at the bottom right corner. If its diagonal is in the down direction (from the left), then the bottom right corner is the endpoint of a diagonal. Suppose its diagonal is in the up direction. Consider all the dominoes touching the bottom edge of the rectangle. All of their diagonals must be in the up direction, which means that the bottom left corner of the rectangle is the endpoint of a diagonal. Henceforth, we assume that the bottom left corner is the endpoint A_1 of an up-diagonal A_1B_1 of a domino. The next domino has B_1 as one of its vertices but not the one at the bottom left corner. The diagram below illustrates some of the possible choices. The diagonal A_2B_2 in this domino must also be in the up direction. Note that B_2 is above B_1, to the right of B_1 or both.

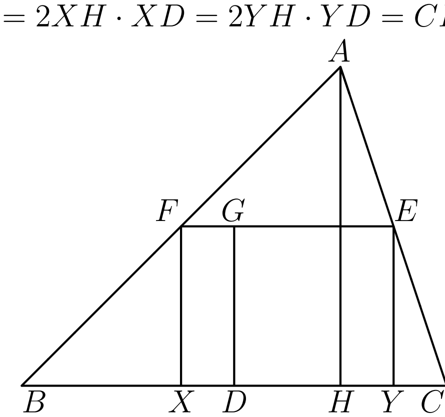


Continuing in this manner, we can build a connected chain of dominoes with up-diagonals going from the bottom left vertex to the upper right vertex of the rectangle. It is impossible to build simultaneously another connected chain of dominoes with down-diagonals going from the bottom right vertex to the upper left vertex of the rectangle. This is because two such chains must share a common domino, and only one diagonal of that domino is drawn.

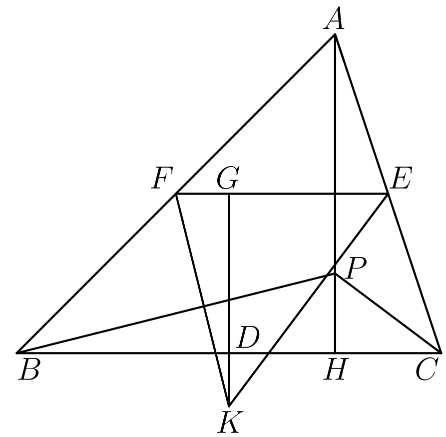
5. Let the side lengths be $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_5 < p - a_5$ where $p = a_1 + a_2 + \cdots + a_5$. We have $\frac{a_1}{p-a_1} + \frac{a_2}{p-a_2} + \cdots + \frac{a_5}{p-a_5} \le \frac{a_1}{p-a_5} + \frac{a_2}{p-a_5} + \cdots + \frac{a_5}{p-a_5} = \frac{p}{p-a_5} < 2$ since $p > 2a_5$.

6. **First Solution:**

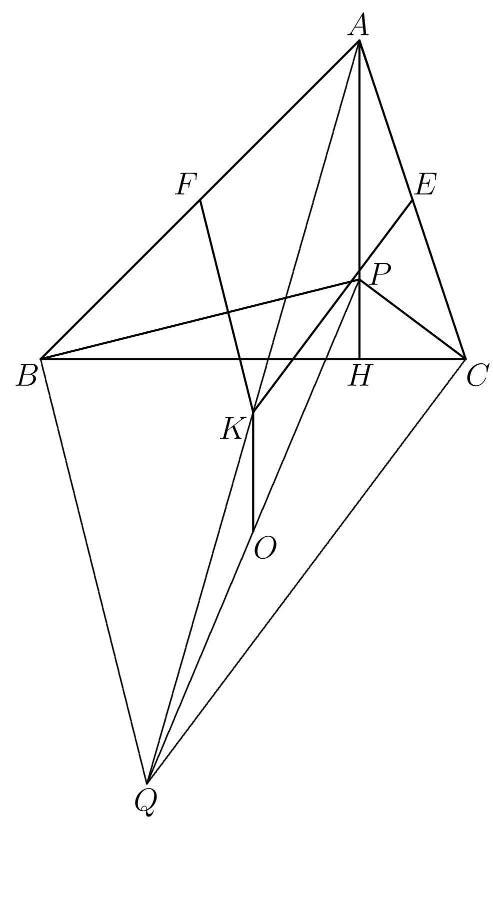
We first prove an auxiliary result. Let the line through the midpoint D of BC and perpendicular to BC cut EF at G. Then $BH \cdot FG = CH \cdot EG$. Drop perpendiculars FX and EY from F and E to BC respectively. Then X is the midpoint of BH and Y is the midpoint of CD. Since triangles FXD and EYC are congruent, we have $XD = YC = YH$ so that $XH = YD$. Now $BH \cdot FG = 2XH \cdot XD = 2YH \cdot YD = CH \cdot EG$.



Returning to the main problem, let the line through F perpendicular to BP intersect the line DG at K_1. Triangles FGK_1 and PHB are similar. Hence $GK_1 = \frac{FG \cdot BH}{PH}$. Let the line through E perpendicular to CP intersect the line DG at K_2. We can prove in an analogous manner that $GK_2 = \frac{EG \cdot CH}{PH}$. By the auxiliary result, $GK_1 = GK_2$. Hence K_1 and K_2 is the same point K. Since K lies on the perpendicular bisector of BC, we have $KB = KC$.



Second Solution by Chun-Yu Yang.
Extend AK to Q so that K is the midpoint of AQ. Since F is the midpoint of AB, BQ is parallel to FK, which is perpendicular to BP. Hence $\angle PBQ = 90°$. Similarly, $\angle PCQ = 90°$. Hence the midpoint O of PQ is the circumcentre of the cyclic quadrilateral $BPCQ$. Now OK is parallel to PA, which is perpendicular to BC. Hence K lies on the perpendicular bisector of BC, so that $KB = KC$.



7. **Solution by Central Jury.**

We may assume that the Knights are seated from 1 to n in cyclic clockwise order on day 1. Then seat exchanges are not permitted between Knights with consecutive numbers (1 and n are considered consecutive). We construct an invariant for a cyclic order called the winding number as follows. Merlin has n hats numbered from 1 to n from top to bottom. He starts by giving hat 1 to Knight 1. Then he continues in the clockwise order round the table until he gets to Knight 2, when he will give him hat 2. After he has handed out all the hats, Merlin returns to Knight 1 which is his starting point. The number of times he has gone round the table is called the winding number of the cyclic order. For instance, the winding number of the cyclic order 1 4 7 2 3 6 5 is 4: (1,2,3)(4,5)(6)(7). Suppose two adjacent Knights change seats. If neither is Knight 1, the hats handed out in each round remain the same, so that the winding number remains constant. Suppose the seat exchange is between Knight 1 and Knight h, where $h \neq 2$ or n. Then Knight h either becomes the first Knight to get a hat in the next cycle instead of the last Knight to get a hat in the preceding cycle, or vice versa. Still, the winding number remains constant. On the k-th day of the conference, $1 \leq k \leq n-1$, Merlin can start by having the Knights sit in the cyclic order $k, k-1, \ldots, 2, 1, k+1, k+2, \ldots, n$. It is easy to verify that the winding number of the starting cyclic order on the k-th day is k. It follows that no cyclic order can repeat on two different days within the first $n-1$ days. Therefore, Merlin can make the conference last at least n days. We claim that given any cyclic order, it can be transformed into one of those with which Merlin starts a day. Then the Knights can make the conference end when the n-th day is over. Suppose the cyclic order is not one with which Merlin starts a day. We will push Knight 2 forward in clockwise direction until he is adjacent to Knight 1. This can be accomplished by a sequence of exchanges if he does not encounter Knight 3 along the way. If he does, we will push both of them forward towards Knight 1. Eventually, we will have Knights 2, 3, $\ldots$, h and 1 in a block. Now $h < n$ as otherwise the initial cyclic order is indeed one of those with which Merlin starts a day. Hence we can push Knight 1 counter-clockwise so that he is adjacent to Knight 2. We now attempt to put Knight 3 on the other side of Knight 2. As before, we have Knights 3, 4, $\ldots$, ℓ, 2, 1 in a block. If $\ell < n$, we can push Knights 2 and 1 counter-clockwise towards Knight 3. If ℓ, Knight 1 cannot get past, but we notice that we have arrived at one of the cyclic orders with which Merlin starts a day. This justifies the claim.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2010.**[1]

1. There are 100 points on the plane. All 4950 pairwise distances between two points have been recorded.
   (a) A single record has been erased. Is it always possible to restore it using the remaining records?
   (b) Suppose no three points are on a line, and k records were erased. What is the maximum value of k such that restoration of all the erased records is always possible?
2. At a circular track, $2n$ cyclists started from some point at the same time in the same direction with different constant speeds. If any two cyclists are at some point at the same time again, we say that they meet. No three or more of them have met at the same time. Prove that by the time every two cyclists have met at least once, each cyclist has had at least n^2 meetings.
3. For each side of a given polygon, divide its length by the total length of all other sides. Prove that the sum of all the fractions obtained is less than 2.
4. Two dueling wizards are at an altitude of 100 above the sea. They cast spells in turn, and each spell is of the form "decrease the altitude by a for me and by b for my rival" where a and b are real numbers such that $0 < a < b$. Different spells have different values for a and b. The set of spells is the same for both wizards, the spells may be cast in any order, and the same spell may be cast many times. A wizard wins if after some spell, he is still above water but his rival is not. Does there exist a set of spells such that the second wizard has a guaranteed win, if the number of spells is
   (a) finite;
   (b) infinite?
5. The quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with center O. The diagonals AC and BD do not pass through O. If the circumcentre of triangle AOC lies on the line BD, prove that the circumcentre of triangle BOD lies on the line AC.
6. Each cell of a 1000×1000 table contains 0 or 1. Prove that one can either cut out 990 rows so that at least one 1 remains in each column, or cut out 990 columns so that at least one 0 remains in each row.
7. A square is divided into congruent rectangles with sides of integer lengths. A rectangle is important if it has at least one point in common with a given diagonal of the square. Prove that this diagonal bisects the total area of the important rectangles.

Note: The problems are worth 2+3, 6, 6, 2+5, 8, 12 and 14 points respectively.

[1]Courtesy of Andy Liu.

Solution to Senior A-Level Fall 2010

1. **Solution by Central Jury.**

   (a) This is not always possible. Suppose the record of the distance AB is lost. If the other 98 points all lie on a line ℓ, we cannot tell whether A and B are on the same side of ℓ or on opposite sides of ℓ. Thus the lost record cannot be restored from the remaining ones.

   (b) The answer is 96. Suppose 97 records are erased. All of them may be associated with a point A so that we only know the distances AB and AC, where B and C are 2 of the other 99 points. A does not lie on BC as no three of the 100 points lie on a line. Now we cannot determine whether A is on one side or the other side of the line BC. Suppose at most 96 records are erased. Construct a graph with 100 vertices representing the 100 points. Two vertices are joined by an edge if the record of the distance between the two points they represent is erased. The graph has at most 96 edges, and therefore at least 4 components. Take four vertices A, B, C and D, one from each component. The pairwise distances between the points A, B, C and D are on record, so that their relative position can be determined. For any other vertex P, it is in the same component with only one of these four vertices. Hence the distance between the point P and three of the points A, B, C and D are on record. This is enough to determine the position of the point relative to the points A, B, C and D. It follows that all erased records may be restored.

2. For $1 \leq i \leq 2n$, let the constant speed of cyclist C_i be v_i, where $v_1 < v_2 < \cdots < v_{2n}$. Let $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{2n} - v_{2n-1}\}$. Then $v_j - v_i \geq (j-i)u$ for all $j > i$. Let d be the length of the track. Then the meeting between the last pair of cyclists occurs at time $\frac{d}{u}$. Now C_i and C_j meet once in each time interval of length $\frac{d}{v_j - v_i}$. They would have met at least $j-i$ times by the time of the meeting of the last pair, because $(j-i)\frac{d}{v_j - v_i} \leq \frac{d}{u}$. For C_i, this means at least $1+2+\cdots+(i-1)$ meetings with $C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}$ and at least $1+2+\cdots+(2n-i)$ meetings with $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_{2n}$. The total is at least

$$\frac{i(i-1)+(2n-i)(2n-i+1)}{2} = (i-n)(i-(n+1)) + n^2 \geq n^2.$$

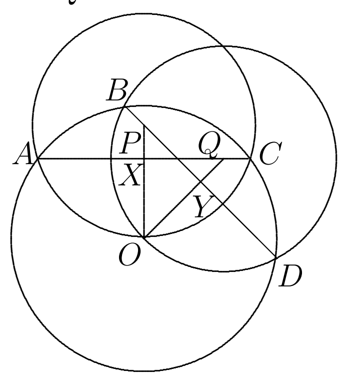
3. Let the side lengths be $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < p - a_n$ where $p = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. We have $\frac{a_1}{p-a_1} + \frac{a_2}{p-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{p-a_n} \leq \frac{a_1}{p-a_n} + \frac{a_2}{p-a_n} + \cdots + \frac{a_n}{p-a_n} = \frac{p}{p-a_n} < 2$ since $p > 2a_n$.

4. (a) The answer is no. With a finite number of spells, there is one for which $b-a$ is maximum. If the first wizard keeps casting this spell, the best that the second wizard can do is to maintain status quo by casting the same spell. Hence the second wizard will hit the water first, giving the first wizard a win..

   (b) The answer is yes. In the n-th spell, let $a = \frac{1}{n}$ and $b = 100 - \frac{1}{n}$. By symmetry, we may assume that the first wizard casts the n-th spell. He is then $100 - \frac{1}{n}$ above water while the second wizard is $\frac{1}{n}$ above water. However, the second wizard wins immediately by casting the $(n+1)$-st spell. He will still be $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ above water while the first wizard is submerged in water since $(100 - \frac{1}{n}) - (100 - \frac{1}{n+1}) = -\frac{1}{n(n+1)}$.

5. Let P be the circumcentre of triangle OAC. Then PO is perpendicular to AC, intersecting AC at X. Let the line through O perpendicular to BD intersect BD at Y and AC at Q. We claim that Q is the circumcentre of triangle OBD. By Pythagoras' Theorem,

$$\begin{aligned}
QD^2 &= QY^2 + DY^2 \\
&= QY^2 + (OD^2 - OY^2) \\
&= QY^2 + OA^2 - (OP^2 - PY^2) \\
&= OA^2 - AP^2 + PQ^2 \\
&= QX^2 + OA^2 - (AP^2 - PX^2) \\
&= QX^2 + (OA^2 - AX^2) \\
&= QX^2 + OX^2 \\
&= QO^2.
\end{aligned}$$



6. **Solution by Brian Chen.**
Let $S(p,q)$ denote the following statement.
"In any binary $a \times b$ table with $ab \leq p$, one of the following is true.
(A) There exists an $a \times q$ subtable with at least one 0 in each row.
(B) There exists a $q \times b$ subtable with at least one 1 in each column.
The q rows or columns may be chosen arbitrarily."
We wish to prove that $S(1000000, 10)$ is true. We first examine $S(4,1)$. The relevant tables are 1×4, 1×3, 1×2, 1×1, 2×1, 3×1, 4×1 and 2×2. In the first four, if there is at least one 0, then (A) is true. Otherwise, (B) is true. In the next three, if there is at least one 1, then (B) is true. Otherwise, (A) is true. In the last one, if there are no 0s in the first row, then (B) is true. Suppose there is at least one 0 in the first row. If there is at least one 0 in the second row as well, then (A) is true. Otherwise, (B) is true. It follows that $S(4,1)$ is true. We claim that $S(p,q)$ implies $S(4p, q+1)$. Consider any $a \times b$ table with $ab \leq 4p$. Let x be the minimum number of 1s in any row and y be the minimum number of 0s in any column. Then the total number of 1s is at least ax and the total number of 0s is at least by. It follows that $ax + by \leq ab$. By the Arithmetic-Geometric Means Inequality, $\sqrt{(ax)(by)} \leq \frac{ax+by}{2} \leq \frac{ab}{2}$. Hence $(ax)(by) \leq \frac{(ab)^2}{4}$ so that $xy \leq p$. Let R be a row with exactly x 1s and C be a column with exactly y 0s. Consider the $y \times x$ table whose rows have 0s at the intersections with C and whose columns have 1s at the intersections with R. We are assuming that $S(p,q)$ is true, so that either (A) or (B) holds for this table. If (A) holds, adding C would make (A) hold for the $a \times b$ table. If (B) holds, adding R would make (B) hold for the $a \times b$ table. This justifies the claim. From $P(4,1)$, we can deduce in turns $S(16,2)$, $S(64,3)$ and so on, up to $S(1048576, 10)$. This clearly implies $S(1000000, 10)$.

Solution by Central Jury.

Let us choose rows and columns one by one. We also will classify rows and columns as “good” and “bad”: the “bad” column intersects all chosen rows by 0s and the “bad” row intersects all chosen columns by 1s. At the initial moment no row or column is chosen and therefore all rows and columns in the table are “bad”.

Assume that the table contains at least as many 1s as 0s. Let us choose a row containing at least as many 1s as 0s. Then the columns that intersect this row at 1s will become “good” and therefore the number of “bad” columns decrease at least twice.

If in the table exists a row which has in the intersection with the “bad” columns at least as many 1s as 0s, we choose it. Then again some of the former “bad” columns become “good”. Let us continue to choose rows in this way while it is possible. We arrive to the following scenarios:

1) We have chosen $m < 10$ rows and there are no more “bad” columns left. Then we add any rows to the chosen ones to have ten rows in total.

2) We have chosen 10 rows. Then we have no more than $1000 : 2^{10} < 1$ “bad” columns (so we have no “bad” columns left).

In both cases we constructed a subtable 10×1000, each column of which contains at least one 1s.

3) After choosing $m < 10$ rows we stopped: in intersection with the “bad” columns each other row has more 0s than 1s . Therefore, we have more 0s than 1s in “bad” columns. In this case let us restart our process, albeit choosing “bad” columns following the same principle as we used before: we choose column if in the intersection with the “bad” rows it contains at least as many 0s as 1s.

Thus we either constructed a subtable 1000×1000 each row of which contains at least one 0s or we have a situation when “bad” columns and “bad” rows left. However this is impossible.

Really, consider a subtable which is intersection of “bad” columns and “bad” rows. On one hand in this subtable the number of 0s is no less than half (if we count them by columns) while on the other hand it is less than half (if we count them by rows). Contradiction.

7. **Solution by Central Jury.**
Let the rectangles be of dimensions $m \times n$ or $n \times m$. Divide the whole square into unit squares. Put the label 0 on each square on the chosen diagonal. Put the label 1 on each square of the next $m + n - 1$ diagonals above and parallel to the given diagonal, and put the label -1 on each square of the next $m + n - 1$ diagonals below and parallel to the given diagonal. For each important rectangle, all squares have been labelled, and their sum is equal to the area of the part of the rectangle above the given diagonal minus the area of the part below. For each unimportant rectangle, at least one square is unlabelled. We now proceed to complete the labelling, diagonal by diagonal away from and parallel to the given one. Place an $m \times n$ or $n \times m$ rectangle on the board so that the square we are trying to label is the only unlabelled square in that rectangle. We choose a label so that the sum of all the labels in this rectangle is 0. Because labels on diagonals parallel to the given one are the same, the choice of position or orientation of this rectangle is immaterial. The completed labelling of a 12×12 board, with $m = 2$ and $n = 3$, is shown below.

0	1	1	1	1	−5	7	−5	1	1	1	−5
−1	0	1	1	1	1	−5	7	−5	1	1	1
−1	−1	0	1	1	1	1	−5	7	−5	1	1
−1	−1	−1	0	1	1	1	1	−5	7	−5	1
−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1	−5	7	−5
5	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1	−5	7
−7	5	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1	−5
5	−7	5	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1
−1	5	−7	5	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1
−1	−1	5	−7	5	−1	−1	−1	−1	0	1	1
−1	−1	−1	5	−7	5	−1	−1	−1	−1	0	1
5	−1	−1	−1	5	−7	5	−1	−1	−1	−1	0

Each label off the given diagonal is the negative of the label symmetric to it about the given diagonal. It follows that the sum of all the labels in the whole square is 0. The sum of the labels in each unimportant rectangle is chosen to be 0. Hence the sum of the labels in all the important rectangles is also 0. This means that the given diagonal bisects their total area.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2011**

1 [**3**] The numbers from 1 to 2010 inclusive are placed along a circle so that if we move along the circle in clockwise order, they increase and decrease alternately. Prove that the difference between some two adjacent integers is even.

2 [**4**] A rectangle is divided by 10 horizontal and 10 vertical lines into 121 rectangular cells. If 111 of them have integer perimeters, prove that they all have integer perimeters.

3 [**5**] Worms grow at the rate of 1 metre per hour. When they reach their maximal length of 1 metre, they stop growing. A full-grown worm may be dissected into two not necessarily equal parts. Each new worm grows at the rate of 1 metre per hour. Starting with 1 full-grown worm, can one obtain 10 full-grown worms in less than 1 hour?

4 [**5**] Each diagonal of a convex quadrilateral divides it into two isosceles triangles. The two diagonals of the same quadrilateral divide it into four isosceles triangles. Must this quadrilateral be a square?

5 A dragon gave a captured knight 100 coins. Half of them are magical, but only dragon knows which are. Each day, the knight should divide the coins into two piles (not necessarily equal in size). The day when either magic coins or usual coins are spread equally between the piles, the dragon set the knight free. Can the knight guarantee himself a freedom in at most

- **(a)** [**2**] 50 days?
- **(b)** [**3**] 25 days?

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

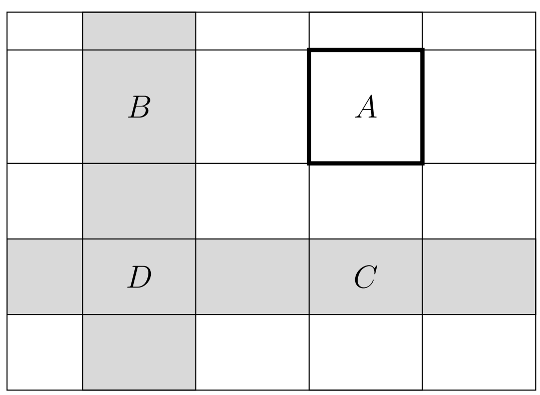
Solution to Junior O-Level Spring 2011

1. Suppose that we managed to place the numbers on a circle so that the difference between two adjacent numbers is odd. This means that odd and even numbers must alternate. From the condition follows that each number has both neighbours either both greater or both less than itself.

   Note that 1 is an odd number and it can only have the neighbours greater than itself. Since the numbers increase and decrease alternately, each odd number has the neighbours greater than itself and therefore each even number has the neighbours less than itself. However number 2 can have possibly only one number less than itself. Contradiction.

2. The number of cells with non integer perimeters is at most $121 - 111 = 10$. No matter how these cells are distributed in the rectangle, at least one row and one column consist of cells with integer perimeters. On the figure below these raw and column are shaded.

   We prove that any other cell has an integer perimeter. Let A be this shell and (a, b) be the dimensions its dimensions. Then it has a perimeter $p = 2a+2b = (2a+2c)+(2b+2d)-(2c+2d)$ where $(2a + 2c)$, $(2b + 2d)$, and $(2c + 2d)$ are the perimeters of cells C, B, and D respectively. Since all these perimeters are integers, the perimeter $2a + 2b$ is also integer.



3. Yes, it is possible. (Actually one can grow any number of worms in one hour).

   We can take for granted that in time t the worm grows additional t in the length $(0 < t \leq 1)$.

   Assume that at moment 0 there was 1 fully grown worm. Let dissect it into two parts of lengths t and $(1 - t)$ respectively, $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

   Then, at moment t the part that had the length t becomes $2t$, while another part becomes fully grown worm. We dissect it into parts of the lengths $(2t)$ and $(1 - 2t)$. respectively. Therefore, after the dissection we have two worms of length $2t$ and one of the length $(1 - 2t)$.

   In time $2t$ after the last dissection (or $t + 2t = 3t$) from the beginning, we have two worms of length $4t$ (each grown from the part $2t$) and one fully grown worm. Again, we dissect the fully grown this time into the parts of length $4t$ and $1-4t$. After this dissection we have three worms of length $4t$ and one of length $1-4t$.

Similarly, in time $4t = 2^2$ ($3t + 4t = 7t$ from the beginning) we have three worms of lengh $8t = 2^3 t$ and one fully grown. Again, we dissect the last one into the parts of length $8t$ and $1-8t$. At that moment we have 4 worms of length $8t$ and one of length $(1-8t)$.

It is easy to see the pattern:

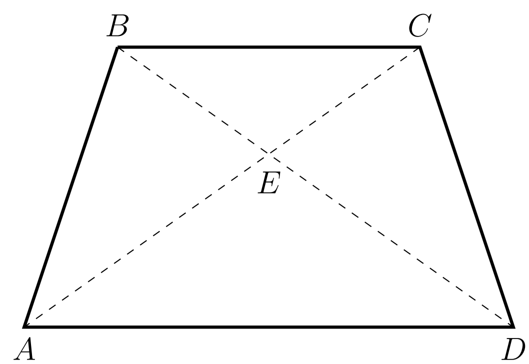
In time $2^k - 1$ from the beginning we have $k+1$ worms of length $2^k t$ and one fully grown. If we want at some moment to have all worms be fully grown, we should take t: $2^k t = 1$ or $t = 1/2^k$ and at this moment we would have $k+2$ fully grown worms.

To have 10 fully grown worms in less than one hour (let us say in 1/2 of hour) we can choose $t = 1/2^9 = 1/512$.

4. Consider isosceles trapezoid $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $\angle BAD = \angle CDA = 72°$.

   In virtue due to $AB = BC = CD$ triangles ABC and BCD are isosceles. Note that $\angle ABC = \angle BCD = 180° - 72° = 108°$. Since triangle ABC is isosceles, $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 72°)/2 = 36°$. Then $\angle ACD = 108° - 36° = 72°$; but we know that $\angle CDA = 72°$ and therefore triangle ACD is isosceles (and so does triangle BDA). So, each diagonal divides $ABCD$ into two isosceles triangles.

   Obviously, triangles BEC and AED are isosceles. Note that $\angle AEB$ as an exterior angle of triangle AED is equal to $\angle EAD + \angle ADE = 36° + 35° = 72°$ which is equal to $\angle ABE$. Therefore triangle ABE is isosceles and so is triangle CED. So, both diagonals divide $ABCD$ into four isosceles triangles.



5. On the first day let the knight split the coins in piles of 25 and 75 coins and each following day move one more coin from the bigger pile to the smaller one. Then in 25 days (if not earlier) the knight sets free.

   Really, let m and n respectively be the numbers of magical and usual coins in the small pile on the first day ($m + n = 25$, $0 < m < 25$). In the worst case scenario (that takes the longest number of days to set free) in 24 days (first day including) in the smaller pile will be 48 coins, 24 magical and 24 usual coins. Therefore, on the next day, when either magical or usual coin is moved, the number of magical or usual coins becomes 25. Therefore, one kind of coins is split in half among the piles and the knight sets free.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2011.**

1. The faces of a convex polyhedron are similar triangles. Prove that this polyhedron has two pairs of congruent faces.

2. Worms grow at the rate of 1 metre per hour. When they reach their maximum length of 1 metre, they stop growing. A full-grown worm may be dissected into two new worms of arbitrary lengths totalling 1 metre. Starting with 1 full-grown worm, can one obtain 10 full-grown worms in less than 1 hour?

3. Along a circle are 100 white points. An integer k is given, where $2 \leq k \leq 50$. In each move, we choose a block of k adjacent points such that the first and the last are white, and we paint both of them black. For which values of k is it possible for us to paint all 100 points black after 50 moves?

4. Four perpendiculars are drawn from four vertices of a convex pentagon to the opposite sides. If these four lines pass through the same point, prove that the perpendicular from the fifth vertex to the opposite side also passes through this point.

5. In a country, there are 100 towns. Some pairs of towns are joined by roads. The roads do not intersect one another except meeting at towns. It is possible to go from any town to any other town by road. Prove that it is possible to pave some of the roads so that the number of paved roads at each town is odd.

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 5 and 5 points respectively.

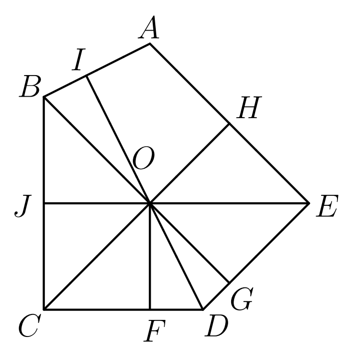
Solution to senior O-Level Spring 2011

1. If each face is an equilateral triangle, then all faces must be congruent. Since a polyhedron must have at least four faces, we easily have two pairs of congruent faces. Suppose the faces are not equilateral triangles. Then not all sides of the polyhedron are of the same length. Pick a side which is the longest. Then the two triangles sharing this side must be congruent in order to be similar. Otherwise, blowing one of them up to be larger will produce a side of greater length. Similarly, the two triangles sharing a side which is the shortest are also congruent. If the longest side and the shortest side appear in the same face, then all faces must again be congruent in order to be similar.

2. We divide 1 metre into 1024 sillimetres and 1 hour into 1024 sillihours. Then an under-sized worm grows at the rate of 1 sillimetre per sillihour. At the start, we cut the full-grown worm into two, one of length 1 sillimetre and the other 1023 sillimetres. After 1 sillihour, the shorter worm has length 2 sillimetres and the longer worm is full-grown. It is then dissected into two, so that the shorter one is also of length 2 sillimetres. After another 2 sillihours, the shorter worms have length 4 sillimetres and the longer worm is full-grown. It is then dissected into two so that the shorter one is also of length 4 sillimetres. Continuing in this manner, we will have 10 full-grown worms after $1+2+4+\cdots+512 = 1023$ sillihours, just beating the deadline of 1 hour.

3. For each k, $2 \le k \le 50$, construct a graph with the 100 points as vertices. Two vertices are joined by an edge if and only if they are the end vertices of a block of k adjacent vertices. In each move, we paint the two vertices of some edge. Now the graph may be a cycle or a union of disjoint cycles of the same length. If the length is even, choose every other edge and paint the vertices of the chosen edges. Then all 100 points are painted. If the length is odd, then there is an unpaintable vertex on each cycle. The number of cycles is given by the greatest common divisor d of 100 and $k-1$, which may be any of 1, 2, 4, 5, 10, 20 and 25. The respective lengths are 100, 50, 25, 20, 10, 5 and 4. So the only cases for which the task fails is when $d = 4$ or 20. The former yields $k = 5, 9, 13, 17, 25, 29, 33, 37, 45$ and 49. and the latter yields $k = 21$ or 41. For all other values of k, $2 \le k \le 50$, the task is possible.

4. **Solution by Adrian Tang.**
   Let $ABCDE$ be the pentagon. Let BG, CH, DI and EJ be the altitudes concurrent at O. Let F be the foot of perpendicular from O to CD and let F' be the foot of perpendicular from A to CD.



By Pythagoras' Theorem,

$$\begin{aligned} BD^2 - OD^2 &= (BG^2 + GD^2) - (OG^2 + GD^2) \\ &= BG^2 - OG^2 \\ &= (BG^2 + GE^2) - (OG^2 + GE^2) \\ &= BE^2 - OE^2. \end{aligned}$$

Consideration of the vertices B, C, D and E in turn yields

$$\begin{aligned} OE^2 - OD^2 &= BE^2 - BD^2, \\ OA^2 - OE^2 &= CA^2 - CE^2, \\ OB^2 - OA^2 &= DB^2 - DA^2, \\ OC^2 - OB^2 &= EC^2 - EB^2. \end{aligned}$$

Adding and simplifying, we have $OC^2 - OD^2 = CA^2 - DA^2$. Now

$$\begin{aligned} F'C^2 - F'D^2 &= (CA^2 - F'A^2) - (DA^2 - F'A^2) \\ &= CA^2 - DA^2 \\ &= OC^2 - OD^2 \\ &= (OF^2 + FC^2) - (OF^2 + FD^2) \\ &= FC^2 - FD^2. \end{aligned}$$

It follows that $F' = F$ and AF is the fifth altitude passing through O.

5. **First Solution.**
We say that a part of the country is connected if we can go from any town to any other town by roads within this part of the country. We prove by induction on n that the task is always possible if the number of towns is $2n$. For $n = 1$, there are 2 towns, and there must be a road between them. Paving this road completes the task. Assume that the task is possible up to a certain value of n. Consider the next case with 2 more towns. We define a tour as going from town to town along the roads, without visiting any town more than once. Since we have a finite number of tours, there is a longest one. With at least 4 towns, this tour consists of at least 2 roads. Let it start from A and continue onto B, C and so on. If we excommunicate town A, the rest of the country must still be connected. Otherwise, there will be some town Z which is linked to B only via A. Then it could have been added to the tour before A and make it longer. Suppose we excommunicate both A and B. If the rest of the country is connected, we can pave the road between A and B, and use the induction hypothesis to finish the task. Suppose that this is not the case. Let X be a town which is now inaccessible from C. It must have been linked to B, and possibly to A, but cannot be linked to some other town Y. Otherwise, we could have added Y and X before B instead of A, again lengthening what is supposed to be the longest tour. If we excommunicate all towns like X in addition to A and B, the rest of the country is connected. Pave all the roads from B to towns like X, including A. Then there is an odd number of paved roads at those towns. If this is also the case for B, we can finish the task using the induction hypothesis. If not, we can still finish the task by putting B back into the rest of the country.

Second Solution by Adrian Tang.

Let $\mathcal{F}$ be the set of towns with an odd number of paved roads and $\mathcal{G}$ be the set of towns with an even number of paved roads. Note that $|\mathcal{F}|$ is even at any time. Initially, $|\mathcal{F}| = 0$. If we have $|\mathcal{F}| = 100$ at some point, the task is accomplished. Suppose $|\mathcal{F}| < 100$. Then there are at least 2 towns A and B in $\mathcal{G}$. Since the graph is connected, there exists a tour from A to B, going along the roads without visiting any town more than once. Interchange the status of each road on this tour, from paved to unpaved and vice versa. (This is of course done on the planning map, before any actual paving is carried out.) Then A and B move from $\mathcal{G}$ to $\mathcal{F}$ while all other towns stay in $\mathcal{F}$ or $\mathcal{G}$ as before. Hence we can make $|\mathcal{F}|$ increase by 2 at a time, until it reaches 100.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2011.**

1. Does there exist a hexagon that can be divided into four congruent triangles by a straight cut?

2. Passing through the origin of the coordinate plane are 180 lines, including the coordinate axes, which form 1° angles with one another at the origin. Determine the sum of the x-coordinates of the points of intersection of these lines with the line $y = -x + 100$.

3. Baron Munchausen has a set of 50 coins. The mass of each is a distinct positive integer not exceeding 100, and the total mass is even. The Baron claims that it is not possible to divide the coins into two piles with equal total mass. Can the Baron be right?

4. Given an integer $n > 1$, prove that there exist distinct positive integers a, b, c and d such that $a + b = c + d$ and $\frac{a}{b} = \frac{nc}{d}$.

5. AD and BE are altitudes of an acute triangle ABC. From D, perpendiculars are dropped to AB at G and AC at K. From E, perpendiculars are dropped to AB at F and BC at H. Prove that FG is parallel to HK and $FK = GH$.

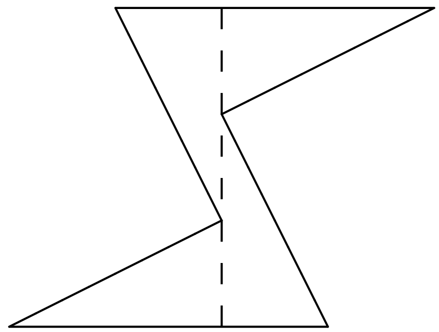
6. Two ants crawl along the sides of the 49 squares of a 7×7 board. Each ant passes through all 64 vertices exactly once and returns to its starting point. What is the smallest possible number of sides covered by both ants?

7. In every cell of a square table is a number. The sum of the largest two numbers in each row is a and the sum of the largest two numbers in each column is b. Prove that $a = b$.

Note: The problems are worth 4, 4, 5, 6, 7, 10 and 10 points respectively.

Solution to Junior A-Level Spring 2011

1. The diagram below shows such a hexagon and how it is cut.

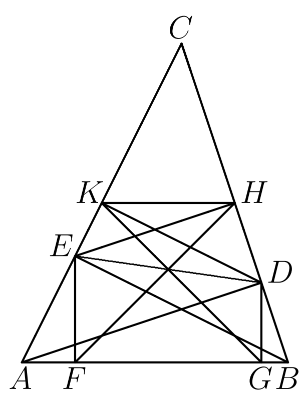


2. The line $x+y=100$ is parallel to the line making a $135°$ angle with the positive x-axis. Hence there are only 179 points of intersection. The point of intersection of $x+y=100$ with $y=x$ is (50,50), and the other points of intersections are arranged in symmetric pairs with respect to this point. Hence the desired sum is $179 \times 50 = 8950$.

3. The Baron is right, as usual. The masses of the 50 coins in his collection may just be the 50 even numbers up to 100. Their total mass is 50 times 51, so that each of two piles would have total mass 25 times 51, which is odd. This is impossible since all the coins have even weights.

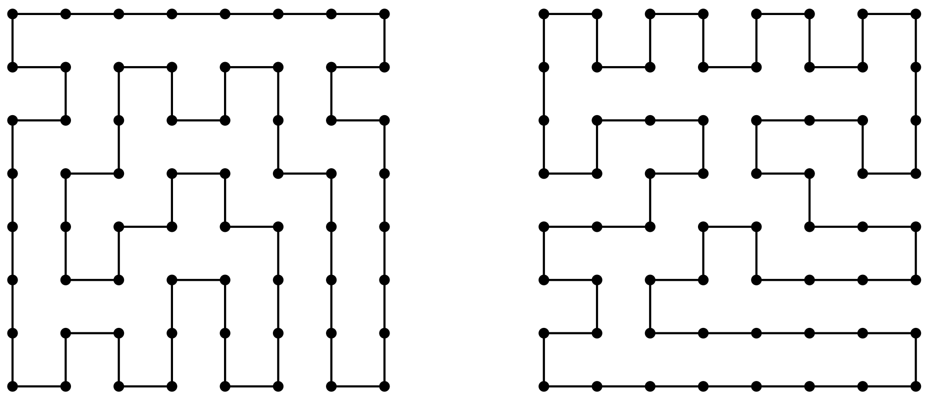
4. To satisfy $\frac{a}{b} = \frac{nc}{d}$ only, we can take $a = 2n,\ b = 1,\ c = 2$ and $d = 1$. Note that $a+b = 2n+1$ while $c+d = 3$. To satisfy $a+b = c+d$ as well, we change these values to $a = 3(2n) = 6n$, $b = 3(1) = 3,\ c = (2n+1)2 = 4n+2$ and $d = (2n+1)1 = 2n+1$. These four numbers are distinct when $n > 1$.

5. Since $\angle EHD = 90° = \angle EKD$, $EDHK$ is a cyclic quadrilateral. Hence $\angle EHK = \angle EDK$. Now DK and BE are parallel since both are perpendicular to AC. Hence $\angle EDK = \angle DEB$. Finally, $\angle DEB = \angle DAB$ since $ABDE$ is also a cyclic quadrilateral. Hence $\angle EHK = \angle DAB$. Now HK and AB make equal angles with the parallel lines EH and DA. Hence HK is parallel to AB and therefore to FG.



Since $\angle EFB = 90° = \angle EHB$, $EFBH$ is a cyclic quadrilateral. Hence $\angle EHF = \angle EBA$. Similarly, $\angle DKG = \angle DAB$. Hence $\angle FHK = \angle FHE + \angle EHK = \angle EBA + \angle DAB$. By symmetry, $\angle GKH = \angle GKD + \angle DKH = \angle DAB + \angle EBA$ also. It follows easily that triangles FHK and GKH are congruent, so that $FK = GH$.

6. The total number of sides is $2 \times 7 \times 8 = 112$ and each ant covers 64 sides. Hence the number of sides covered by both ants cannot be less than $2 \times 64 - 112 = 16$. The following diagram shows the paths of the two ants with exactly 16 sides covered by both, every other side along the four edges of the board.



7. **First Solution by Daniel Spivak.**
We only need to prove that $a \geq b$ since we will then have $b \geq a$ by symmetry. Circle the largest number x_j in column j, $1 \leq j \leq n$, where n is the number of rows and therefore of columns. By relabelling if necessary, we may assume that x_1 is the smallest of these n numbers. We consider two cases.
Case 1. Two circled numbers x_j and x_k are on the same row.
Then $a \geq x_j + x_k \geq 2x_1 \geq b$ since the sum of the largest two numbers in column 1 is b.
Case 2. Each circled number is in a different row.
Let the second largest number y_1 in column 1 be in row j, and let the circled number in row j be x_k. Then $b = x_1 + y_1 \leq x_k + y_1 \leq a$ since the sum of the largest two numbers in row k is a.

Second Solution:
Suppose to the contrary that $a \neq b$. We may assume by symmetry that $a > b$. Circle in each row the largest two numbers. Let the number of circled numbers in column i be c_i, $1 \leq i \leq n$, where n is the number of rows and therefore of columns. We have $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 2n$. Now $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$. By the Root-Mean-Square Inequality, $\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2}{n}} \geq \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}$. It follows that $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} \geq n$. We now construct a graph with n vertices representing the n rows. Two vertices are joined by an edge if and only if the corresponding rows have circled numbers in the same column. The number of edges of this graph is given by $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} \geq n$, so that the graph has a cycle, say of length k. By relabelling if necessary, the k vertices on this cycle represent rows 1 to k, with the circled numbers on row i in columns i and $i+1$ for $1 \leq i \leq k-1$, and the circled numbers on row k in columns k and 1. Now the circled numbers in a column may or may not be the largest two of its numbers, but the sum of these $2k$ numbers is ka. This means that the sum of the largest two numbers of some column is at least $a > b$, which is a contradiction.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2011.**

1. Baron Munchausen has a set of 50 coins. The mass of each is a distinct positive integer not exceeding 100, and the total mass is even. The Baron claims that it is not possible to divide the coins into two piles with equal total mass. Can the Baron be right?

2. In the coordinate space, each of the eight vertices of a rectangular box has integer coordinates. If the volume of the solid is 2011, prove that the sides of the rectangular box are parallel to the coordinate axes.

3. (a) Does there exist an infinite triangular beam such that two of its cross-sections are similar but not congruent triangles?
   (b) Does there exist an infinite triangular beam such that two of its cross-sections are equilateral triangles of sides 1 and 2 respectively?

4. There are n red sticks and n blue sticks. The sticks of each colour have the same total length, and can be used to construct an n-gon. We wish to repaint one stick of each colour in the other colour so that the sticks of each colour can still be used to construct an n-gon. Is this always possible if
   (a) $n = 3$;
   (b) $n > 3$?

5. In the convex quadrilateral $ABCD$, BC is parallel to AD. Two circular arcs ω_1 and ω_3 pass through A and B and are on the same side of AB. Two circular arcs ω_2 and ω_4 pass through C and D and are on the same side of CD. The measures of ω_1, ω_2, ω_3 and ω_4 are α, β, β and α respectively. If ω_1 and ω_2 are tangent to each other externally, prove that so are ω_3 and ω_4.

6. In every cell of a square table is a number. The sum of the largest two numbers in each row is a and the sum of the largest two numbers in each column is b. Prove that $a = b$.

7. Among a group of programmers, every two either know each other or do not know each other. Eleven of them are geniuses. Two companies hire them one at a time, alternately, and may not hire someone already hired by the other company. There are no conditions on which programmer a company may hire in the first round. Thereafter, a company may only hire a programmer who knows another programmer already hired by that company. Is it possible for the company which hires second to hire ten of the geniuses, no matter what the hiring strategy of the other company may be?

Note: The problems are worth 4, 6, 3+4, 4+4, 8, 8 and 11 points respectively.

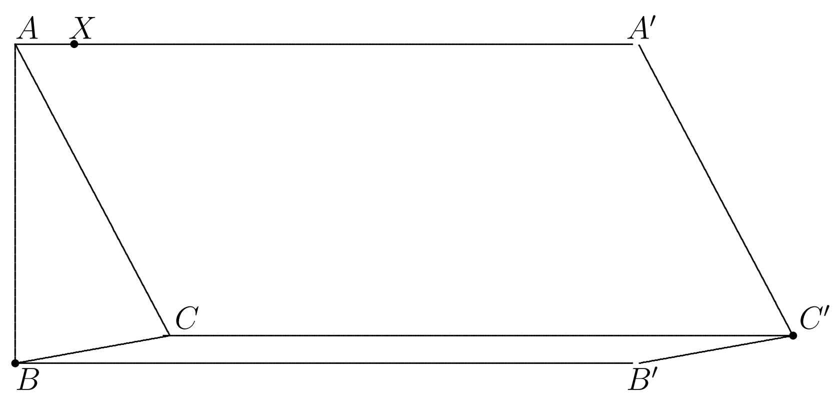
Solution to Junior A-Level Spring 2011

1. The Baron is right, as usual. The masses of the 50 coins in his collection may just be the 50 even numbers up to 100. Their total mass is 50 times 51, so that each of two piles would have total mass 25 times 51, which is odd. This is impossible since all the coins have even weights.

2. **Solution by Olga Ivrii:**
Let the side lengths of the rectangular box be $a \leq b \leq c$. Because the vertices are lattice points, each of a^2, b^2 and c^2 is an integer. Since 2011 is a prime, we must have either $a = b = 1$ and $c = 2011$, or $a = 1$ and $b = c = \sqrt{2011}$. In the former case, the sides of lengths 1 must be parallel to two of the coordinate axes. It follows that the side of length 2001 must also be parallel to the third coordinate axis. In the latter case, the side of length 1 is parallel to a coordinate axis, and the sides of length $\sqrt{2011}$ define a square in a plane parallel to a coordinate plane. Again, because the vertices are lattice points, we must be able to express 2011 as a sum of two squares. One of them must be the square of an even integer and the other the square of an odd integer, say $(2m)^2 + (2n+1)^2 = 2011$. This simplifies to $4(m^2 + n^2 + n) = 2010$, which is impossible since 2010 is not a multiple of 4.

3. **Solution by Yu Wu:**

   (a) Take a prism $ABCA'B'C'$ as shown in the diagram below, with $AB = AC = 2$ and $BC = 1$. Take the cross-section XBC' where X is a point on AA' to be chosen. Let $AX = x$ and $XA' = y$. Then $BC' = \sqrt{1 + (x+y)^2}$, $XC' = \sqrt{4 + y^2}$ and $BX = \sqrt{4 + x^2}$. We wish to choose x and y such that $BC' = XC' = 2BX$. From $XC' = 2BX$, we have $y = 2\sqrt{3 + x^2}$. From $BC' = XC'$, we have $0 = x^2 + 2xy - 3 = x^2 + 2x\sqrt{3 + x^2} - 3$. Denote the last expression by $P(x)$. Then $P(0) = -3$ and $P(1) = 6$. Since $P(x)$ is continuous, there exists a value for x, and consequently for y, which makes triangle XBC' similar to triangle ABC and yet not congruent to it.



   (b) We use here the same diagram above, but with $BC = a$, $CA = b$ and $AB = c$. If we can inscribe an equilateral triangle of side 1 in this prism, then each of a, b and c is less than 1. Now $BC' = \sqrt{a^2 + (x+y)^2}$, $BX = \sqrt{b^2 + x^2}$ and $XC' = \sqrt{c^2 + y^2}$. If XBC' is an equilateral triangle of side 2, then $x = \sqrt{4 - b^2} \geq \sqrt{3}$ and $y = \sqrt{4 - c^2} \geq \sqrt{3}$. Hence $4 \geq a^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2 > 12$, which is a contradiction.

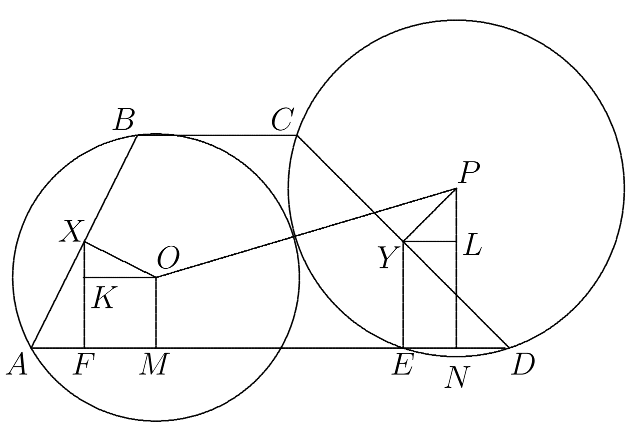
4. (a) The red sticks may be of lengths 16, 16 and 1, and the blue sticks may be of lengths 13,11 and 9. Since 16+16+1=13+11+9, $16 < 16 + 1$ and $13 < 11 + 9$, the conditions of the problem are satisfied. If we swap the red stick of length 1 with any blue stick, it will not form a triangle with the other two blue sticks. If we swap any blue stick with a red stick of length 16, it will not form a triangle with the other two red sticks.

   (b) **Solution by Yu Wu:**
   There is a red stick of length $5 - \frac{1}{n(n+1)}$ and another of length $4 + \frac{1}{n(n+1)}$. The other $n-2$ are of length $\frac{1}{n-2}$. There is a blue stick of length $5 - \frac{1}{n^2(n+1)}$ and another of length $5 - \frac{1}{n^3(n+1)}$. The other $n-2$ are of length $\frac{1}{n^3(n-2)}$. The total length of the sticks of each colour is 10. We consider four cases.
   Case 1. A short red stick is swapped for a short blue stick.
   We will have trouble on the predominantly red side, because

$$\begin{aligned} & 4 + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-3}{n-2} + \frac{1}{n^3(n-2)} - 5 + \frac{1}{n(n+1)} \\ < & \frac{3}{n(n+1)} + \frac{n-3}{n-2} - 1 \\ < & \frac{1}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} - 1 \\ = & 0. \end{aligned}$$

   Case 2. A long red stick is swapped for a short blue stick.
   We will have trouble on the predominantly red side because $4 + \frac{1}{n(n+1)} > 1 + \frac{1}{n^3(n-2)}$.
   Case 3. A long red stick is swapped for a long blue stick.
   We will have trouble on the predominantly blue side, because $5 - \frac{1}{n^2(n+1)} > 5 - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^3}$.
   Case 4. A short red stick is swapped for a long blue stick.
   We will have even greater trouble on the predominantly blue side.

5. **Solution by Charles Leytem:**
   Let X and Y be the respective midpoints of AB and CD. Let O, P, Q' and P' be the respective centres of ω_1, ω_2, ω_3 and ω_4. Let E, F, M, N, M' and N' be points on AD such that YE, XF, OM, PN, $O'M'$ and $P'N'$ are perpendicular to AD. Let K be the point on XF such that OK is perpendicular to XF, L be the points on PN such that LY is perpendicular to PN, K' be the point on XF such that $O'K'$ is perpendicular to XF, and L' be the point on $P'N'$ such that $L'Y$ is perperndicular to $P'N'$. Let $AX = a$, $DY = c$, $DE = e$, $AF = f$ and $XF = YE = h$.



We first prove three preliminary results.

(1) $OB \cdot PC = O'B \cdot P'C$.

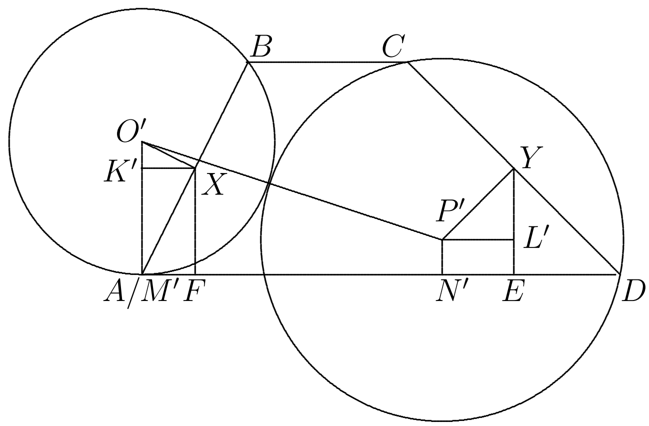
By the Law of Sines, $2OB\sin\alpha = 2a = 2O'B\sin\beta$ and $2PC\sin\beta = 2c = 2P'C\sin\alpha$. Hence $cOB = aP'C$ and $aPC = cO'B$, so that $OB \cdot PC = O'B \cdot P'C$.

(2) $OX \cdot PY = O'X \cdot P'Y$.

We have $c^2OX^2 = c^2(OB^2 - a^2) = a^2(P'C^2 - c^2) = a^2P'Y^2$ so that $cOX = aP'Y$. Similarly, $cO'X = aPY$. Hence $OX \cdot PY = O'X \cdot P'Y$.

(3) $KX \cdot LP = K'O' \cdot L'Y$.

We have $KX = \frac{f}{a}OX$, $LP = \frac{e}{c}PY$, $K'O' = \frac{f}{a}O'X$ and $L'Y = \frac{e}{c}P'Y$ It follows from (2) that $KX \cdot LP = K'O' \cdot L'Y$.



The horizontal distance between O and P is $MN = EF - MF + EN$. The vertical distance between O and P is $PN - OM = KX + LP$. We are given that ω_1 and ω_2 are tangent, so that $MN^2 + (KX + LP)^2 = (OB + PC)^2$. Similarly, the horizontal distance between O' and P' is $M'N' = EF - E'N + F'M$, and the vertical distance is $O'M' - P'N' = K'O' + L'Y$. To have ω_3 tangent to ω_4, we need to prove that $(M'N')^2 + (K'O' + L'Y)^2 = (O'B + P'C)^2$. Note that $FM = \frac{h}{a}OX = \frac{h}{c}P'Y = EN'$ and $FM' = \frac{h}{a}O'X = \frac{h}{c}PY = EN$. Hence $MN = M'N'$. In view of (1) and (3), the desired result now follows from

$$\begin{aligned}
& OB^2 - KX^2 + PC^2 - LP^2 \\
= \ & \frac{a^2}{c^2}P'C^2 - \frac{f^2}{a^2}OX^2 + \frac{c^2}{a^2}O'B^2 - \frac{e^2}{c^2}PY^2 \\
= \ & \frac{a^2}{c^2}P'C^2 - \frac{f^2}{c^2}P'Y^2 + \frac{c^2}{a^2}O'B^2 - \frac{e^2}{a^2}O'X^2 \\
= \ & \frac{h^2}{c^2}P'C^2 - f^2 + \frac{h^2}{a^2}O'B^2 - e^2 \\
= \ & \frac{h^2}{a^2}OB^2 - e^2 + \frac{h^2}{c^2}PC^2 - f^2 \\
= \ & \frac{a^2}{c^2}PC^2 - \frac{f^2}{c^2}PY^2 + \frac{c^2}{a^2}OB^2 - \frac{e^2}{a^2}OX^2 \\
= \ & \frac{a^2}{c^2}PC^2 - \frac{f^2}{a^2}O'X^2 + \frac{c^2}{a^2}OB^2 - \frac{e^2}{c^2}P'Y^2 \\
= \ & O'B^2 - (K'O')^2 + P'C^2 - L'Y^2.
\end{aligned}$$

6. **First Solution by Daniel Spivak.**
We only need to prove that $a \geq b$ since we will then have $b \geq a$ by symmetry. Circle the largest number x_j in column j, $1 \leq j \leq n$, where n is the number of rows and therefore of columns. By relabelling if necessary, we may assume that x_1 is the smallest of these n numbers. We consider two cases.
Case 1. Two circled numbers x_j and x_k are on the same row.
Then $a \geq x_j + x_k \geq 2x_1 \geq b$ since the sum of the largest two numbers in column 1 is b.
Case 2. Each circled number is in a different row.
Let the second largest number y_1 in column 1 be in row j, and let the circled number in row j be x_k. Then $b = x_1 + y_1 \leq x_k + y_1 \leq a$ since the sum of the largest two numbers in row k is a.

Second Solution:
Suppose to the contrary that $a \neq b$. We may assume by symmetry that $a > b$. Circle in each row the largest two numbers. Let the number of circled numbers in column i be c_i, $1 \leq i \leq n$, where n is the number of rows and therefore of columns. We have $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 2n$. Now $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$. By the Root-Mean-Square Inequality, $\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2}{n}} \geq \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}$. It follows that $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} \geq n$. We now construct a graph with n vertices representing the n rows. Two vertices are joined by an edge if and only if the corresponding rows have circled numbers in the same column. The number of edges of this graph is given by $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} \geq n$, so that the graph has a cycle, say of length k. By relabelling if necessary, the k vertices on this cycle represent rows 1 to k, with the circled numbers on row i in columns i and $i+1$ for $1 \leq i \leq k-1$, and the circled numbers on row k in columns k and 1. Now the circled numbers in a column may or may not be the largest two of its numbers, but the sum of these $2k$ numbers is ka. This means that the sum of the largest two numbers of some column is at least $a > b$, which is a contradiction.

7. **Solution by Central Jury:**
Let there be eleven attributes on which the companies rank the candidates. The ranking of each attribute for each candidate is a non-negative integer. It turns out that for each candidate, the sum of the eleven rankings is exactly 100. Moreover, no two candidates have exactly the same set of rankings, and for each possible set of rankings, there is such a candidate. The eleven geniuses are those with a ranking of 100 in one attribute and a ranking of 1 in every other attribute. Two candidates know each other if their sets of rankings differ only in two attributes, and those two rankings differ by 1. Consider candidate A who is the first hired by the first company. By the Pigeonhole Principle, the ranking of at least one attribute for A is at least 10, and we may assume that this is the first attribute. The second company hires the candidate whose ranking in the first attribute is exactly 10 lower than that of A, but exactly 1 higher in each of the other ten attributes. At this point, the first company has a big edge in hiring the genius of the first attribute, but the second company has a small edge in hiring the genius of each of the other ten attributes. The second company concedes the genius of the first attribute to the first company, but aims to hire the other ten geniuses by maintaining these small advantages. Note that among the candidates hired by each company, the highest ranking in any attribute can only increase by 1 with each new hiring. Whenever the first company makes a hiring, the second company will respond by hiring a candidate whose rankings change in the same attributes and in the same directions.